โครงการปรับพื้นฐานนักศึกษาใหม่
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2566

เขียนและเรียบเรียงโดย
อาจารย์ วาริยา พุทธปฏิโมกข์
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

คณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย หน้าสาขาวิชาคณิตศาสตร์
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปุณยพล จันทร์ฝอย
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ตีรวิชช์ ทินประภา
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนวัฒน์ ศรีศิริวัฒน์
5. อาจารย์ ดร.สุรนนท์ เย็นศิริ
6. อาจารย์ ช่อเอื้อง อุทิตะสาร
7. อาจารย์ วาริยา พุทธปฏิโมกข์ (ลาศึกษาต่อ)

สารบัญ

บทที่ 1

พหุนาม (Polynomial)

1.1 พีชคณิตของพหุนาม (Algebra of Ploynomial)

บทนิยาม 1.1.1 พหุนามหนึ่งตัวแปร (x) เมื่อ $n = 0, 1, 2, ...$ อยู่ในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ เป็นจำนวนจริงเรียกว่าสัมประสิทธิ์ (coefficient) และ $a_n \neq 0$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ตัวนำ (leading coefficient) และ n เรียกว่าดีกรี (degree) เขียนแทน $\deg P(x)$ ถ้า $a_n = 1$ เรียกว่า พหุนามโมนิก (monic polynomial)

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิจารณาในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นพหุนามหรือไม่ ถ้าเป็นพหุนามจงหา ดีกรี สัมประสิทธิ์ตัวนำ และพหุนามดังกล่าวเป็นพหุนามโมนิกหรือไม่

1. $x^2 + 1$
2. $3x^2 + x - 1$
3. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$
4. 5
5. $5x^{-1} + x + 1$
6. $x^{\frac{1}{2}} - 1$

ตัวอย่าง 1.1.3 จงทำให้พจน์ต่อไปนี้อยู่ในรูปพหุนามต่อไปนี้

1. $(x^2 + x + 1) + (2x^2 + 3x - 2)$
2. $(x^3 + x - 1) - (x^2 + x + 1)$
3. $x^4 - (x^2 + 2x) - x(x + 1)$
4. $x^2(2x + 1) - x(x^2 + x - 3)$
5. $(x - 1)(x - 2)$
6. $(x^2 + x - 1)(2x + 1)$

บทนิยาม 1.1.4 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม แล้ว $P(x) = Q(x)$ ถ้า $\deg P(x) = \deg Q(x)$ และอยู่ในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

ซึ่งทุกสัมประสิทธิ์เท่ากัน หรือ $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ..., a_n = b_n$

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม

$$P(x) = Q(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \deg P(x) = \deg Q(x) \quad \text{และ} \quad P(x) = Q(x) \quad \text{ทุกๆ} \ \ x \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาค่าของ A, B และ C เมื่อพหุนามทั้งสองเท่ากัน

1. $x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-2)(x+3)(x+1) + 7$

2. $A(x-1)(x-2) + B(x-1)(x-3) + C(x-2)(x-3) = 1$

ตัวอย่าง 1.1.7 ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ และ $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + ax + b$ ถ้ามีพหุนาม $Q(x)$ โดยที่ $P(x) = [Q(x)]^2$ จงหา $a + b$

การหารพหุนาม (Division of Polynomial)

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ $P(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $S(x) \neq 0$
แล้วจะมีพหุนาม $Q(x)$ และ $R(x)$ ซึ่ง

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \text{เมื่อ } R(x) = 0 \text{ หรือ } \deg R(x) < \deg S(x)$$

เรียก $P(x)$ ว่าตัวถูกหาร (numerator) $S(x)$ ว่าตัวหาร (denominator) $Q(x)$ ว่าผลหาร (quotient) และ $R(x)$ ว่าเศษ (remainder) เราเรียกวิธีนี้ว่า **ขั้นตอนการหาร (the division algorithm)**

หมายเหตุ การหารยาว (long division) ก็เป็นวิธีหนึ่งในการหา $Q(x)$ และ $R(x)$
ข้อสังเกต ถ้า $R(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า $S(x)$ หาร $P(x)$ ลงตัว หรือ $S(x)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาผลหาร $Q(x)$ และเศษ $R(x)$ ที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $S(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $S(x) = x - 1$ และ $P(x) = x^3 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

2. $S(x) = x^2 + x + 1$ และ $P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x - 3$

ตัวอย่าง 1.1.10 ให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $Q(x) = x^2 + 9$ ถ้า $Q(x)$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว $P(a) + P(b)$ เท่ากับเท่าใด

ทฤษฎีเศษเหลือ (The Remainder Theorem)

ทฤษฎีบท 1.1.11 ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \quad \text{หาร} \quad P(x) \quad \text{เศษเหลือเท่ากับ} \quad P(c)$$

บทพิสูจน์. จากขั้นตอนการหาร $x - c$ หาร $P(x)$ จะได้ว่ามี $Q(x)$ และ $R(x)$ ซึ่ง

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x) \text{ เมื่อ } R(x) = 0 \text{ หรือ } \deg R(x) < 1$$

กรณีที่ $R(x) = 0$ จะได้ว่า $P(x) = Q(x)(x - c)$ แล้ว $P(c) = R(x)$
กรณีที่ $\deg R(x) = 0$ แล้ว $R(x) = d$ เมื่อ d เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $P(x) = Q(x)(x - c) + d$
แล้ว $P(c) = d = R(x)$ □

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $m, k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $m \neq 0$

$$mx - k \quad \text{หาร} \quad P(x) \quad \text{เศษเหลือเท่ากับ} \quad P(\tfrac{k}{m})$$

ตัวอย่าง 1.1.12 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วยตัวหารที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x - 1$ หาร $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

2. $x + 2$ หาร $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

3. $2x - 1$ หาร $P(x) = 16x^3 - 4x^2 + 8x + 1$

ตัวอย่าง 1.1.13 จงหาค่า k ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x + 1$ หาร $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + +kx - 5$ เหลือเศษ -3

2. $x - 3$ หาร $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + k$ ลงตัว 2

ตัวอย่าง 1.1.14 ถ้า $6x^3 + ax^2 + bx - 1$ หารด้วย $x - 1$ ลงตัว แต่หารด้วย $x + 1$ เหลือเศษ -24 จงหา ab

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาค่าของ A, B และ C เมื่อพหุนามทั้งสองเท่ากัน

   1.1 $(2x+1)(x-B)+A = 2x^2+x+C$

   1.2 $x(x+A)(x+C)+B = x^3+3x^2+4x-2$

   1.3 $2x^2+3x+2 = A(x+B)^2+C$

   1.4 $A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)^2 = 4x^2$

   1.5 $A(x+1)(x-B)+C = x^2+x+1$

2. ถ้า $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ และ $Ax(x^2+1)+B(x^2+1)(x-1)+(Cx+D)x(x-1) = x^2-1$ จงหาค่าของ $A+B-(C+D)$

3. จงหาผลหาร $Q(x)$ และเศษ $R(x)$ ที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $S(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   3.1 $S(x) = x^2-1$ และ $P(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$

   3.2 $S(x) = x^3+1$ และ $P(x) = x^6-2x^4-x^2+x-1$

4. จงหา k ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   4.1 $x-1$ หาร $x^3-3x^2+4x+2k$ เหลือเศษ -2

   4.2 $x-2$ หาร $x^3+kx^2+(k+1)x+5$ เหลือเศษ 5

   4.3 $2x-1$ หาร $2x^4-3kx+x-k$ ลงตัว

   4.4 $x+k$ หาร $x^3-5x^2-8x+10$ เหลือเศษ -2

5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า ax^5+bx+4 หารด้วย $(x-1)^2$ ลงตัว แล้ว $a-b$ เท่ากับเท่าใด

6. เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เมื่อ $x+1$ หารพหุนาม $2x^4-7x^3+ax^2+7x+b$ ลงตัว และได้ผลลัพธ์เท่ากับ $2x^3-9x^2+7x+b$ จงหา $a+b$

7. ถ้า $3x^2-13x+4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3+ax^2+bx-8$ แล้วค่าของ $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x-1$ จะเหลือเศษเท่ากับ 3 และถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x-3$ จะเหลือเศษเท่ากับ 5 ถ้า $r(x) = ax+b$ คือเศษที่เหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $(x-1)(x-3)$ แล้ว $3a+2b$ เท่ากับเท่าใด

9. กำหนดให้ $P(x) = x^3+ax^2+bx+2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x-1$ และ $x+3$ ต่างหาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 จงหาค่าของ $a+2b$

10. ให้ $P(x) = x^2+7x-3$ เมื่อหาร $P(x)$ ด้วย $x-p$ และ $x+q$ จะได้เศษเหลือเท่ากัน โดยที่ $p \neq q$ แล้ว $p-q$ มีค่าเท่าใด

1.2 การแยกตัวประกอบ (Fractorization)

ทฤษฎีบท 1.2.1 ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \quad \text{เป็นตัวประกอบหนึ่งของ} \quad P(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad P(c) = 0$$

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ต่อไปนี้

1. ให้ $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2. ให้ $2x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 2x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

3. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

4. ให้ $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 8x + 24$

ทฤษฎีบท 1.2.3 ให้พหุนามโมนิค $P(x) = a_0 + a_1x + a_2 + ... + x^n$ ซึ่ง $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้วจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $P(c) = 0$ จะต้องหาร a_0 ลงตัว

ตัวอย่าง 1.2.4 จงแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ต่อไปนี้

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ แล้ว c ที่เป็นไปได้คือตัวหารทั้งหมดของ 6 คือ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

2. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

3. $P(x) = x^3 - 6x^2 - 11x - 6$

4. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

ทฤษฎีบท 1.2.5 ให้พหุนาม $P(x) = a_0 + a_1x + a_2 + ... + a_nx^n$ ซึ่ง $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$ แล้วจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $P(c) = 0$ จะต้องอยู่ในรูป $c = \frac{p}{q}$ ซึ่ง p เป็นตัวหารของ a_0 และ q เป็นตัวหารของ a_n

ตัวอย่าง 1.2.6 จงแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ต่อไปนี้

1. $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 4x - 4$
   ตัวหารทั้งหมดของ 4 คือ $\pm1, \pm2, \pm4$
   ตัวหารทั้งหมดของ 6 คือ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
   ดังนั้น c ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{6}$

2. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

3. $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2$

เศษส่วนย่อย (Partial Fraction)
ให้ $p_1(x), p_2(x), q_1(x), q_2(x)$ เป็นพหุนามซึ่ง $q_1(x) \neq 0, q_2(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{p(x)}{h_1(x)h_2(x)} = \frac{k_1(x)}{h_1(x)} + \frac{k_2(x)}{h_2(x)}$$

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีการและรูปแบบของการเขียนเศษส่วนย่อยของพหุนามที่กำหนดเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย
วิธีการเขียนเศษส่วนย่อย โดยมีเงื่อนไข ดีกรีตัวหารต้องมากกว่าดีกรีของตัวถูกหาร

(I) $\dfrac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

(II) $\dfrac{p(x)}{(x-a)(x-b)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{(x-b)^2}$

(III) $\dfrac{p(x)}{(x-a)(bx^2+cx+d)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+C}{bx^2+cx+d}$

(IV) $\dfrac{p(x)}{(x-a)(bx^2+cx+d)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{Bx+C}{bx^2+cx+d} + \dfrac{Dx+E}{(bx^2+cx+d)^2}$

ตัวอย่าง 1.2.7 จงเขียนเศษส่วนพหุนามต่อไปนี้ในรูปแบบของเศษส่วนย่อย (โดยไม่ต้องคำนวณค่า)

1. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

2. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}$

3. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

4. $\dfrac{4x+2}{(x^2+1)(x-1)^2}$

ตัวอย่าง 1.2.8 ถ้า A, B, C เป็นค่าคงตัว และ

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=\frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

จงหา $A+B+C$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงหาค่าของ A, B, C ที่ทำให้ $\quad \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{x-2}{x^2(x-1)}$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนเศษส่วนพหุนามต่อไปนี้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย พร้อมคำนวนค่าให้สมบูรณ์

1.1 $\dfrac{4-2x}{(x+1)(x+3)}$

1.2 $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$

1.3 $\dfrac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}$

1.4 $\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

2.1 $x^3+6x^2+11x+6$

2.2 $x^4-10x^3+3x^2-50x+24$

2.3 $x^5+10x^3-10x^2+5x-1$

2.4 $x^6+3x^5+2x^4+x^2+3x+2$

2.5 $2x^3+3x^2-5x-6$

2.6 $12x^3+16x^2-5x-3$

2.7 $3x^4-8x^3+x^2+8x-4$

2.8 $4x^4-4x^3-25x^2+x+6$

2.9 $2x^4+3x^3-16x^2-8x+24$

2.10 $4x^5+16x^4+9x^3-31x^2-40x-12$

2.11 $6x^5+11x^4-9x^3-13x^2+3x+2$

2.12 $6x^5+13x^4-20x^3-10x^2+14x-3$

1.3 สมการพหุนาม (Polynomial Equation)

บทนิยาม 1.3.1 เราจะเรียกจำนวนจริง c ว่าเป็น**ราก (root)** ของพุหนาม $P(x)$ ถ้า $P(c)=0$ หรือกล่าวว่า c เป็น**รากคำตอบ**หรือ**ผลเฉลย (solution)** ของสมการ $P(x)=0$

ทฤษฎีบท 1.3.2 ถ้า c ว่าเป็นรากของพุหนาม $P(x)$ แล้ว $(x-c)$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$

ทฤษฎีบท 1.3.3 พุหนามดีกรี n จะมีรากที่เป็นจำนวนจริงไม่เกิน n ราก

สมการเชิงเส้น (Linear equation)

ตัวอย่าง 1.3.4 จงหารากคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x+5=9$
2. $9+5x=3x+13$
3. $5+3(x-1)=5x-6$
4. $5(3-x)-2(4-3x)=11-2(x-1)$
5. $5+\dfrac{x}{3}=7$
6. $\dfrac{3}{4}x-2=\dfrac{1}{3}x+3$
7. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{1-2x}{5}$
8. $\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{5x-1}$

สมการกำลังสอง (Quadratic equation)

ทฤษฎีบท 1.3.5 รากคำตอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ คือ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้วพหุนามมีราก 2 รากเป็นจำนวนจริง
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้วพหุนามมีราก 1 รากเป็นจำนวนจริง (รากซ้ำ)
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วพหุนามไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.3.6 จงหารากคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - x - 2 = 0$
2. $x^2 + 6x + 8 = 0$
3. $x^2 - 3x - 10 = 0$
4. $x^2 + x + 72 = 0$
5. $x^2 + 13x - 36 = 0$
6. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
7. $3x^2 - 4x - 4 = 0$
8. $x^2 + x - 1 = 0$
9. $x^2 + x + 1 = 0$
10. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

