เฉลย Assignment 7
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ การแจกแจงเรขาคณิต ทวินามลบ พหุนาม ไฮเพอร์จีออเมตริก และปัวส์ซง **สัปดาห์ที่** 7 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ถ้าทราบจากลูกค้า 10 คนที่เข้าในร้านขายเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่งจะมีค้าที่ซื้อ 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าเข้ามาคนที่ 5 ในวันนี้จะเป็นผู้ซื้อเป็นคนแรก

   แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงเรขาคณิตที่มี $p = \dfrac{1}{10}$ จะได้ว่า

$$P(X=5) = g\left(5; \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} = 0.06561$$

   ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ลูกค้าเข้ามาคนที่ 5 ในวันนี้จะเป็นผู้ซื้อเป็นคนแรกเท่ากับ 0.06561 $\#$

2. การแจกแจงเรขาคณิต $g(x;p)$ ถ้าค่าเฉลี่ย $\mu = \dfrac{1}{p}$ จงแสดงว่าความแปรปรวน คือ $\sigma^2 = \dfrac{q}{p^2}$

   บทพิสูจน์. พิจารณา

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 g(x;p) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot pq^{x-1} \\
E(X^2) &= p(1+4q+9q^2+16q^3+\cdots) && ...(1) \\
q(1); \quad q\cdot E(X^2) &= p(q+4q^2+9q^3+16q^4+\cdots) && ...(2) \\
(1)-(2); \quad (1-q)\cdot E(X^2) &= p(1+3q+5q^2+7q^3+\cdots) && ...(3) \\
q(3); \quad q(1-q)\cdot E(X^2) &= p(q+3q^2+5q^3+7q^4+\cdots) && ...(4) \\
(3)-(4); \quad (1-q)^2\cdot E(X^2) &= p(1+2q+2q^2+2q^3+\cdots) \\
(1-q)^2\cdot E(X^2) &= p\left(1+\frac{2q}{1-q}\right) \\
p^2\cdot E(X^2) &= p\left(1+\frac{2q}{p}\right) && \because 1-q=p \\
E(X^2) &= \frac{1}{p}+\frac{2q}{p^2}
\end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X^2)-\mu^2 \\
&= \left(\frac{1}{p}+\frac{2q}{p^2}\right)-\frac{1}{p^2} \\
&= \frac{p+2q-1}{p^2} = \frac{(1-q)+2q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

$\square$

3. ถ้าทราบว่ามีนักศึกษาของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งสอบวิชาความน่าจะเป็นและสถิติไม่ผ่านเกณฑ์ 5% จึงสุ่มถามนักศึกษาทีละคน

แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงทวินามลบโดยที่ $p = 0.05$ และ $k = 20$

3.1 จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสอบไม่ผ่านเกณฑ์เป็นคนที่ 5 เมื่อสอบถามคนที่ 20
จะได้ว่า

$$P(X = 20) = b^*(20; 5, 0.05) = \binom{19}{4}(0.05)^5(0.95)^{15} = 0.00056$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสอบไม่ผ่านเกณฑ์เป็นคนที่ 5 เมื่อสอบถามคนที่ 20 เท่ากับ 0.00056 $\#$

3.2 ต้องสอบถามนักศึกษาอย่างน้อยกี่คน (โดยเฉลี่ย) จึงจะพบนักศึกษาที่ไม่ผ่านเกณฑ์คนที่ 20
จะได้ว่า

$$\mu = \frac{k}{p} = \frac{20}{0.05} = 400$$

ดังนั้นต้องสอบถามนักศึกษาโดยเฉลี่ยจำนวน 400 คนจึงจะพบนักศึกษาที่ไม่ผ่านเกณฑ์คนที่ 20 $\#$

4. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 อัน พร้อมกัน 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่
ลูกเต๋าขึ้นแต้มคี่จำนวน 5 ครั้ง
ลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่และเหรียญขึ้นหัวจำนวน 3 ครั้ง
ลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่และเหรียญขึ้นก้อยจำนวน 2 ครั้ง

แนวคำตอบ พิจารณาการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 อัน จะได้ว่า

$$\begin{array}{cccccc} (1,H) & (2,H) & (3,H) & (4,H) & (5,H) & (6,H) \\ (1,T) & (2,T) & (3,T) & (4,T) & (5,T) & (6,T) \end{array}$$

เป็นการแจงแจงพหุนามโดยที่

E_1 คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มคี่ $x_1 = 5$ และ $p_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

