เฉลย Assignment 8
MAC1304 ความน่าเป็นและสถิติ

หัวข้อ การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง **สัปดาห์ที่** 9 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์มแบบต่อเนื่องบนช่วง (a,b) จงแสดงว่า

$$\text{ค่าเฉลี่ย} \quad \mu_X = \frac{a+b}{2} \quad \text{และความแปรปรวน} \quad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์มแบบต่อเนื่องบนช่วง (a,b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{เมื่อ } a < x < b \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \mu_X = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_a^b \frac{x}{b-a} x\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} x\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E(X^2) - \mu_X^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a+b)^2}{12} \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2 - (3a+6ab+3b^2)}{12} \\ &= \frac{a^2+2ab+b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

2. คะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 1000 คน มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 45 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน จงหา

   แนวคำตอบ คะแนนสอบมีการแจกแจงปกติที่มี $N = 1000$, $\mu = 45$ และ $\sigma = 10$

   2.1 จำนวนคนที่ได้คะแนนน้อยกว่า 60
   จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(X < 60) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{60-45}{10}\right) \\
&= P(Z < 1.5) \\
&= 0.93319
\end{aligned}
$$

   ดังนั้นจำนวนคนที่ได้คะแนนน้อยกว่า 60 เท่ากับ $0.93319 \times 1000 \approx 933$ คน $\#$

   2.2 จำนวนคนที่ได้คะแนนอยู่ระหว่าง 30 และ 50
   จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(30 < X < 60) &= P\left(\frac{30-45}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50-45}{10}\right) \\
&= P(-1.5 < Z < 0.5) \\
&= P(Z < 0.5) - P(Z < -1.5) \\
&= 0.6915 - 0.0668 \\
&= 0.6247
\end{aligned}
$$

   ดังนั้นจำนวนคนที่ได้คะแนนอยู่ระหว่าง 30 และ 50 เท่ากับ $0.6247 \times 1000 \approx 624$ คน $\#$

   2.3 คนที่คะแนนต่ำสุดของ 15% สูงสุด
   ให้ a เป็นแนนต่ำสุดของ 15% สูงสุด เนื่องจาก $P(Z < 1.036) = 0.85$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(X < a) &= 0.85 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-45}{10}\right) &= 0.85 \\
P\left(Z < \frac{a-45}{10}\right) &= 0.85
\end{aligned}
$$

   ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\frac{a-45}{10} &= 1.036 \\
a &= 45 + 10.36 \\
&= 55.36
\end{aligned}
$$

   ฉะนั้นคนที่คะแนนต่ำสุดของ 15% สูงสุด คือ 55.36 คะแนน $\#$

3. บริษัทผลิตหลอดไฟต้องการรับประกันคุณภาพผลิตภัณฑ์ของบริษัท โดยจะเปลี่ยนหลอดไฟใหม่ถ้าหลอดเดิมชำรุดบริษัทจะรับประกันไม่เกิน 4.1% ของจำนวนที่ผลิต หลอดไฟมีอายุการใช้งานเฉลี่ย 2500 ชั่วโมง มีสัมประสิทธิ์ของความแปรผันเท่ากับ 0.2 ถ้าคาดว่าตามปกติคนจะใช้หลอดไฟวันละ 5 ชั่วโมง บริษัทนี้ควรกำหนดเวลาประกันมากที่สุดกี่วัน

   แนวคำตอบ อายุการใช้งานของหลอดไฟมีการแจกแจงปกติที่มี $\mu = 2500$ และมีสัมประสิทธิ์ความแปรผัน $C.V. = 0.2$ นั่นคือ

$$\sigma = \mu \cdot C.V. = 2500(0.2) = 500$$

   ให้ a แทนอายุของหลอดไฟการใช้งานต่ำสุดที่บริษัทจะรับประกัน นั่นคือ $P(X < a) = 0.041$ เนื่องจาก $P(Z < -1.7392) = 0.041$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X < a) &= 0.041 \\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-2500}{500}\right) &= 0.041 \\ P\left(Z < \frac{a-2500}{500}\right) &= 0.041 \end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{a-2500}{500} &= -1.7392 \\ a &= 2500 - 1.7392(500) \\ &= 1630.4 \end{aligned}$$

   ฉะนั้นบริษัทนี้ควรกำหนดเวลาประกันมากที่สุด 1630 ชั่วโมง คิดเป็น $\frac{1630}{5} = 326$ วัน #

4. นายเดชาทราบว่าเวลาที่เขาเดินทางจากบ้านมายังมหาวิทยาลัยมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 90 นาที ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 นาที นายเดชาควรออกจากบ้านกี่โมงในตอนเช้า ที่จะทำให้เขามั่นใจ 95% ว่าจะมาถึงมหาวิทยาลัยในเวลา 8 โมงเช้า

   แนวคำตอบ เวลาในการเดินทางของนายเดชามีการแจกแจงปกติโดยที่ $\mu = 90$ และ $\sigma = 10$
   ให้ a แทนเวลาในการเดินทางของนายเดชาซึ่ง $P(X < a) = 0.95$ เนื่องจาก $P(Z < 1.6448) = 0.95$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X < a) &= 0.95 \\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-90}{10}\right) &= 0.95 \\ P\left(Z < \frac{a-90}{10}\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{a-90}{10} &= 1.6448 \\ a &= 90 + 1.6448(10) \\ &= 106.448 \end{aligned}$$