สมการของพหุนามดีกรีสูง (Higher degree polynomial equation)

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหารากคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
2. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
3. $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$
4. $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$
5. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
6. $x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 80x - 96 = 0$

ตัวอย่าง 1.3.8 กำหนดให้

A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$

B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1-\sqrt{3})x^2 - (36+\sqrt{3})x - 36 = 0$

จงหาเซตของ $A \cap B$

ตัวอย่าง 1.3.9 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ

$$P(n) = Q(n) \quad \text{สำหรับ } n = 1, 2, 3, ..., 2551 \quad \text{และ} \quad P(2552) = Q(2552) + 1$$

ค่าของ $P(0) - Q(0)$ เท่ากับเท่าใด

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหารากคำตอบของสมการ

1.1 $x+2=3$
1.2 $2(x-1)=3(x+1)$
1.3 $\frac{1}{2}x+5=\frac{2}{3}x-1$
1.4 $\frac{x+2}{3}=\frac{x-1}{2}$
1.5 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$
1.6 $\frac{x-1}{x-2}=3$
1.7 $x^2-3x+2=0$
1.8 $x^2-3x-10=0$
1.9 $x^2+x-12=0$
1.10 $x^2-10x+21=0$
1.11 $2x^2-3x-2=0$
1.12 $4x^2+4x-15=0$
1.13 $9x^2+6x+1=0$
1.14 $x^2-3x+2=0$
1.15 $x^2-4x+5=0$

2. จงหารากคำตอบของสมการ

2.1 $x^3-2x^2+x+4=0$
2.2 $x^3-5x^2-2x+10=0$
2.3 $2x^3-3x^2-7x-6=0$
2.4 $x^3-2x^2-5x+6=0$
2.5 $2x^3-7x^2+7x-2=0$
2.6 $x^5+x^3-2x^2-12x=8$
2.7 $\frac{4}{x-4}+\frac{2x}{x^2-16}=\frac{1}{x+4}$
2.8 $\frac{x+2}{2x-6}+\frac{3}{3-x}=\frac{x}{2}$
2.9 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{8}{x+1}$

3. จงหารากคำตอบของสมการ

3.1 $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$
3.2 $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$
3.3 $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$
3.4 $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$
3.5 $x^4-13x^2+36=0$
3.6 $(x+3)(x+5)(x-2)(x-4)=120$
3.7 $(x-2)(x+3)(x+6)(x+1)+56=0$
3.8 $(2x-7)(x^2-9)(2x-5)=91$
3.9 $(x+1)^4+(x+5)^4=82$
3.10 $(2x+1)^4+(2x-1)^4=8$
3.11 $(x-12)^4+(x-7)^4=96$
3.12 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
3.13 $8x^4-42x^3+29x^2+42x+8=0$
3.14 $x^5+3x^3+3x^2+1=0$
3.15 $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)=30x^3$
3.16 $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$
3.17 $10(x^4+1)-63x(x^2-1)+52x^2=0$
3.18 $5x^8-2x^6+4x^5+4x^3-2x+5$

4. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 600 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 75% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่ง แล้วเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ยาวกี่เซนติเมตร

5. ถ้าสมการ $(x^2+1)(2x^2-6x+c)=0$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงเพียง 1 ราก จงหาค่าของ c

6. จงหาค่า k ที่เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดซึ่งรากของสมการ $x^2+2x+(k+3)=0$ เป็นจำนวนจริง

7. ถ้า $2x^2=x-3k$ เป็นสมการที่คำตอบเป็น a เพียงคำตอบเดียว แล้ว $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ มีค่าเท่าใด

1.4 อสมการพหุนาม (Polynomial Inequality)

อสมการเชิงเส้น (Linear inequality)

ทฤษฎีบท 1.4.1 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

1. $a < b < c$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ และ $b < c$
2. $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c < b + c$
3. $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

1. $2x + 3 < 9$
2. $3x - 5 \leq x + 8$
3. $3(x - 5) \geq 12 - (1 - 3x)$
4. $3(x - 5) < 11 + 3x$
5. $-1 < 4x + 7 < 11$
6. $4 - 2x < 5x - 2 < 3x + 6$

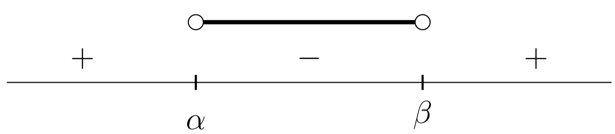
อสมการของพหุนามกำลังสอง (Quadratic inequality)

ทฤษฎีบท 1.4.3 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

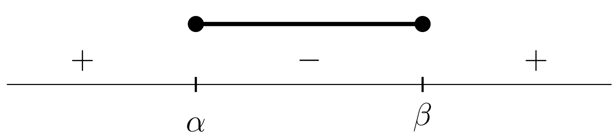
1. $ab > 0$ ก็ต่อเมื่อ $(a > 0$ และ $b > 0)$ หรือ $(a < 0$ และ $b < 0)$
2. $ab < 0$ ก็ต่อเมื่อ $(a < 0$ และ $b > 0)$ หรือ $(a > 0$ และ $b < 0)$

ทฤษฎีบท 1.4.4 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha < \beta$ แล้ว

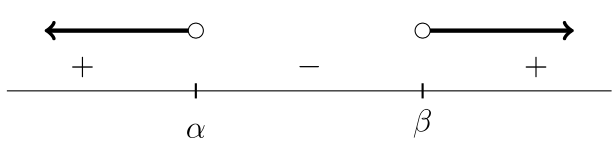
1. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ คือ (α, β)



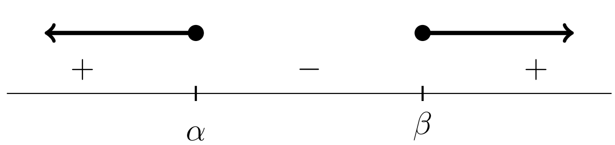
เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) \le 0$ คือ $[\alpha, \beta]$



2. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ คือ $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$



เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) \ge 0$ คือ $(-\infty, \alpha] \cup [\beta, \infty)$



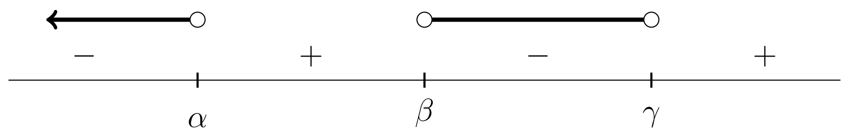
ตัวอย่าง 1.4.5 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $(x-1)(x-2) < 0$
2. $(x+1)(3-x) > 0$
3. $x^2 \leq 5x - 6$
4. $7x - 12 \leq x^2$
5. $5x^2 + 6 \leq 17x$
6. $3x^2 - 8x + 5 \leq 0$
7. $x^2 - 4x + 4 > 0$
8. $x^2 - 4x + 4 < 0$
9. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
10. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
11. $x^2 + 2x + 2 \geq 0$
12. $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

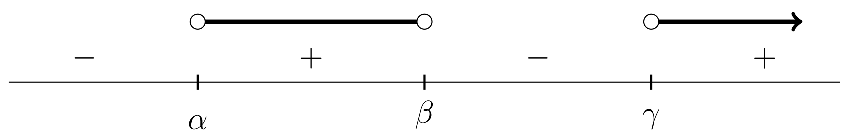
อสมการของพหุนามดีกรีสูง (Higher degree polynomial inequality)

ทฤษฎีบท 1.4.6 ให้ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha < \beta < \gamma$ แล้ว

1. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) < 0$ คือ $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma)$



2. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$ คือ $(\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty)$



ตัวอย่าง 1.4.7 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$
2. $x(x-1)(x-2) > 0$
3. $x(x+1)(x+2)(x+3) \leq 0$
4. $(1-x)(x+1)(2x-1) \geq 0$
5. $x(1-x)(x-2)(2-3x) > 0$
6. $(1-x)(x-1)(x^2-4) \geq 0$

ตัวอย่าง 1.4.8 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $(x-1)(x-2)^2 < 0$
2. $x(x-1)^3(x-2)^4 > 0$
3. $(x+1)^{10}(x+2)^5(x+3)^7 \leq 0$
4. $(1-x)^{12}(x+1)^5(1-2x)^{77} \geq 0$

ตัวอย่าง 1.4.9 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $(x^2-1)(x^2-5x+6) < 0$
2. $(x^4-1)(x^2-4) > 0$
3. $6x^3+11x^2-4x-4 \leq 0$
4. $x^3-4x^2+x+6 \geq 0$

อสมการพหุนามในรูปการหาร (Polynomial inequality for division)

ทฤษฎีบท 1.4.10 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

1. $\frac{a}{b} > 0$ ก็ต่อเมื่อ $ab > 0$
2. $\frac{a}{b} < 0$ ก็ต่อเมื่อ $ab < 0$
3. ถ้า $b \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} \geq 0$ ก็ต่อเมื่อ $ab \geq 0$
4. ถ้า $b \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ $ab \leq 0$

ตัวอย่าง 1.4.11 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

1. $\dfrac{x-1}{x-2} < 0$
2. $\dfrac{1-x}{3x-2} \geq 0$
3. $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \geq 0$
4. $\dfrac{x^4-1}{x^2-1} < 0$

ตัวอย่าง 1.4.12 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

1. $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{1}{x}$
2. $\dfrac{3x^2-x+2}{x^2-2x+3} < 2$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

   1.1 $3x+1<2x-1$

   1.2 $4x+7>2(x+1)$

   1.3 $2(3x-1)\geq 3(x-1)$

   1.4 $4-(3-x)<3x-(3-2x)$

   1.5 $x^2-x-6\geq 0$

   1.6 $2x^2+7x+3\geq 0$

   1.7 $4x-x^2\leq 4$

   1.8 $2x<3-x^2$

   1.9 $6x-x^2\geq 5$

   1.10 $x^2+2x<15$

   1.11 $3x^2+2\geq 7$

   1.12 $x^3-3x^2\leq 10x$

   1.13 $x^3-x^2-x-1\geq 0$

   1.14 $x^3-x>2x^2-2$

   1.15 $x(x^2+4)<5x^2$

2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

   2.1 $\frac{x^2+12}{x}>7$

   2.2 $\frac{x^2+6}{x}\leq 5$

   2.3 $\frac{(x-1)(x+3)}{x}-2\leq 0$

   2.4 $\frac{2x-3}{(x+2)(x-5)}>0$

   2.5 $\frac{6}{x-1}>1$

   2.6 $\frac{2x-4}{x-1}<1$

   2.7 $\frac{6}{x-4}\leq x+1$

   2.8 $\frac{8}{x+2}\geq x$

   2.9 $\frac{5-x}{x^2-3x+2}<1$

   2.10 $\frac{x+6}{x(x+1)}<6$

   2.11 $\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{x+4}$

   2.12 $\frac{1}{x+2}\geq\frac{1}{2x-3}$

   2.13 $\frac{x}{x+2}>\frac{1}{x}$

   2.14 $\frac{x+1}{2x-3}\leq\frac{1}{x-3}$

   2.15 $\frac{(1-x)(1+2x)}{x+1}>0$

   2.16 $\frac{(x^2+3x-10)(x^2+x-6)}{x^2+2x-15}\geq 0$

   2.17 $\frac{(2x^2+x-1)(3x^2-5x)}{3x^2-2x-1}\leq 0$

   2.18 $0\leq x^2+1\leq 5$

   2.19 $\frac{2}{x-1}\leq x\leq\frac{3}{x-2}$

   2.20 $\frac{6}{x-1}>1$

   2.21 $1\leq\frac{2x+1}{x-4}<3$

   2.22 $\frac{2x+1}{(x-4)^2(x-3)^2}>0$

   2.23 $\frac{8x^2-11+10}{(x+4)(x^2-2x-63)}\leq 0$

   2.24 $\frac{18-15x}{x^2+2x+3}>x-6$

3. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

   3.1 $\frac{x+3}{(x+1)^2(x-7)^9}\geq 0$

   3.2 $\frac{(x+1)(x+3)(x+5)}{(x-4)^2(x-2)}\leq 0$

   3.3 $\frac{(x-5)^5(x+9)^8(x-10)^{10}}{(x+7)^9(x+2)^4(x-4)^{100}}\leq 0$

   3.4 $\frac{(x-3)^2(x+4)^4}{(x-7)^6}\geq 0$

   3.5 $\frac{(x+6)^3(x+3)^4(x+1)^2}{(x^2-1)^2(x^2+3)}\geq 0$

   3.6 $\frac{(x^2+3x-10)(x^2-x-12)}{x^2+x-20}\geq 0$

   3.7 $(2x+1)^2(x+1)^5<0$

   3.8 $(x-1)^{11}(x-2)^{26}(x-4)^{72}\geq 0$

   3.9 $(x+1)^4(x-2)^9(x-3)^{27}(x+4)^{150}\leq 0$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+11<2x^2-x-4<x^2-2x+2$

5. แม่ค้าขายก๋วยเตี๋ยวชามละ 25 บาท โดยมีค่าเช่าร้านวันละ 120 บาท และต้นทุนค่าวัตถุดิบทั้งหมดคิดเป็นชามละ 18 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรไม่ต่ำกว่าวันละ 500 บาท เขาเต้องขายให้ได้อย่างน้อยวันละกี่ชาม

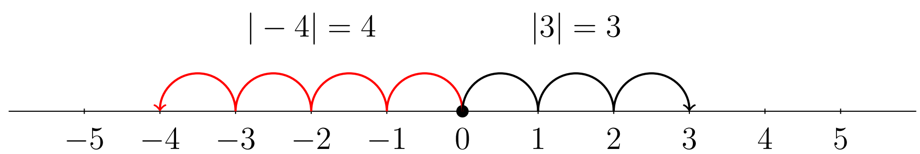
6. พี่มีเงินมากกว่าน้อง 120 บาท ถ้าทั้งสองคนมีเงินรวมกันไม่เกิน $1,240$ บาท แล้วพี่มีเงินมากที่สุดกี่บาท

7. กำหนดให้ $A=\{x\,|\,(2x+1)(x-1)<2\}$ และ $B=\{x\,|\,16-9x^2>0\}$ แล้วจงหา $A\cap B$

8. จงหาเซตของจำนวนจริง m ซึ่งทำให้สมการ $x^2-mx+4=0$ มีรากเป็นจำนวนจริง

1.5 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute values)

บทนิยาม 1.5.1 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางจาก x ไปยัง 0