E_2 คือเหตุการณ์ลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่และเหรียญขึ้นหัว $x_2 = 3$ และ $p_2 = \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$

E_3 คือเหตุการณ์ลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่และเหรียญขึ้นก้อย $x_2 = 2$ และ $p_2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f\left(5,3,2;\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) &= \binom{10}{5,3,2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{10!}{5!3!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{315}{4096} = 0.07690 \end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังกล่าวเท่ากับ 0.07690 $\#$

5. โรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพประจำตำบลแห่งหนึ่งมีประชาชนมาตรวจคัดกรองโควิด-19 จำนวน 100 คน มีผู้ติดเชื้อจำนวน 20 คน ถ้าสุ่มประชาชนที่มาตรวจคัดกรองจำนวน 8 คน จงหาโอกาสที่จะได้ประชาชนที่ติดเชื้อโควิด-19 อย่างน้อย 2 คน

แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกโดยที่ $N = 100$, $k = 20$ และ $n = 8$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - h(0; 100, 8, 20) - h(1; 100, 8, 20) \\ &= 1 - \frac{\binom{20}{0}\binom{80}{8}}{\binom{100}{8}} - \frac{\binom{20}{1}\binom{80}{7}}{\binom{100}{8}} \\ &= 0.50280 \end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสที่จะได้ประชาชนที่ติดเชื้อโควิด-19 อย่างน้อย 2 คน เท่ากับ 0.5028

หมายเหตุ ในกรณีที่ประมาณค่าด้วยการแจกแจงทวินามจะได้ว่า $p = \frac{20}{100} = 0.2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - h(0; 100, 8, 20) - h(1; 100, 8, 20) \\ &\approx 1 - b(0; 8, 0.2) - b(1; 8, 0.2) \\ &= 1 - 0.50331 = 0.49669 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าค่าที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเล็กน้อยเนื่องจาก $\frac{N-n}{N-1} = \frac{100-8}{100-1} = 0.92929$

6. เลือกนักเรียนอย่างสุ่มมา 25 คน จากโรงเรียนแห่งหนึ่งซึ่งมีนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 3800 คน และนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 1200 คน เพื่อเป็นสำรวจความเห็นอย่างหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มได้นักเรียนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นอย่างน้อยครึ่งหนึ่งของจำนวนที่สุ่มมา 25 คน

แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกโดยที่ $N = 5000$, $k = 3800$ และ $n = 25$ เนื่องจาก $\frac{N-n}{N-1} = \frac{5000-25}{5000-1} = 0.99952$

ประมาณด้วยการแจกแจงทวินามโดยที่ $p = \frac{3800}{5000} = 0.76$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X \geq 13) &= 1 - P(X \leq 12) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{12} h(x; 5000, 25, 3800) \\ &\approx 1 - \sum_{x=0}^{12} b(x; 25, 0.76) \\ &= 1 - 0.00228 = 0.99772 \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้นักเรียนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นอย่างน้อยครึ่งหนึ่งของจำนวนที่สุ่มมา 25 คน เท่ากับ 0.99772 #

7. ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง พบว่าโดยเฉลี่ยมีนักเรียนไม่ส่งการบ้าน 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนห้องนี้จะไม่ส่งการบ้านไม่เกิน 1 คน

แนวคำตอบ เป็นการแจกแจงปัวส์ซองโดยที่ $\mu = 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= p(0; 3) + p(1; 3) \\ &= \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} \\ &= 0.19915 \end{aligned}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนห้องนี้จะไม่ส่งการบ้านไม่เกิน 1 คน เท่ากับ 0.19915 #

8. ในการผลิตเครื่องคิดเลขของโรงงานแห่งหนึ่งพบว่ามีเครื่องที่ไม่ผ่านมาตรฐาน 2% ถ้าสุ่มตรวจเครื่องคิดเลขจำนวน 200 เครื่องที่ผลิตได้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เครื่องที่ไม่ผ่านมาตรฐาน 10 เครื่อง

แนวคำตอบ
วิธีที่ 1 เป็นการแจกแจงทวินามโดยที่ $p = 0.02$ และ $n = 200$ จะได้ว่า

$$P(X = 10) = b(10; 200, 0.02) = 0.00495$$

วิธีที่ 2 ประมาณด้วยการแจกแจงปัวส์ซองโดยที่ $\mu = np = 200(0.02) = 4$ และ จะได้ว่า

$$P(X = 10) = b(10; 200, 0.02) \approx p(10; 3) = \frac{e^{-4}4^{10}}{10!} = 0.00529$$