   ฉะนั้นนายเดชาใช้เวลาไม่เกิน 107 นาที หรือ 1 ชั่วโมง 47 นาที นั่นคือต้องออกจากบ้านเวลา 06:13 น. #

5. ข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือกซึ่งมีคำตอบที่ถูกต้องรวมอยู่ 1 ข้อ จำนวน 200 ข้อ ถ้ามีข้อสอบ 80 ข้อ ที่คาดว่านักเรียนไม่มีความรู้ที่จะตอบได้จริง ๆ จงหาโอกาสที่นักเรียนจะตอบถูกโดยการเดาได้ตั้งแต่ 25 ถึง 30 ข้อ (ทำโดยใช้ การแจกแจงทวินามและประมาณด้วยการแจกแจงปกติ)

แนวคำตอบ วิธีที่ 1 การแจกทวินาม จะเห็นได้ว่า $p = \frac{1}{4} = 0.25$ และ $n = 80$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
P(25 \le X \le 30) &= \sum_{x=25}^{30} b(x; 80, 0.25) \\
&= \sum_{x=0}^{30} b(x; 80, 0.25) - \sum_{x=0}^{24} b(x; 80, 0.25) \\
&= 0.9954 - 0.8761 \\
&= 0.1193
\end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสที่นักเรียนจะตอบถูกโดยการเดาได้ตั้งแต่ 25 ถึง 30 ข้อ เท่ากับ 0.1193 #

วิธีที่ 2 ประมาณด้วยการแจกปกติ โดยที่ $\mu = np = 80(0.25) = 20$ และ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80(0.25)(0.75)} = \sqrt{15}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
P(25 \le X \le 30) &= P(24.5 < X < 30.5) \\
&= P\left(\frac{24.5 - 20}{\sqrt{15}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{30.5 - 20}{\sqrt{15}}\right) \\
&= P(1.16 < Z < 2.71) \\
&= P(Z < 2.71) - P(Z < 1.16) \\
&= 0.9966 - 0.8770 \\
&= 0.1196
\end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสที่นักเรียนจะตอบถูกโดยการเดาได้ตั้งแต่ 25 ถึง 30 ข้อ เท่ากับ 0.1196 #

6. คะแนนสอบของวิชาคณิตศาสตร์ ONET ระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 65 คะแนน ถ้าสุ่มนักเรียนที่สอบมา 15 คน คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ 10 คะแนน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่เข้าสอบมีคะแนนไม่น้อยกว่า 50 คะแนน แต่ไม่เกิน 80 คะแนน

แนวคำตอบ ใช้การแจกแจงที โดยที่ $\mu = 65, s = 10$ และ $\nu = 15 - 1 = 14$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(50 \le X \le 80) &= P\left(\frac{50 - 65}{10} \le \frac{X - \mu}{s} \le \frac{80 - 65}{10}\right) \\
&= P(-1.5 \le t \le 1.5) \\
&= P(t \le 1.5) - P(t \le -1.5) \\
&= 0.92208 - 0.07791 \\
&= 0.84417
\end{aligned}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่เข้าสอบมีคะแนนไม่น้อยกว่า 50 คะแนน แต่ไม่เกิน 80 คะแนนเท่ากับ 0.84417 #

7. ในการแจกแจงไคสแควร์จงหา a และ b ที่ทำให้ $P(\chi^2 < a) = 0.025$ และ $P(a < \chi^2 < b) = 0.97$ ถ้าองศาเสรีเท่ากับ 10

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} P(\chi^2 < a) &= 0.025 \\ 1 - P(\chi^2 > a) &= 0.025 \\ P(\chi^2 > a) &= 0.975 \end{aligned}$$

จากตางรางไคสแควร์ที่ $\nu = 10$ จะได้ว่า $a = 3.247$ #

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} P(a < \chi^2 < b) &= 0.97 \\ P(\chi^2 > a) - P(\chi^2 > b) &= 0.97 \\ 0.975 - P(X > b) &= 0.97 \\ P(\chi^2 > b) &= 0.005 \end{aligned}$$

จากตางรางไคสแควร์ที่ $\nu = 10$ จะได้ว่า $b = 25.188$ #

8. ในการแจกแจงเอฟ จงหา a และ b ที่ทำให้ $P(a < F < b) = 0.90$ และ $P(F < a) = 0.05$ ถ้าองศาเสรีเท่ากับ 8 และ 16 ตามลำดับ

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} P(F < a) &= 0.05 \\ 1 - P(F > a) &= 0.95 \\ P(F > a) &= 0.95 \end{aligned}$$

จากตางรางเอฟที่ $f_{0.05,(16,8)} = 3.20$ จะได้ว่า

$$f_{0.95,(8,16)} = \frac{1}{f_{0.05,(16,8)}} = \frac{1}{3.20} = 0.3125$$

ดังนั้น $a = 0.3125$ #

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} P(a < F < b) &= 0.90 \\ P(F > a) - P(F > b) &= 0.90 \\ 0.95 - P(X > b) &= 0.90 \\ P(F > b) &= 0.05 \end{aligned}$$

จากตางรางเอฟที่ $f_{0.05,(8,16)} = 2.59$ ดังนั้น $b = 2.59$ #