ทฤษฎีบท 1.5.2 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนต่อไปนี้

1. $|-1| + |5-1| - |-3|$
2. $|2(1-|-2|)| - 2|2-1| - |-2|$
3. $|1-\frac{1}{2}| + |1-\frac{1}{3}| - |-4|$
4. $|1-\sqrt{2}| + |1+\sqrt{2}|$

สมบัติค่าสัมบูรณ์ (Properties of Absolute values)

ทฤษฎีบท 1.5.4 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

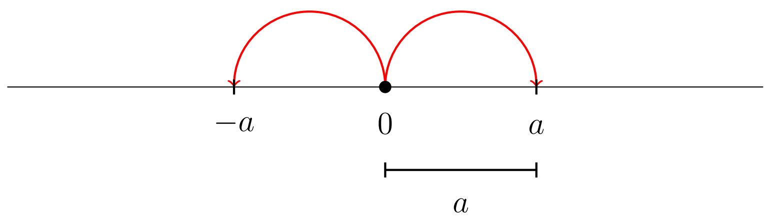
1. $|x| \geq 0$ ($|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$)
2. $|x| = |-x|$ หรือ $|x-y| = |y-x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $|x|^n = |x^n|$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
8. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Triangle inequality)

ตัวอย่าง 1.5.5 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิจารณา ✓ หรือ $\times$ ของข้อความต่อไปนี้

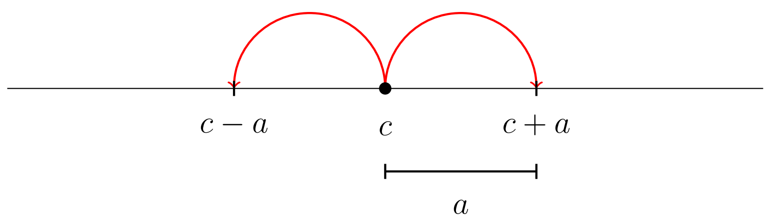
1. ☐ $\sqrt{x^4} = x^2$
2. ☐ $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
3. ☐ ถ้า $x > 0$ และ $y < 0$ แล้ว $|x+y| = |x| + |y|$
4. ☐ ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $|x+y| = |x| + |y|$
5. ☐ ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ แล้ว $|xy| = xy$
6. ☐ ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $|x-y| = x - y$
7. ☐ ถ้า $x|y| > 0$ แล้ว $x > 0$
8. ☐ ถ้า $xy|x||y| > 0$ แล้ว $x > 0$ หรือ $y > 0$
9. ☐ ถ้า $x^2 = y^2$ แล้ว $x = y$
10. ☐ $|x| + |y| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y = 0$
11. ☐ ถ้า $\sqrt{(x-y)^2} = x - y$ แล้ว $x \geq y$
12. ☐ ถ้า $x^3y|z| < 0$ แล้ว $y < 0$
13. ☐ $|x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$
14. ☐ $\dfrac{|x| - x}{x - |x|}$ มีค่าเท่ากับ 1 หรือ -1
15. ☐ ถ้า $|x| + |y| \leq |x+y|$ แล้ว $x = y$

สมการค่าสัมบูรณ์ (Absolute value Equations)

ทฤษฎีบท 1.5.6 ให้ $a > 0$ สำหรับ $|x| = a$ แล้ว $x = a$ หรือ $x = -a$



บทแทรก 1.5.7 ให้ $a > 0$ สำหรับ $|x - c| = a$ แล้ว $x = a + c$ หรือ $x = c - a$



ตัวอย่าง 1.5.8 จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $|x| = 2$
2. $|x - 1| = 1$
3. $|2 - x| = 2$
4. $|x + 5| = -1$
5. $|x - 4| = 0$
6. $|x^2 - x - 3| = 3$

วิธีผลต่างกำลังสองสำหรับสมการค่าสัมบูรณ์ (The Different Square Method)
หลักการ สำหรับ $a(x) \geq 0$ (ตรวจคำตอบทุกครั้ง)

$$|f(x)| = a(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad [f(x)]^2 = [a(x)]^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad [f(x) - a(x)][f(x) + a(x)] = 0$$

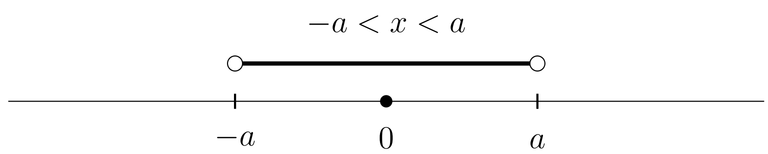
ตัวอย่าง 1.5.9 จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $|1 - x| = 2$
2. $|x - 1| = x$
3. $|x + 3| = |1 - x|$
4. $|x^2 - 3| = -x$
5. $6x^2 - 2 = |x|$
6. $|x - 1| = x - 1$
7. $|1 + \frac{1}{x}| = \frac{1}{x}$
8. $|1 - \frac{2}{x}| = x$

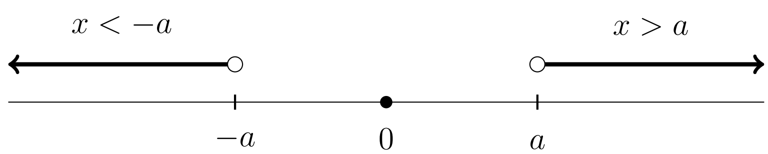
อสมการค่าสัมบูรณ์ (Asolute Value Inequalities)

ทฤษฎีบท 1.5.10 ให้ $a > 0$

(ก) $|x| < a$ แล้ว $-a < x < a$

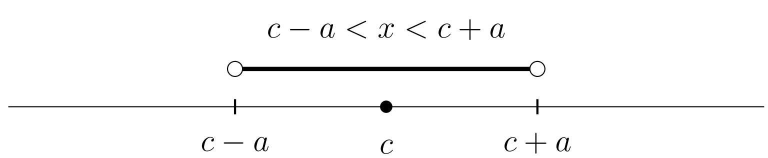


(ข) $|x| > a$ แล้ว $x < -a$ หรือ $x > a$

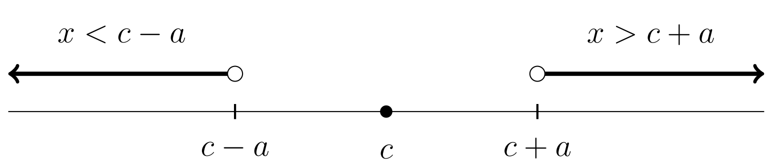


บทแทรก 1.5.11 ให้ $a > 0$

(ก) $|x - c| < a$ แล้ว $c - a < x < c + a$



(ข) $|x - c| > a$ แล้ว $x < c - a$ หรือ $x > c + a$



ตัวอย่าง 1.5.12 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $|x| < 2$
2. $|x-1| \leq 1$
3. $|2x-1| \geq 1$
4. $|2-x| < 2$
5. $|x+5| < -1$
6. $|x+5| > -1$
7. $|x-1| \leq 0$
8. $|x-1| < 0$
9. $|x^2-1| > 0$
10. $|x^2+x-1| \geq 0$

วิธีผลต่างกำลังสองสำหรับอสมการค่าสัมบูรณ์ (The Different Square Method)
หลักการ สำหรับ $a(x) > 0$ (ตรวจคำตอบทุกครั้ง)

- $|f(x)| < a(x)$ ก็ต่อเมื่อ $[f(x)]^2 < [a(x)]^2$ ก็ต่อเมื่อ $[f(x) - a(x)][f(x) + a(x)] < 0$
- $|f(x)| > a(x)$ ก็ต่อเมื่อ $[f(x)]^2 > [a(x)]^2$ ก็ต่อเมื่อ $[f(x) - a(x)][f(x) + a(x)] > 0$

ตัวอย่าง 1.5.13 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $|x| < 2$
2. $|x - 1| > 2$
3. $|2x + 3| > x$
4. $|2x - 1| \leq |x|$
5. $|2 - x| \leq -x$
6. $|x^2 - 1| > 2$

ตัวอย่าง 1.5.14 ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 2 \right\}$$

จงหาเซตของ $A \cap [0,1)$

ตัวอย่าง 1.5.15 กำหนดให้

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0 \right\} \quad \text{และ} \quad B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 3 \}$$

เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนจริง จงหาเซตของ $A' \cup B$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาเซตคำตอบของสมการ

1.1 $|x+1|=4$

1.2 $|3x+\frac{1}{3}|=3$

1.3 $|x^2-20|=5$

1.4 $|x^2-4|=0$

1.5 $|3x-1|=|2x+1|$

1.6 $|x-6|=|3-2x|$

1.7 $|2x+4|=|x-4|$

1.8 $|1-x|=1-x$

1.9 $|x^2+x-6|=6-x-x^2$

1.10 $|x^2+3x-2|=3x+7$

1.11 $|2x+1|=x$

1.12 $|2x+3|=x-5$

1.13 $(|x|-4)(|x|+3)=-6$

1.14 $|x+1|+2=|3x+1|$

1.15 $|2x-1|-|3-x|=3$

1.16 $|x+2|=1+|x-3|$

1.17 $|x+1|+|x|+|x-1|=2$

1.18 $||2x-1|-1|=2$

1.19 $||x|-|2x+1||=-x$

1.20 $|\frac{x+2}{x+3}|=2$

1.21 $\frac{|5x-1|}{5x-1}+4x=0$

1.22 $|\frac{1}{x-3}|=x$

1.23 $|1-\frac{x-2}{x+1}|=2x$

1.24 $|\frac{x+2}{x+3}|=2|\frac{x}{x+1}|$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการ

2.1 $|x+1|<4$

2.2 $|2x+1|>3$

2.3 $|\frac{1}{x}-2|<3$

2.4 $|12x+5|\leq 7$

2.5 $|x^2+x|<|x+4|$

2.6 $|x+2|\leq 3-|x+1|$

2.7 $|x^2-5x|\geq 5x$

2.8 $|4x+3|\leq|5x+3|$

2.9 $(|x|-1)(|x|-3)<0$

2.10 $2x+1<|x|<3x+2$

2.11 $|x-2|+|x+1|\leq 6$

2.12 $|x+1||x-1|>|x+2|$

2.13 $|2x+3|-|x+4|<2$

2.14 $\frac{|1+2x|-1}{x-1}<-x$

2.15 $|x-1|>x+|x+1|$

2.16 $\frac{|x+2|}{|2x-3|}\geq 3$

2.17 $|2x|-3\leq|7x-1|$

2.18 $|2x|+1\geq|2x+1|$

2.19 $|3x+7|>5(1-x)$

2.20 $|x(x-2)|<x^2-x-2$

2.21 $|x^2-x-1|<5$

2.22 $|\frac{x}{2-x}|<|\frac{x}{x+2}|$

2.23 $\frac{|x|+1}{|x|}>1$

2.24 $\frac{|x+2|+x}{|x-1|+3}>3$

2.25 $|x-1||x+3|\geq 5$

2.26 $\frac{|x-2|}{|2-x|}-2>x+1$

2.27 $|x-1|+|x+3|<|x|+1$

3. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องอสมการต่อไปนี้

3.1 $|x|<x$ 3.2 $|x|>x$ 3.3 $|x|<-x$ 3.4 $|x|>-x$

4. จงหาเซตคำตอบของสมการ $|(2x-1)-(x^2+2x+3)|=|2x-1|+|x^2+2x+3|$

5. จงหาเซตคำตอบของสมการ $||x-1|+1|=||x+1|-1|$

6. จงหา y ที่เป็นจำนวนจริงซึ่ง $y=\dfrac{x|x|-x^2}{x^2-x|x|}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(|x|-1)(|x|-3)(|x|+3)(|x|-7)=150$

บทที่ 2

ฟังก์ชัน (Functions)

2.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relations and Functions)

ในวิชาคณิตศาสตร์ การจับคู่ระหว่างสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กันจะใช้ **คู่อันดับ** เป็นสัญลักษณ์แทนสิ่งสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน เช่น $(2,4)$ หมายถึง 2 ความสัมพันธ์กับ 4 ในกรณีทั่วไป เราจะเขียนคู่อันดับ ในรูป (a,b) เรียก a ว่า สมาชิกตัวแรกของคู่อันดับ หรือ สมาชิกตัวหน้า และเรียก b ว่า สมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับ หรือสมาชิกตัวหลัง

บทนิยาม 2.1.1 การเท่ากันของคู่อันดับ $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
การไม่เท่ากันของคู่อันดับ $(a,b) \neq (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ และ $b \neq d$

ตัวอย่าง 2.1.2 การเท่ากันและการไม่เท่ากันของคู่อันดับ
$(x,4) = (3,y)$ เมื่อ ....
$(2,0) \neq (0,2)$

ตัวอย่าง 2.1.3 กำหนดให้ $(2x, y-2) = (x+3, 1)$ จงหา $(x+y, x-y)$

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)

ถ้ากำหนดเซตสองเซตใดๆ เราสามารถเขียนเซตของคู่อันดับ โดยที่สมาชิกตัวหน้ามาจาก เซตแรกและสมาชิกตัวหลังมาจากเซตหลังได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ให้ $A = \{1, 3\}$ และ $B = \{3, 4\}$ โดยกำหนดให้สมาชิกตัวหน้ามาจากเซต A และสมาชิก ตัวหลังมาจากเซต B จะได้เซตของคู่อันดับ ทั้งหมดคือ $\{(1, 3), (1, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ เราเรียกเซตของคู่อันดับ ทั้งหมดนี้ว่า ผลคูณคาร์ทีเซียน โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.4 ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือเซตของคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดที่ $x \in A$ และ $y \in B$ แทนด้วย

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A \wedge y \in B\} \text{ หรือ } (x, y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ $A = \{2, 4, 8\}$ และ $B = \{a, c\}$
$A \times B =$
$B \times A =$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างตนจะเห็นว่า $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$ เสมอไป

ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนสมาชิกของ A คูณกับจำนวนสมาชิกของ B หรือ $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

ตัวอย่าง 2.1.6 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 4\}$ และ $B = \{2, 4, 7, 8\}$
จะได้ $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \times 4 = 12$
และ $n(B \times A) = n(B) \cdot n(A) = 4 \times 3 = 12$

ตัวอย่าง 2.1.7 กำหนดให้ $n(A \times B) = 15$ และ $A = \{3, 5, 7\}$ จงหา $n(B)$

ข้อควรระวัง ถ้า $n(A \times B) = n(B \times A)$ แล้ว $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$ เสมอไป
โดยทั่ว ไป ผลคูณคาร์ทีเซียนไม่มีกฎการตัดออก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.8 ให้ $A = \{3\}$ และ$B = \{5\}$ และ $C = \emptyset$
จะได้ $A \times C = \emptyset$ และ $B \times C = \emptyset$
ดังนั้น $A \times C = B \times C$ แต่ ....

ความสัมพันธ์ (Relations)

ดังที่ได้กล่าวไว้ว่า เราใช้คู่อันดับ (a, b) แทนความสัมพันธ์ระหว่าง a และ b จึงกล่าวว่า ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ ที่เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเชียน

บทนิยาม 2.1.9 กำหนดให้ A, B เป็นเซตใดๆ

1. ความสัมพันธ์ r เป็น**เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป** B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$
2. ความสัมพันธ์ r เป็น**เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป** A หรือเรียกว่า**ความสัมพันธ์ใน** A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

ข้อสังเกต

1. $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เสมอ
2. นิยมเขียน r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ดังนี้ $r = \{(a, b) \in A \times B | ....\}$
3. นิยมเขียน $(a, b) \in r$ หมายถึง a มีความสัมพันธ์ r กับ b เขียนแทนด้วย arb
4. จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมด $= 2^{n(A \times B)}$

ตัวอย่าง 2.1.10 กำหนดให้ $A = \{6, 8, 10\}, B = \{2, 3\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ "มากกว่า" จาก A ไป B จะได้ว่า $r =$ ....

ตัวอย่าง 2.1.11 กำหนดให้ $A = \{2, 4\}$ และ $B = \{5, 7\}$

r_1 ={(2,5),(2,7)} เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r_2 ={(5,2),(5,4),(7,4)} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

r_3 ={(5,5),(5,7),(7,5)} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป B

ตัวอย่าง 2.1.12 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 4, 6\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ และ $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมดคือ $2^{4 \times 6} = 2^{24}$ ความสัมพันธ์

จำนวนความสัมพันธ์จาก B ไป C ทั้งหมดคือ ความสัมพันธ์

จำนวนความสัมพันธ์ใน A ทั้งหมดคือ ความสัมพันธ์

จำนวนความสัมพันธ์ใน C ทั้งหมดคือ ความสัมพันธ์

ฟังก์ชัน (Functions)

ในวิชาคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์รูปแบบหนึ่งที่เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาเรื่องอื่นๆ โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.13 ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ r ใดๆ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\text{ถ้า } (x,y) \in r \text{ และ } (x,z) \in r \text{ แล้ว } y = z$$

หรืออาจกล่าวว่า ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่สมาชิกในโดเมนแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ ความสัมพันธ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

การตรวจสอบความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1.กรณีที่ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ตรวจสอบโดยดูจากคู่อันดับแต่ละตัวโดยพิจารณาว่า คู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วต้องมีสมาชิกตัวหลังเหมือนกันด้วย ถ้าไม่เหมือนกันกับความสัมพันธ์ที่กำหนดก็จะไม่เป็นฟังก์ชัน หรืออาจจะกล่าวว่าฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ ทุกตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

2.กรณีที่ความสัมพันธ์อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

ตรวจสอบโดยพิจารณาว่าสมาชิกตัวหน้าตัวเดียวสามารถจับคู่กับตัวหลังได้เพียงตัวเดียวหรือไม่ ถ้าสามารถจับคู่ได้เพียงตัวเดียว ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้จะเป็นฟังก์ชัน ถ้าสามาถจับคู่ได้มากกว่า 1 ตัว ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้จะไม่เป็นฟังก์ชัน

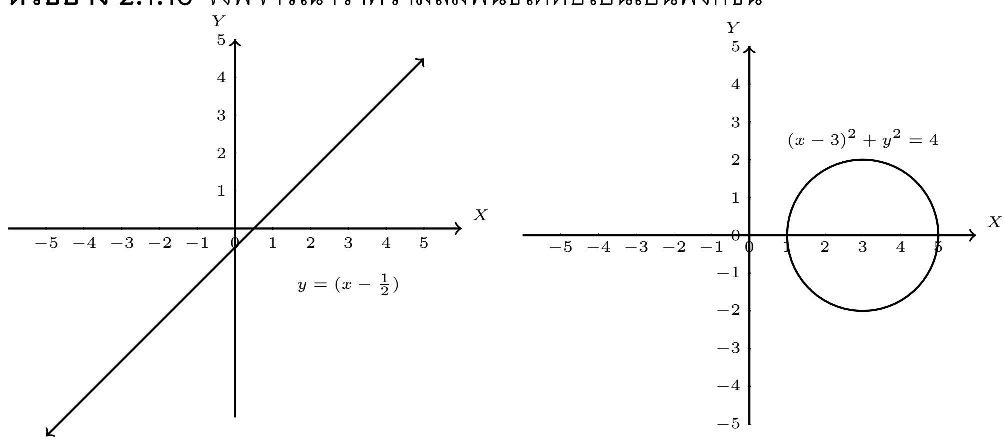
3.กรณีที่ความสัมพันธ์อยู่ในรูปกราฟ

ตรวจสอบโดยลากเส้นตรงขนานแกน Y ถ้าเส้นตรงตัดกราฟเพียงหนึ่งจุด แล้วความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน ถ้าเส้นตรงตัดกราฟเพียงมากกว่าหนึ่งจุด แล้วความสัมพันธ์นั้นจะไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2.1.14 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน
$r_1 = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$
$r_2 = \{(1,-1),(1,1),(2,4),(3,5)\}$

ตัวอย่าง 2.1.15 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน
$r_1 = \{(x,y)|y=2\}$
$r_2 = \{(x,y)|x=3\}$
$3.r_3 = \{(x,y)|x=y^2+1\}$

ตัวอย่าง 2.1.16 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน



แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้ $(2x+5, 4) = (10-3x, 2y)$ จงหาค่า x และ y

2. กำหนดให้ $(x^2+4, 2y-1) = (-4x, -2y-1)$ จงหาค่า x และ y

3. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $B = \{i, j, k\}$ จงหาค่า $n(A \times B)$

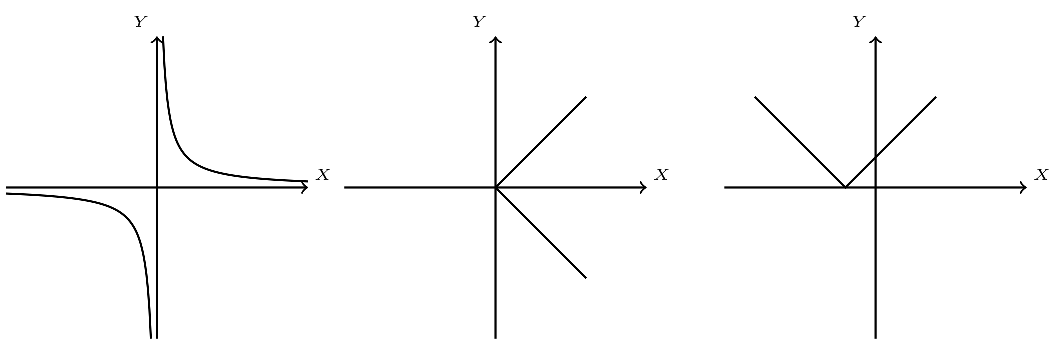
4. กำหนดให้ความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x - y \leq 3$ และ $2 \leq x \leq 4\}$ จงหาความสัมพันธ์ r ในรูปคู่อันดับ

5. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $r = \{(a, b) \in A \times A | a \leq b\}$ แล้วจำนวนสมาชิกในความสัมพันธ์ r เท่ากับเท่าไร

6. ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน
   1. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (3, 6)\}$
   2. $\{(0, 2), (2, 1), (3, 5), (5, 4)\}$
   3. $\{(-2, 2), (1, -1), (0, 2), (3, 7)\}$
   4. $\{(1, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$
   5. $\{(1, 2), (2, 3), (1, 5), (1, 6)\}$

7. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน
   1.$r_1 = \{(x, y) | y = 2x + 7\}$
   2.$r_2 = \{(x, y) | y^2 = \sqrt{4 - x^2}\}$
   3.$r_2 = \{(x, y) | x = y^2 - 1\}$

8. จากกราฟต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน



2.2 โดเมนและเรนจ์ (Domain and Range)

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง เราจะเรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในความสัมพันธ์ว่า**โดเมนของความสัมพันธ์** และเรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ว่า **เรนจ์ของความสัมพันธ์** ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.1 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
โดเมนของ r (domain of r) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r แทนด้วย

$$D_r = \{x|x \in A \wedge \exists y \in B, (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r (range of r) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r แทนด้วย

$$R_r = \{y|y \in B \wedge \exists x \in A, (x, y) \in r\}$$

วิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์

1.ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปเซตที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกหรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิกได้ เราจะหาโดเมนโดยพิจารณาสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ และหาเรนจ์โดยพิจารณาสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

2.ถ้าความสัมพันธ์ r อยู่ในรูปเซตที่เขียนแบบบอกเงื่อนไข

1.หาโดเมน โดยการจัด y ให้อยู่ในเทอมของ x แล้พิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้ และค่า x ที่ได้ทั้งหมดนี้คือ ค่าที่เป็นโดเมนของ r

2.หาเรนจ์ โดยการจัด x ให้อยู่ในเทอมของ y แล้พิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้ และค่า y ที่ได้ทั้งหมดนี้คือ ค่าที่เป็นเรนจ์ของ r

หลักเกณฑ์ที่ใช้ประกอบการหาโดเมนและเรนจ์

รูปแบบ	สิ่งที่ต้องพิจารณา
1.เศษส่วน $\frac{a}{b}$	$a \neq 0$
2.กรณฑ์อันดับคู่ $a = \sqrt[n]{b}$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนคู่บวก	$b \geq 0$ และ $a \geq 0$
3.กำลังคู่ $a^n = b$ เมื่อ a เป็นจำนวนคู่	$b \geq 0$
4.ค่าสัมบูรณ์ $\|a\| = b$	$b \geq 0$

3.ถ้าความสัมพันธ์อยู่ในรูปกราฟ

1. หาโดเมน โดยพิจารณาค่า x ทั้งหมดบนแกน x ที่ใช้ในการเขียนกราฟ
2. หาเรนจ์ โดยพิจารณาค่า y ทั้งหมดบนแกน y ที่ใช้ในการเขียนกราฟ

ตัวอย่าง 2.2.2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ โดยที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B คือ $r = \{(x, y) \in A \times B | y = 3x\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r
วิธีทำ จะได้ $r = \{(2, 6), (4, 12)\}$
ดังนั้น $D_r = \{2, 4\}$ และ $R_r = \{6, 12\}$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in R \times R | y = x^2 + 4\}$
วิธีทำ

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in R \times R | y = \dfrac{1}{3 - x}\}$
วิธีทำ

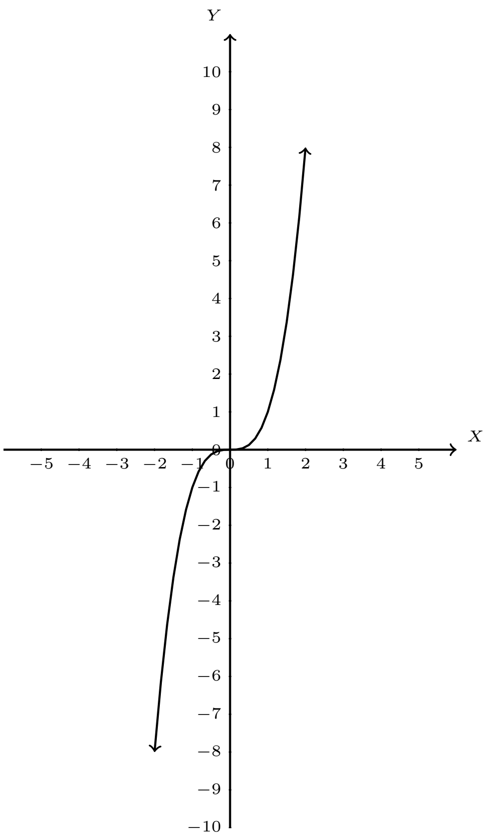
ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in R \times R | y = \sqrt{x-4}\}$
วิธีทำ

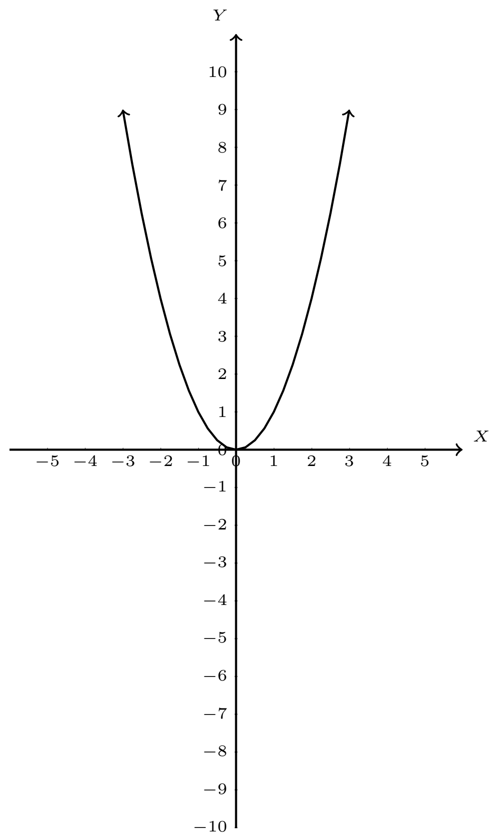
ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in R \times R | y = |x+5|\}$
วิธีทำ

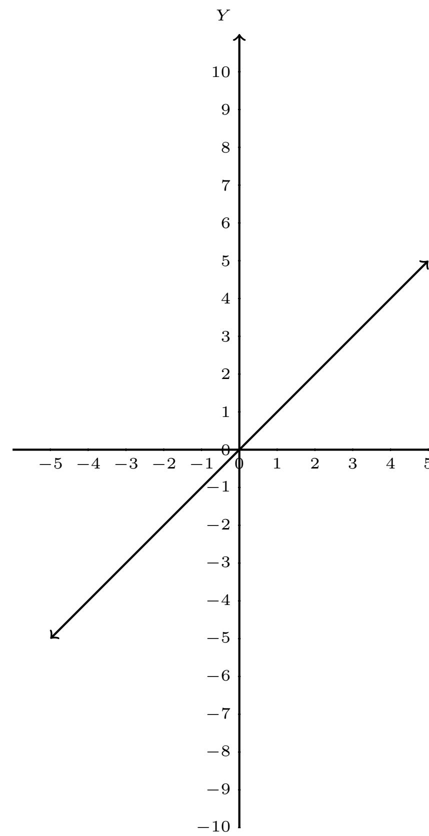
ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \{(x, y) \in R \times R | y = \dfrac{x}{x-2}\}$

วิธีทำ

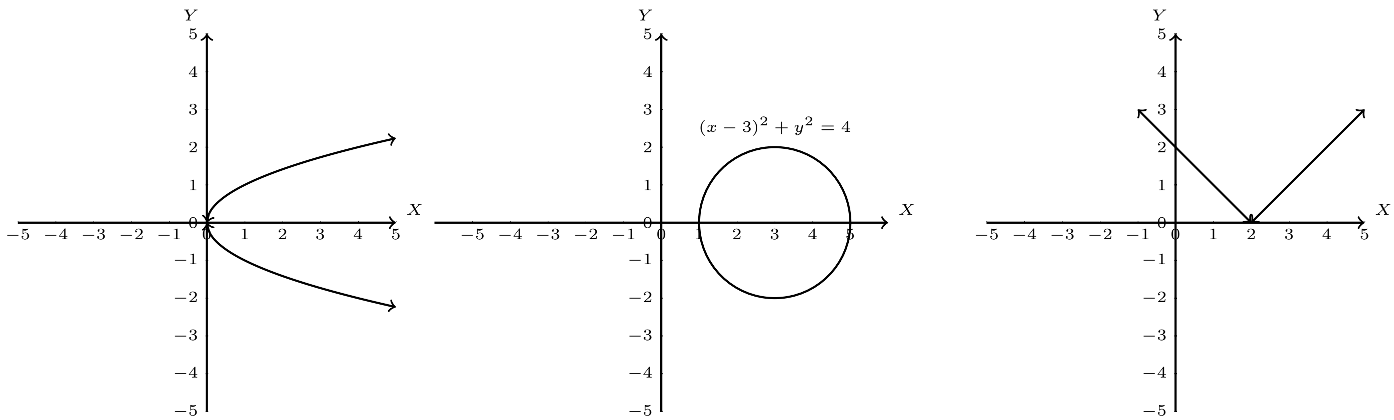
ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r ซึ่งกำหนดด้วยกราฟต่อไปนี้







ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r ซึ่งกำหนดด้วยกราฟต่อไปนี้



แบบฝึกหัด 2.2

1. จงเขียนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

   1.2 $\{(-1,0),(8,5),(2,4),(7,6)\}$

   1.3 $\{(2,2),(3,1),(4,6),(7,7),(8,8)\}$

   1.4 $\{(x,y)|x^2+y^2=4, x\in\mathbb{Z}, y\geq 0\}$

2. จงเขียนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $y=3x-1$

   2.2 $x=9$

   2.3 $y=|3x-1|+5$

   2.4 $y=\sqrt{x^2+9}$

   2.5 $y=\sqrt{x^2-9}$

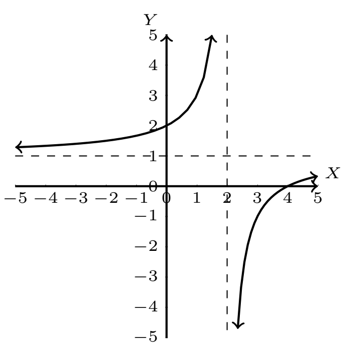
   2.6 $y=\dfrac{1}{x-3}$

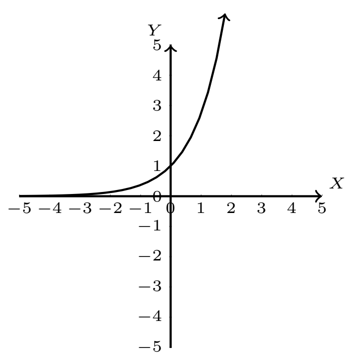
   2.7 $y=\sqrt{3-x}$

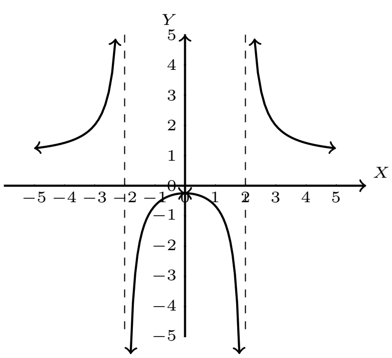
   2.8 $y=\frac{2}{\sqrt{3-x}}$

   2.9 $y=3+\dfrac{2}{5-x}$

3. จงเขียนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 

3.2 

3.3 

2.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite Functions)

ฟังก์ชันประกอบเป็นการกระทำตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันเป็นต้นไป โดยมีลักษณะเหมือนการนำฟังก์ชันนั้นมาเชื่อมต่อกัน

สมมุติให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C
เราสามารถสร้างฟังก์ชันจาก A ไป C ได้โดยเขียนแทนด้วย $gof(x) = g(f(x))$ จะสร้าง gof ได้ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f จะต้องเป็นสับเซตของโดเมน g

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย gof กำหนด $gof(x) = g(f(x))$ ซึ่ง $f(x) \in D_g$

ตัวอย่าง 2.3.2 กำหนด $f = \{(1,3),(3,2),(5,7),(7,8)\}$ และ $g = \{(2,a),(4,b),(6,c),(8,d)\}$
จงหา $gof(1), gof(3), gof(7)$ พร้อมทั้งหา gof และ fog

ตัวอย่าง 2.3.3 ถ้า $f(x) = x^4$ และ $g(x) = 5x + 1$ จงหา fog และ gof

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนด $f = \{(1,3),(2,4),(3,5),(7,8)\}4$ และ $g = \{(2,5),(3,6),(8,5),(4,1)\}$
   จงหา gof และ fog พร้อมทั้งหา $gof(1)$ และ $fog(4)$
2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{x+1}$ จงหา $fog(x)$ และ $gof(x)$
3. กำหนดให้ $f(x) = 2x^2$ และ $g(x) = x+2$ จงหา $fog(x)$ และ $gof(x)$
4. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ และ $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ จงหา $fog(x)$, $gof(x)$, $fof(x)$, และ $gog(x)$
5. กำหนดให้ $f(x) = 2x+3$ และ $g(x) = \dfrac{1}{2x}$ จงหา $fog(x)$, $gof(x)$, $fog(1)$, และ $gof(2)$

2.4 ฟังก์ชันตรรกยะ (The Rational Functions)

เราอาจจะเคยเห็น ฟังก์ชันเชิงเส้นที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม เมื่อเราหารฟังก์ชันเชิงเส้นด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นใดๆ ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ ฟังก์ชันตรรกยะ

บทนิยาม 2.4.1 ฟังก์ชันพหุนามกำลัง n(Polynomial Degree n)คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ เป็นจำนวนจริงเรียกว่าสัมประสิทธิ์ (coefficient) และ $a_n \neq 0$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ตัวนำ (leading coefficient) และ n เรียกว่าดีกรี เมื่อ $n = 0, 1, 2, ...$

บทนิยาม 2.4.2 ฟังก์ชันตรรกยะ(The Rational Functions)หมายถึงฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

เมื่อ $p(x), q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร x

ตัวอย่างเช่น $\frac{5(x-2)}{x^2+3}$, $\frac{x^3-2x}{x^2+x}$, $\frac{1}{x}$

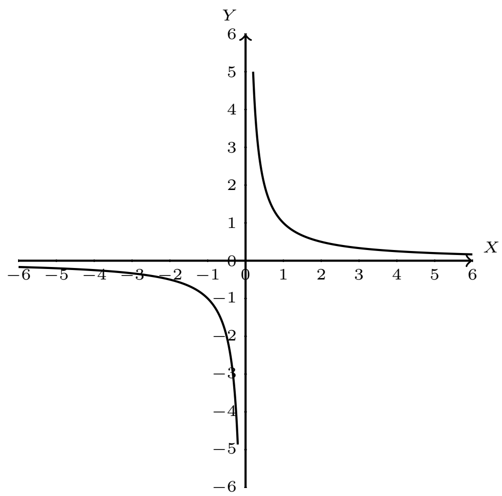
ฟังก์ชัน $\frac{1}{x}$ มีชื่อเรียกว่าฟังก์ชันส่วนกลับ (Reciprocal Function)

ฟังก์ชันตรรกยะมี 2 ชนิด คือ

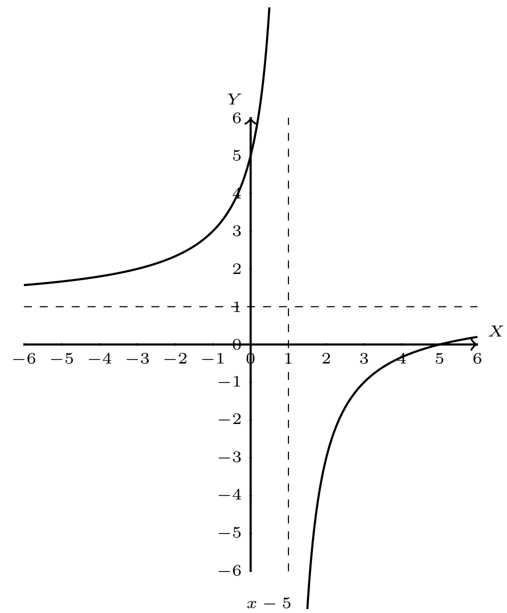
1.ฟังก์ชันตรรกยะแท้ หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะที่พหุนามดีกรีสูงสุดของตัวเศษน้อยกว่าพหุนามดีกรีสูงสุดของตัวส่วน เช่น $F_1(x) = \frac{x^2+2x-7}{x^4-2x^3+x+5}$

2.ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะที่พหุนามดีกรีสูงสุดของตัวเศษมากกว่าหรือเท่ากับพหุนามดีกรีสูงสุดของตัวส่วน เช่น $F_2(x) = \frac{x^4+2x-7}{x^4-2x^3+x+5}$ และ $F_3(x) = \frac{2x^3+x^2-6x+1}{x^2-x-4}$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันส่วนกลับและฟังก์ชันตรรกยะ



$y = \dfrac{1}{x}$



$y = \dfrac{x-5}{x-1}$

2.5 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Functions)

บทนิยาม 2.5.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่ง แล้วฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วย f^{-1}
คือฟังก์ชันที่ได้จากการสลับสมาชิกในคู่อันดับทั้งหมดใน
ดังนั้น $f^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in f\}$ ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

สมบัติของฟังก์ชันผกผัน ถ้าฟังก์ชันผกผัน f^{-1} มี จะได้ว่า

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. $D_f^{-1} = R_f$
3. $R_f^{-1} = D_f$

วิธีการหาอินเวอร์สเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ f มาให้

1.ถ้าความสัมพันธ์ f อยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก

f^{-1} สามารถหาได้โดยการสลับสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังของทุกคู่อันดับใน f เช่น
ถ้า $f = \{(0,1),(1,2),(3,3),(-1,4)\}$ แล้ว $f^{-1} = \{(1,0),(2,1),(3,3),(4,-1)\}$

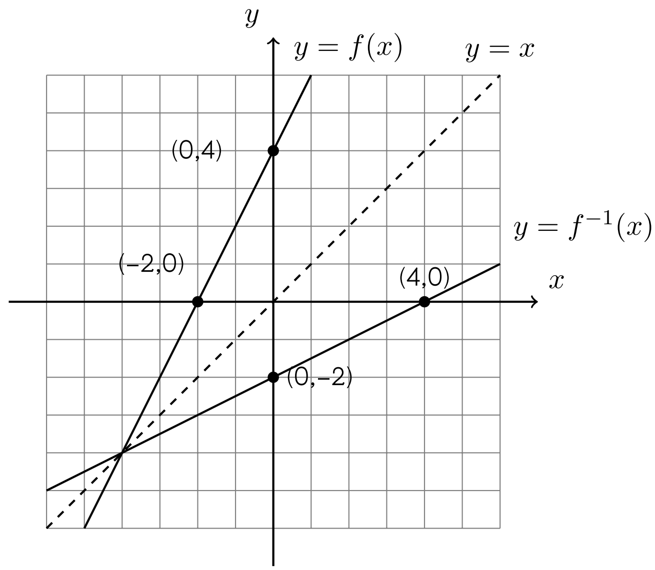
2.ถ้าความสัมพันธ์ f อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข

f^{-1} สามารถหาได้โดย เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x แล้วจัดรูปให้ y อยู่ในเทอมของ x
เช่น ถ้า $f(x) = \{(x,y) \in R \times R|y = x + 2\}$
แล้ว $f^{-1}(x) = \{(x,y) \in R \times R|x = y + 2\} = \{(x,y) \in R \times R|y = x - 2\}$

3.ถ้าความสัมพันธ์ f อยู่ในกราฟ

f^{-1} คือ กราฟที่สมมาตรกับกราฟของ f โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่าง 2.5.2 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 4$ และตรวจสอบว่า $(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$ หรือไม่



1. จะเห็นได้ว่า $f(x) = 2x + 4$ ผ่านจุด $(-2, 0)$ และ $(0, 4)$
ดังนั้น $f^{-1}(x)$ ผ่านจุด $(0, -2)$ และ $(4, 0)$

2\.

2.1 พิจารณาเส้นตรง $y = f^{-1}(x)$ มีความชันคือ $\dfrac{4-0}{0-2} = -2$
ดังนั้น $y = f^{-1}(x)$ มีสมการคือ $\dfrac{y-0}{x+2} = -2$
หรือ $f^{-1}(x) = -2(x+2)$

2.2 เนื่องจาก $f(x) = y$ ดังนั้น $y = 2x + 4$
แล้ว $f^{-1}(x)$

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหา $f^{-1}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

   1.2 $f(x) = \{(-1,0),(8,5),(2,4),(7,6)\}$

   1.3 $f(x) = \{(2,2),(3,1),(4,6),(7,7),(8,8)\}$

   1.4 $f(x) = \{(2,5),(3,1),(4,5),(7,8),(8,7)\}$

2. สำหรับทุกฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหา
   ก. หา f^{-1}
   ข. วาดกราฟ $f(x)$, $f^{-1}(x)$ และ $y = x$ ให้อยู่บนระนาบเดียวกัน
   ค. จงแสดงว่า $fof^{-1}(x) = f^{-1}of(x) = x$

   2.1 $f(x) = 2x$

   2.2 $f(x) = 3x + 1$

   2.3 $f(x) = \dfrac{x+2}{4}$

   2.4 $f(x) = \dfrac{3-2x}{4}$

   2.5 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$

   2.6 $f(x) = \dfrac{3+2x}{2}$

บทที่ 3

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและลอการิทึม (Exponential and Logarithmic functions)

3.1 เลขยกกำลัง (Power)

บทนิยาม 3.1.1 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนนับ แล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n \text{ จำนวน}}$$

เรียก a ว่า**ฐาน (base)** ของเลขยกกำลัง และเรียก n ว่า**เลขชี้กำลัง (exponent/index)**
สำหรับ $a \neq 0$ นิยามให้ $a^0 = 1$ และ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1. 2^3
2. 3^2
3. 5^{-2}
4. $\frac{1}{3^{-3}}$
5. $(2^3)^2$
6. $(-1)^4$
7. $(-1)^{-1}$
8. $2^2 \times 2^3$
9. $3^2 \times 2^2$
10. $\frac{3^7}{3^5}$
11. $\frac{4^5}{2^5}$
12. $\frac{5^{-4}}{5^{-7}}$

ตัวอย่างเลขยกกำลัง a^n

$a\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249

$n\backslash a$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
3	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000

ทฤษฎีบท 3.1.3 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง n และ m เป็นจำนวนนับ แล้ว

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ เมื่อ $a \neq 0$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังโดยที่เลขชี้กำลังไม่ติดลบ

1. $2^3 \cdot 2^7$
2. $2^4 \cdot 4^5 \cdot 8^2$
3. $27 \cdot 81^2 \cdot 3^{-2}$
4. $\frac{625(25)^2}{5^{-4}}$
5. $(7^3)^5 \cdot 343 \cdot \frac{1}{49^5}$
6. $(-2)^{-4} \cdot 64^5 \cdot \frac{2}{32^6}$
7. $((125)^{-1} \cdot (25^{-2})^3)^{-2}$
8. $81^{-2}\left(\frac{9^5 \cdot 81^2}{27^{-5}}\right)^7$

บทนิยาม 3.1.5 ให้ $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{5}$
3. $\sqrt[5]{32}$
4. $\sqrt[6]{100}$

ตัวอย่าง 3.1.7 จงเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ในรูปกรณฑ์

1. $5^{\frac{1}{2}}$
2. $3^{\frac{1}{3}}$
3. $16^{\frac{1}{4}}$
4. $35^{\frac{1}{5}}$

ตัวอย่าง 3.1.8 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

1. $\left(\frac{3^{n+1}+3^n}{27^n}\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $\left(\frac{6^n+2^{n+1}}{9^n+2\cdot 3^n}\right)^{\frac{1}{2}}$
2. $\left(\frac{5^{2n}+5^{n+1}}{5^n+5}\right)^{\frac{1}{n}}$
4. $\sqrt{\frac{9^n+2(6^n)+4^n}{9^n}}$

ตัวอย่าง 3.1.9 จงทำส่วนไม่ให้ติดกรณฑ์

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$

4. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

ตัวอย่าง 3.1.10 จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

1. $\sqrt{x}=2$

2. $\sqrt[3]{x+1}=3$

3. $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$

4. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1.1 3^4
1.2 $(-2)^5$
1.3 $(-1)^{-21}$
1.4 $\frac{1}{(-3)^{-2}}$
1.5 $\frac{1}{(-1)^{-1}} + \frac{1}{(-1)^2} + (-1)^3$
1.6 $2^7(3^2)\frac{1}{(-6)^2}$
1.7 $\sqrt{625} + \sqrt{81}$
1.8 $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{32}$
1.9 $64^{\frac{1}{3}} + 128^{-\frac{1}{7}}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลังที่ไม่ติดลบ

2.1 128^4
2.2 125^{-3}
2.3 $27(81^3)$
2.4 $\frac{343}{(-7)^{-3}}$
2.5 $\frac{100}{(25)^{-1}\cdot 2^2}$
2.6 $3^2(27^{0.5})\frac{1}{729}$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปอย่างง่าย เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

3.1 $\frac{3^n+9^n}{1+3^n}$
3.2 $\frac{2^{n+1}-6^n}{2^n}$
3.3 $\left(\frac{15^{n+1}-9^n}{10^n-6^n}\right)^{\frac{1}{n}}$
3.4 $\frac{27^n+27^{-n}}{3^n+3^{-n}}$
3.5 $\frac{4^n+2^n-2}{2^n+2}$
3.6 $\frac{9^n+2(6^n)+4^n}{3^n+2^n}$

4. จงทำส่วนไม่ให้ติดกรณฑ์

4.1 $\frac{1}{\sqrt{5}}$
4.2 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
4.3 $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$
4.4 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}}$
4.5 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
4.6 $\frac{3}{\sqrt{18}+\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

5. จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

5.1 $\sqrt{x} = 3$
5.2 $\sqrt{2x+1} = 3$
5.3 $\sqrt{\sqrt[3]{x^2-1}+2} = 2$
5.4 $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x+5}$
5.5 $\frac{6}{\sqrt{x+1}} = x$
5.6 $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+4} = 1$

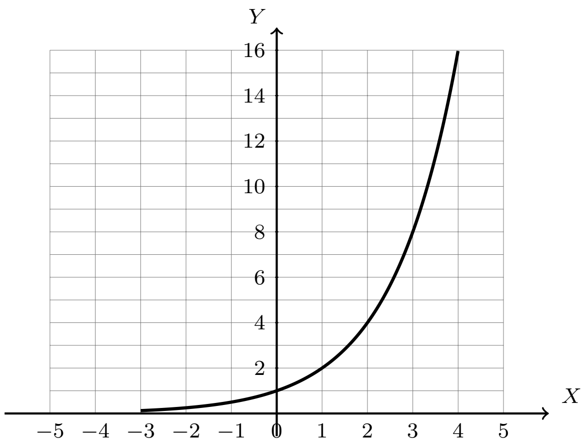
6. ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนนับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่า **ถูกหรือผิด** พร้อมให้เหตุผลประกอบ

6.1 $\sqrt{x^2} = x$
6.2 $\sqrt{(-x)^2} = x$
6.3 $\sqrt[3]{x^3} = x$
6.4 $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n}$
6.5 $(x^{-1})^{-1} = x$
6.6 $x^0 = 1$
6.7 $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
6.8 $\sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$
6.9 $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
6.10 $(x+y)^n = x^n + y^n$

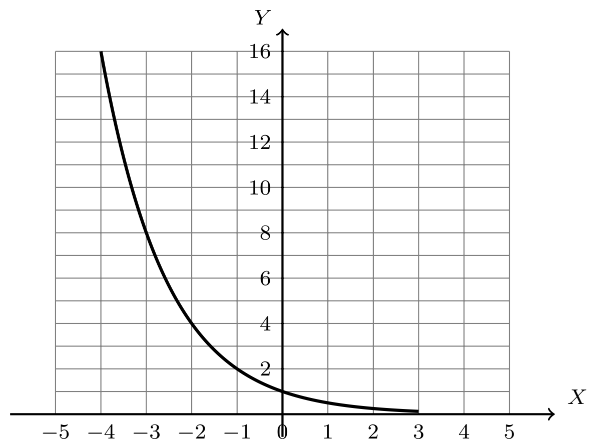
3.2 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

บทนิยาม 3.2.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) คือ

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = a^x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$$



$y = 2^x$



$y = (\frac{1}{2})^x$

สรุปได้ว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังมี โดเมนเท่ากับ $\mathbb{R}$ และ เรนจ์เท่ากับ $(0, \infty)$

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว

- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function)
- ถ้า $a > 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)

ตัวอย่าง 3.2.3 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

1. $y = 3^x$
2. $y = 5^{-x}$
3. $y = (\frac{1}{3})^{-x}$
4. $y = (\sin 30°)^{2x}$
5. π^x
6. $(\sqrt{2} - 1)^{-x}$

บทนิยาม 3.2.4 ค่าคงตัวเลขชี้กำลัง (exponential constant) หรือ**จำนวนออยเลอร์** (Euler's number) เขียนแทนด้วย e นิยามโดย

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e เป็นจำนวนอตรรกยะ คำนวณได้จากอนุกรมอนันต์

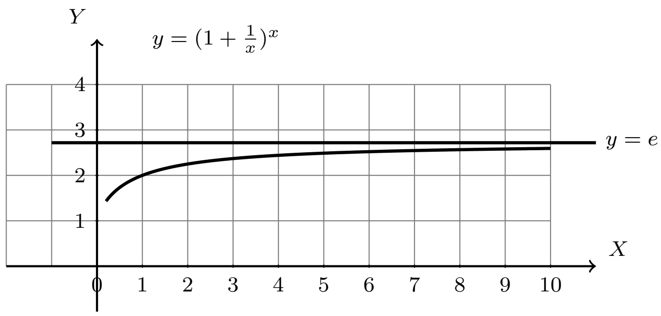
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$$

หรือมีค่าประมาณเป็น

$$e = 2.71828182845904523536028747135 27...$$

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่มีฐานเป็น e จะเขียนแทนด้วย $y = e^x$ หรือ $y = \exp(x)$

กราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่า e

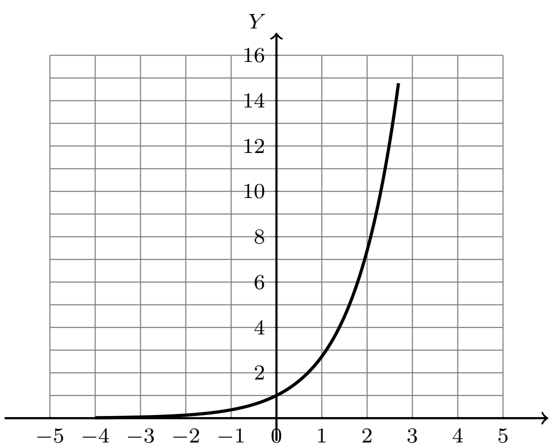


ตัวอย่าง 3.2.5 จากสัญญาลักษณ์ต่อไปนี้จงเขียนในรูปเลขยกกำลัง

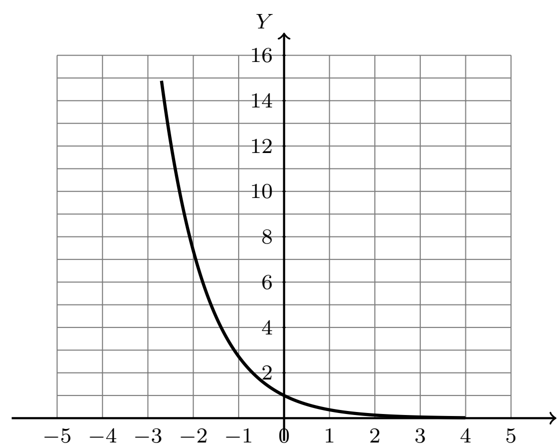
1. $\exp(x)$
2. $\exp(1-x)$
3. $x\exp(-x^2)$
4. $-\exp(-\frac{1}{x})$

ตัวอย่าง 3.2.6 จงจับคู่ฟังก์ชันกับกราฟต่อไปให้ถูกต้อง

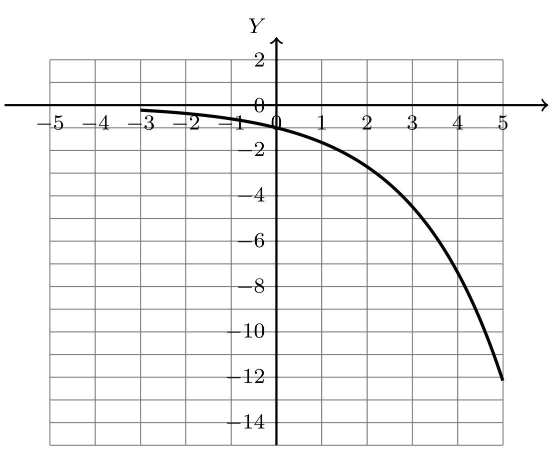
1. $y = e^x$
2. $y = e^{-x}$
3. $y = -e^{0.5x}$
4. $y = 1 - e^{-x}$



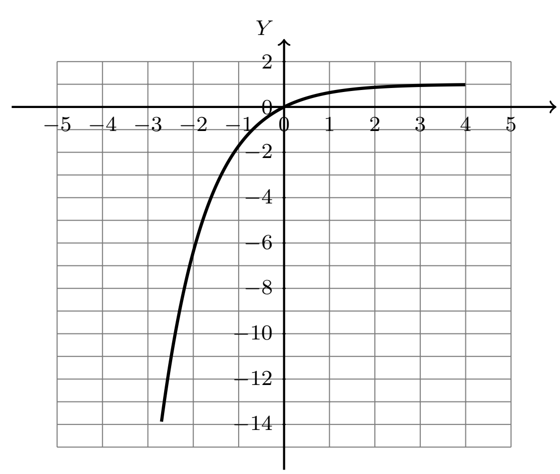
(ก)



(ค)



(ข)



(ง)

ทฤษฎีบท 3.2.7 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว

$$a^x = a^y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = y$$

ตัวอย่าง 3.2.8 จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

1. $2^x = 16$
2. $27^x = 9$
3. $\sqrt{2}^{x-1} = 8$
4. $5^{x+1} + 5^x = 30$

ทฤษฎีบท 3.2.9 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว

- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^x < a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x > y$
- ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^x < a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $2^x < 8$
2. $9^{2x} \geq 3$
3. $\frac{5}{5^x} > 125$
4. $(\sqrt{2} - 1)^x > (\sqrt{2} + 1)$

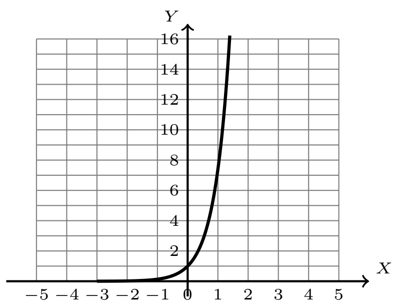
แบบฝึกหัด 3.2

1. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

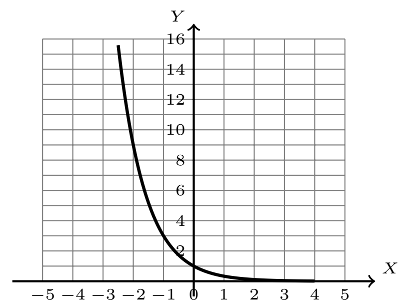
1.1 $y = 5^x$	1.4 $y = \frac{1}{4^{-x}}$	1.7 $y = (\pi - \sqrt{3})^{-x}$
1.2 $y = (0.99)^x$	1.5 $y = \pi^{-x}$	1.8 $y = \exp(-2x)$
1.3 $y = 3^{-2x}$	1.6 $y = (\tan 44°)^x$	1.9 $y = e^{ex}$

2. จงจับคู่ฟังก์ชันกับกราฟต่อไปให้ถูกต้อง

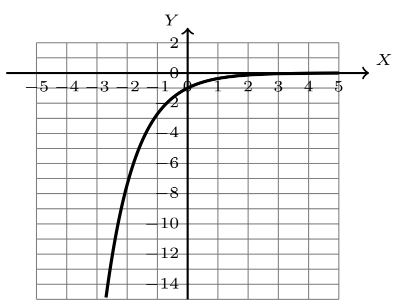
2.1 $y = 3^{-x}$ 2.2 $y = \exp(2x)$ 2.3 $y = -e^x$ 2.4 $y = 1 - 2^{-x}$



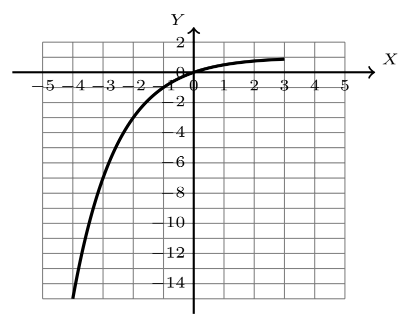
(ก)



(ค)



(ข)



(ง)

3. จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

3.1 $2^x = 64$	3.4 $3^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{243}$	3.7 $(\sqrt{\lvert x\rvert})^x = x^2$
3.2 $27^{2x} = \sqrt{3}$	3.5 $2^{x+2} + x^{x+1} + 2^x = 56$	3.8 $x^x = 1$
3.3 $25^{-x} = 125$	3.6 $4^x - 3(2^x) + 2 = 0$	3.9 $x^{-x} = 1$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

4.1 $3^x > 9$	4.3 $27^{-x} < \sqrt{243}$	4.5 $(\sqrt{2} - 1)^x > 0$
4.2 $8^{2x} \leq 4$	4.4 $e^x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$	4.6 $9^x - 4(3^x) + 3 < 0$

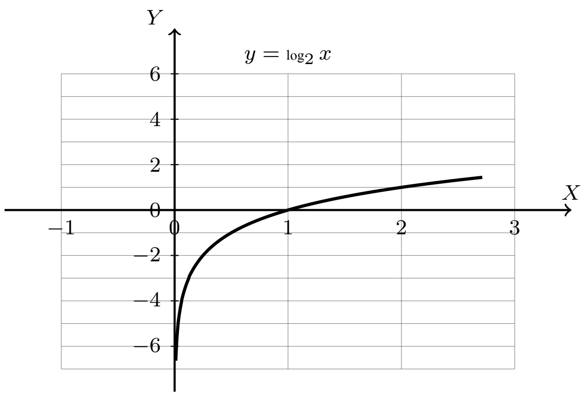
3.3 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

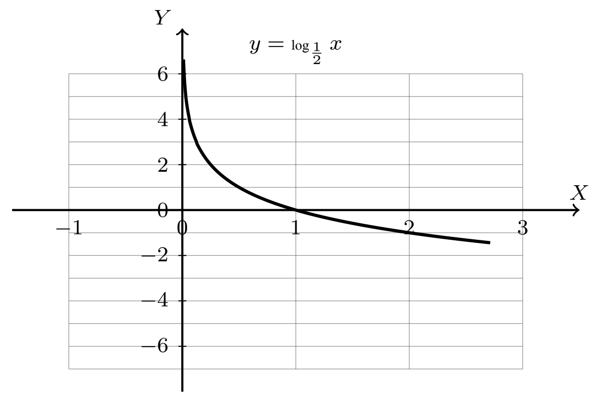
บทนิยาม 3.3.1 ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x=a^y \text{ เมื่อ } a>0 \text{ และ } a\neq 1\}$$

เราจะเขียนได้ดังนี้

$$x=a^y \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad y=\log_a x$$





สรุปได้ว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังมี โดเมนเท่ากับ $(0,\infty)$ และ เรนจ์เท่ากับ $\mathbb{R}$
สำหรับ $a=10$ เราจะเรียกว่าลอการิทึมฐานสามัญ (common logarithm) เขียนแทนด้วย $\log_{10} x=\log x$

ทฤษฎีบท 3.3.2 ให้ $a>0$ และ $a\neq 1$ แล้ว

- ถ้า $0<a<1$ แล้ว ฟังก์ชัน $f(x)=\log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด
- ถ้า $a>1$ แล้ว ฟังก์ชัน $f(x)=\log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวอย่าง 3.3.3 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

1. $y=\log_3 x$ 2. $y=\log_{10} x$ 3. $y=\log_{0.3} x$ 4. $y=\log_{3^{-1}} x$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงเปลี่ยนฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันลอการิทึม

1. $y=5^x$ 2. $a=3^5$ 3. $32=2^5$ 4. $a^1=a$

ตัวอย่าง 3.3.5 จงเปลี่ยนฟังก์ชันลอการิทึ่มเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

1. $y=\log_7 x$ 2. $y=\log x$ 3. $4=\log_2 16$ 4. $0=\log_a 1$

ทฤษฎีบท 3.3.6 ให้ $a, b, c \in (0,1) \cup (1,\infty)$ และ M, N เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

1. $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$
2. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
3. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
4. $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$
5. $\log_{a^\beta} M = \frac{1}{\beta} \log_a M$
6. $a^{\log_a M} = M$
7. $a^{\log_b M} = M^{\log_b a}$
8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b a}$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาค่าลอการิทึมต่อไปนี้

1. $\log_2 32$
2. $\log 100$
3. $\log 5 + \log 2$
4. $\log_6 42 - \log_6 7$
5. $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 16$
6. $\log_{0.5} \sqrt{8}$
7. $4^{\log_2 9}$
8. $\frac{1}{\log_5 10} + \frac{1}{\log_{20} 10}$
9. $\log_2\big(\log_3\big(\log_5\big(\log_2 2^{25}\big) + 1\big)\big)$
10. $\frac{\log 343 - \log 125}{2\log 7 - \log 25}$

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$$\log_a x = \log_a y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = y$$

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_x 4 = 2$
3. $\log x^2 = 2$
4. $\log_2 x = 9 \log_x 2$

ทฤษฎีบท 3.3.10 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\log_a x < \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x > y$
- ถ้า $a > 1$ แล้ว $\log_a x < \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$

ตัวอย่าง 3.3.11 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $\log x > 1$
2. $\log_2 x \leq -1$
3. $\log x + \log(x - 3) > 1$
4. $\log_{0.5}(x + 2) - \log_{0.5}(x - 1) < -1$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด

   1.1 $y = \log_5 x$ 1.2 $y = \log x$ 1.3 $y = \log_{0.99} x$ 1.4 $y = \log_{\pi^{-2}} x$

2. จงเปลี่ยนฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันลอการิทึม

   2.1 $y = 7^x$ 2.2 $9 = 3^2$ 2.3 $64 = 4^3$ 2.4 $a^x = z$

3. จงเปลี่ยนฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

   3.1 $y = \log_6 x$ 3.2 $3 = \log x$ 3.3 $-1 = \log_3 z$ 3.4 $-5 = \log_2 \frac{1}{32}$

4. จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

   4.1 $\log_4 x = 2$

   4.2 $\log 1000 = x$

   4.3 $\log_2 \frac{1}{x} = 3$

   4.4 $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

   4.5 $\log_3 x - \log_3 x^2 = -1$

   4.6 $x^{\log_4 3} = 27$

5. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

   5.1 $\log_3 x > 2$

   5.2 $\log x \leq -1$

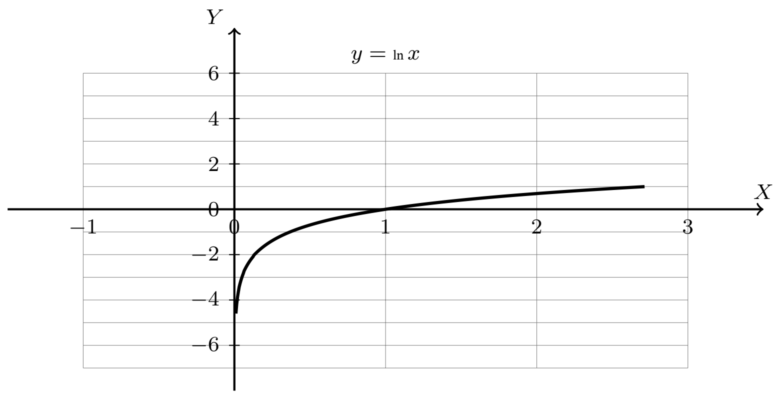
   5.3 $\log_6 x + \log_6(x-1) > 1$

   5.4 $4^{\log_3(\log x)} < 16$

3.4 ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithm)

บทนิยาม 3.4.1 ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) หรือ**ลอการิทึมเนเปีย** (Naperian logarithm) คือลอการิทึมที่มีฐานเป็นค่า e เขียนแทนด้วย

$$\ln x = \log_e x$$



เนื่องจาก $e > 1$ ทำให้ได้ว่าฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $\ln e = 1$ และ $\ln 1 = 0$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\ln e^{x^2}$

4. $e^{\ln x}$

2. $3 \ln \frac{1}{e^x}$

5. $e^{-\ln x}$

3. $\ln\left(\ln e^e\right)$

6. $(\sqrt{e})^{\ln x}$

ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

1. $e^x = 2$
2. $2^x = 3$
3. $\ln x = -2$
4. $\ln x = \ln(x^2 - 2)$
5. $e^{2x} - 3(e^x) + 2 = 0$
6. $e^{x^2+x} - e^x - e^{x^2+1} + e = 0$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $e^x > 2^{x+1}$
2. $e^{2x} \leq 5(e^x) - 6$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1.1 $\ln e^5$

1.2 $\ln e^{3x}$

1.3 $\frac{x}{\ln e^{-x}}$

1.4 $\ln \frac{1}{e^{x+2}}$

1.5 $e^{-2\ln x}$

1.6 $e^{-\ln|\cos x|}$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\ln e + \ln e^2 + \ln e^3 + \ln e^4 + \ldots + \ln e^{100}$

2.2 $\ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \ldots + \ln(\tan 89^\circ)$

3. จงหาค่า x ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

3.1 $e^x = 3$

3.2 $3^x = 2$

3.3 $\ln x = -1$

3.4 $\ln x = \ln(x^2 - 6)$

3.5 $e^{2x} - 7(e^x) + 12 = 0$

3.6 $4^x - 5(2^x) = 6$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

4.1 $e^x > 3$

4.2 $e^{2x+1} < 2^{x-1}$

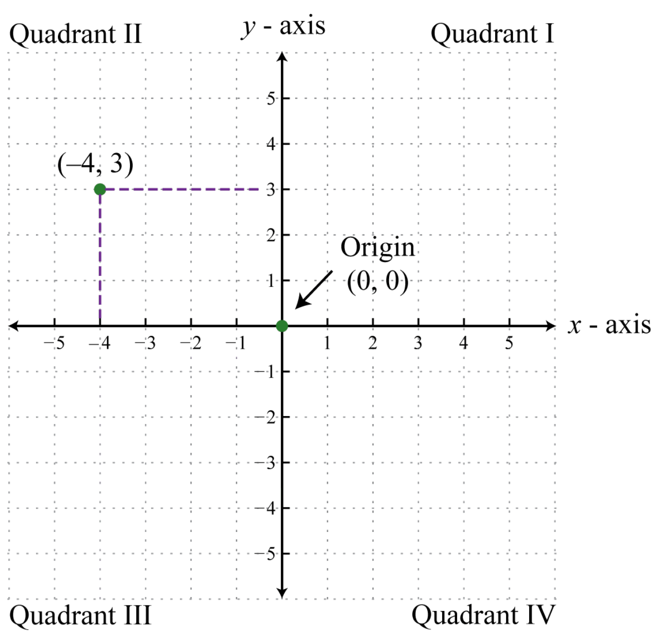
4.3 $e^{4x} - e^{2x} \leq 2$

บทที่ 4

เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytical Geometry)

นัก คณิตศาสตร์ ที่ วาง รากฐาน ทาง เรขาคณิตวิเคราะห์ คือ **เรนเน เดส์การ์ตส์** (René Descartes, 1596 – 1650, France) เขาเป็นผู้คิดค้น**ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian system)** เมื่อรูปเรขาคณิตต่าง ๆ สามารถเขียนบนระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ทำให้เราสามารถวิเคราะห์ส่วนต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น และยังเป็นการให้เหตุผลที่รัดกรุม เช่นการหาพื้นที่ต่างๆ อาทิพื้นที่รูปวงรีซึ่งสามารถหาสูตรพื้นที่ได้โดยใช้แคลคูลัส ทำให้ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียนเป็นรากฐานของการพัฒนาด้านแคลคูลัส เดส์การ์ตส์ได้รับการยกย่องให้เป็นบุคคลที่สำคัญที่สุดคนหนึ่งในประวัติศาสตร์ตะวันตกสมัยใหม่

รูปที่ 4.1: René Descartes

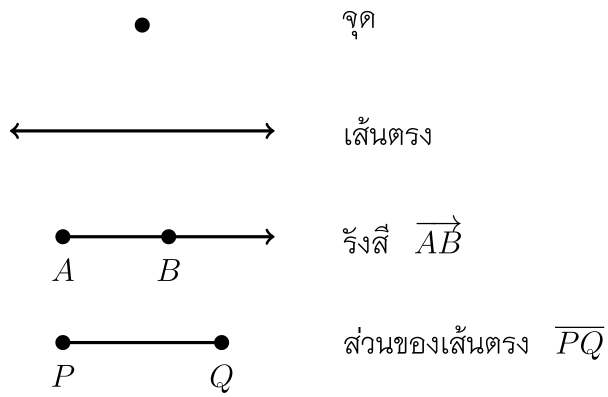


ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน

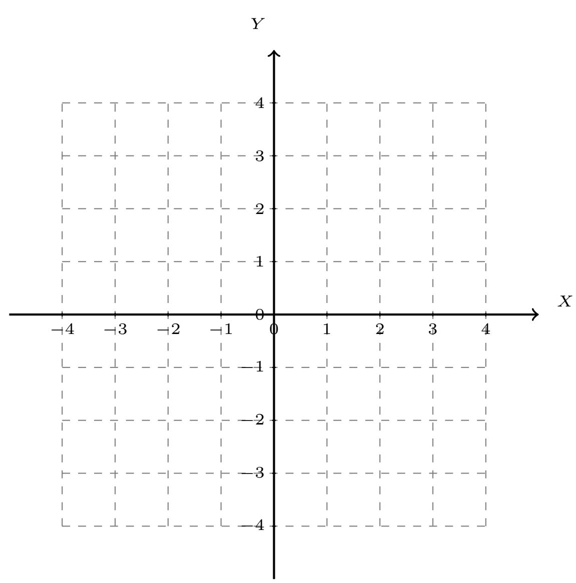
4.1 จุดและเส้นตรง (Point and Line)

คำต่อไปนี้เป็น**คำอนิยาม (undefined term)** ในทางคณิตศาสตร์
แต่ให้ความหมายกว้างๆพอสังเขปได้ดังนี้

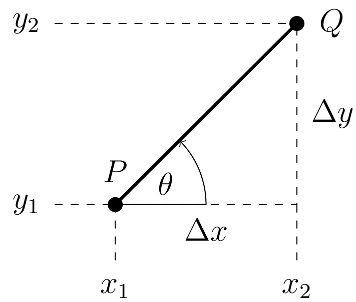
1. **จุด (Point)** คือตำแหน่งบนปริภูมิ (space) ที่แน่นอน ไม่มีความกว้าง ความยาว ความสูง ไม่มีมิติ (dimension)
2. **เส้นตรง (Line)** คือเส้นโค้งในแนวตรงที่สมบูรณ์ มีความยาวเป็นอนันต์ ไม่มีความกว้าง และมีจุดบนเส้นตรงเป็นจำนวนอนันต์
3. **รังสี (Ray)** คือส่วนของเส้นตรงที่มีเริ่มต้นที่จุด ๆ หนึ่ง แล้วต่อความยาวออกไปในทิศทางหนึ่งโดยไม่สิ้นสุด
4. **ส่วนของเส้นตรง (Line segment)** คือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดปลายสองจุด ซึ่งมีความยาวจำกัด และมีตำแหน่งของจุดทุกจุดบนเส้นตรงนั้น



ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนดให้ $A(1,3)$, $B(-3,4)$, $C(-2,-3)$ และ $D(3,-1)$ จงวาด (ก) เส้นตรงที่ผ่าน A และ C (ข) ส่วนของเส้นตรง $\overline{CB}$ และ (ค) รังสี $\overrightarrow{AD}$



บทนิยาม 4.1.2 ให้จุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ



ระยะทาง (distance) ระหว่างจุด P และ Q คือความยาวของส่วนของเส้นตรง $\overline{PQ}$ คือ

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

ความชัน (slope) ของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ คือค่าของแทนเจนต์ของมุมที่วัดแบบทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise) จากแกน X ไปยัง $\overline{PQ}$ คือ

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \qquad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

จุดกึ่งกลาง (midpoint) ของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ คือจุดที่แบ่ง $\overline{PQ}$ ออกเป็นสองส่วนด้วยความยาวเท่า ๆ กัน

ทฤษฎีบท 4.1.3 ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ จะได้ว่าจุดกึ่งกลาง M ของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ คือ

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

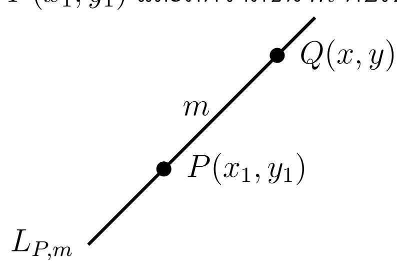
ตัวอย่าง 4.1.4 จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาระหว่างจุด $P(1,-3)$ และ $Q(4,1)$

2. จงหาความชันของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ เมื่อ $P(-2,-1)$ และ $Q(5,-3)$

3. จงหาระหว่างจุด $A(-2,4)$ และจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ เมื่อ $P(-2,5)$ และ $Q(6,-3)$

บทนิยาม 4.1.5 เส้นตรง (Line หรือ Straight Line) L ที่ผ่านจุด $P(x_1,y_1)$ และมีความชัน m คือเซตของจุด Q ซึ่ง



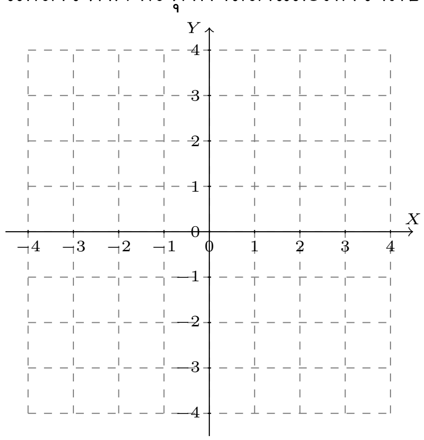
$L_{P,m} = \{(x,y)\ :\ y -$

ส่วนของเส้น $\overline{PQ}$ มีความชันเท่ากับ m เขียนแทนด้วย $L_{P,m}$ นั้นคือ

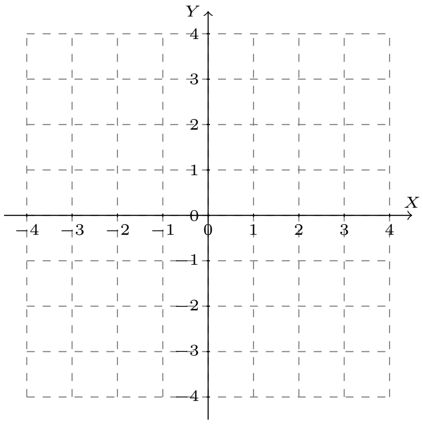
เรียก $y - y_1 = m(x - x_1)$ ว่า **สมการของเส้นตรง** $L_{P,m}$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาสมการเส้นตรงต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ

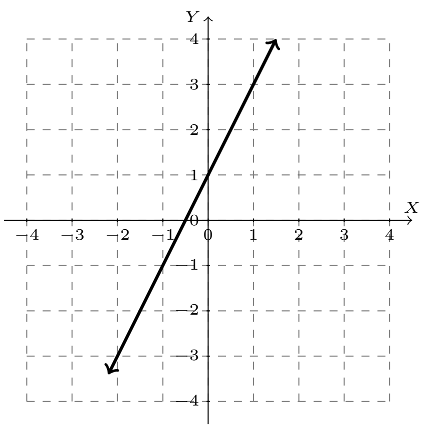
1. เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและมีความชันเท่ากับ 1

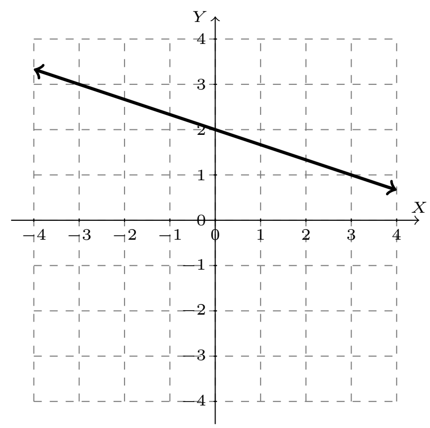


2. เส้นตรงที่ผ่าน $(1,0)$ และ $(-1,4)$



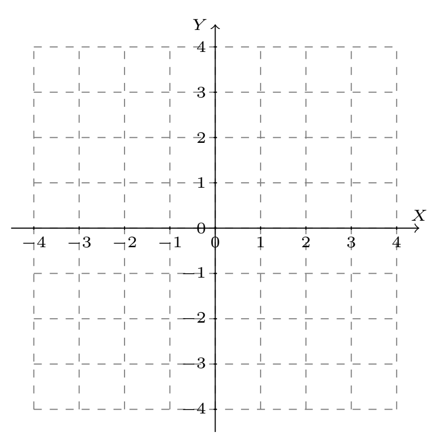
ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาสมการของเส้นตรงต่อไปนี้

1. 

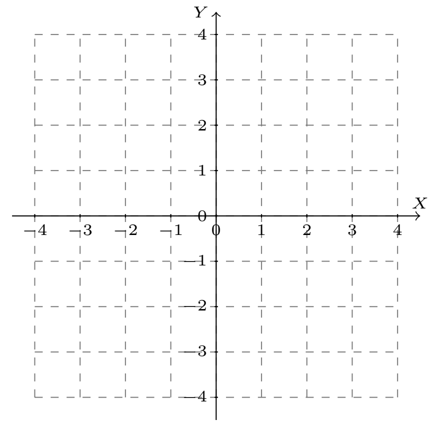
2. 

ตัวอย่าง 4.1.8 จงเขียนกราฟของเส้นตรงต่อไปนี้

1. $x + y = 2$



2. $3x - 4y = 12$



บทนิยาม 4.1.9 กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัว

เส้นตรงแนวดิ่ง (vertical line) คือเซตของจุดที่มีค่าบนแกน X คงที่ หรือ

$$\{(a, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงแนวดิ่งคือ $x = a$

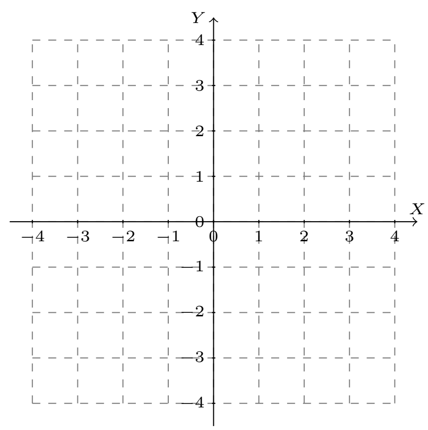
เส้นตรงแนวนอน (horizontal line) คือเซตของจุดที่มีค่าบนแกน Y คงที่ หรือ

$$\{(x, b) : x \in \mathbb{R}\}$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงแนวนอนคือ $y = b$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงหาสมการเส้นตรงต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟ

1. เส้นตรงแนวดิ่งที่ผ่านจุด $(2, 3)$
2. เส้นตรงแนวนอนที่ผ่านจุด $(1, -3)$



จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$ สามารถจัดรูปใหม่เรียกว่าสมการใน**รูปความชันจุดตัดแกน** (Slope–intercept form) ดังนี้

$$y = mx + c$$

เมื่อ m คือความชัน และ $c = y_1 - mx_1$ คือระยะตัดแกน Y

ให้ A และ B เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน **รูปแบบทั่วไป** (General Form) ของสมการเส้นตรงคือ

$$Ax + By + C = 0$$

ถ้า $A \neq 0$ เราจะได้ว่าความชัน $m = -\frac{B}{A}$ และระยะตัดแกน Y คือ $-\frac{C}{A}$ และถ้า $A = 0$ จะเป็นเส้นตรงแนวนอนที่มีสมการคือ $y = -\frac{C}{B}$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงหาความชัน และระยะตัดแกน Y ของสมการเส้นตรงต่อไปนี้ โดยคำตอบในตารางที่กำหนดให้

สมการเส้นตรง	ความชัน	ระยะตัดแกน Y
$y = 3x + 2$		
$3x - 1 = 2y$		
$5x - 2y = 10$		
$\frac{1}{3}(x-4) = \frac{3}{2}(y-1)$		

บทนิยาม 4.1.12 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรง

1. ถ้า $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ เราจะกล่าวว่า L_1 และ L_2 **ขนานกัน (parallel)**
2. ถ้า $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ จะมีจุด P ซึ่ง $P \in L_1 \cap L_2$ เราจะเรียกจุด P ว่า**จุดตัด (intersection point)** ของ L_1 และ L_2

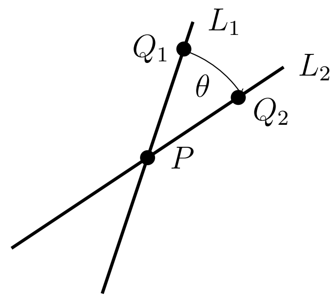
ข้อสังเกต จากบทนิยามสรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นถ้าไม่ขนานกันย่อมตัดกันเสมอ

ทฤษฎีบท 4.1.13 ถ้า L_1 และ L_2 มีจุดตัดมากกว่าหนึ่งจุด เราจะได้ว่า $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$ หรือกล่าวได้ว่าเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.1.14 จงพิจารณาเส้นตรงแต่ละเส้นต่อไปนี้ว่า ขนานกัน ตัดกันเพียงหนึ่งจุด หรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน

$$L_1 : \ y = 3x + 1 \qquad L_2 : \ 6x - 2y = -3 \qquad L_3 : \ 2y - 6x = 2 \qquad L_4 : \ 3y - 6x = 6$$

บทนิยาม 4.1.15 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรง **มุมระหว่างเส้นตรง (Angle between lines)** นิยามดังนี้



1. ถ้า L_1 และ L_2 ขนานกัน แล้วมุมระหว่างเส้นตรงเท่ากับ**ศูนย์**

2. ถ้า L_1 และ L_2 ไม่ขนานกัน แล้วให้ $P \in L_1 \cap L_2$ มุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 คือมุมที่เล็กที่สุดที่วัดได้จาก

$$\theta = Q_1\hat{P}Q_2$$

   เมื่อ $Q_1 \in L_1$ และ $Q_2 \in L_2$ ซึ่ง $Q_1 \neq P$ และ $Q_2 \neq P$

ทฤษฎีบท 4.1.16 ให้ θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ แล้ว

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

บทแทรก 4.1.17 มุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 เท่ากับ 90° ก็ต่อเมื่อ

$$m_1 m_2 = -1$$

เราจะกล่าวว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 **ตั้งฉากกัน (orthogonal)**

ตัวอย่าง 4.1.18 จงหามุมระหว่างเส้นตรงต่อไปนี้

1. $2y = x + 5$ และ $3y + x = 7$
2. $2x + 5y = 10$ และ $5x - 2y = 12$

ตัวอย่าง 4.1.19 จงหาสมการของเส้นตรงต่อไปนี้

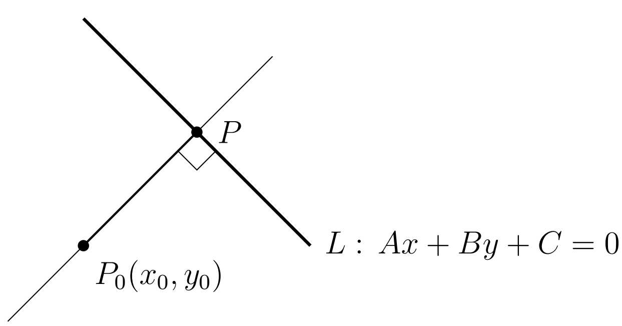
1. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -2)$ และขนานกับ $2y + 3x = 5$

2. สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $2x - y = 2$ ผ่านจุดตัดของ $3x + y = 3$ และ $x - y = 5$

บทนิยาม 4.1.20 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง คือระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดนั้นไปยังจุดบนเส้นตรง

ทฤษฎีบท 4.1.21 ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0)$ ไปยังเส้นตรง $L:\ Ax + By + C = 0$ คือความยาวของส่วนของเส้นตรงจาก P_0 ไปยัง $P \in L$ ซึ่งเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ P_0 ตั้งฉากกับเส้นตรง L เขียนแทนด้วย $d(P_0; L)$ และ

$$d(P_0; L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ตัวอย่าง 4.1.22 จงหาระยะทางระหว่างจุด P_0 กับเส้นตรง L

1. P_0 คือจุดกำเนิด และ $L:\ 3x+4y=10$

2. $P_0(1,2)$ และ $L:\ y=2x$

3. $P_0(-1,3)$ และ $L:\ 5x-12y+2=0$

4. $P_0(\sqrt{2},1)$ และ $L:\ x+y=1$

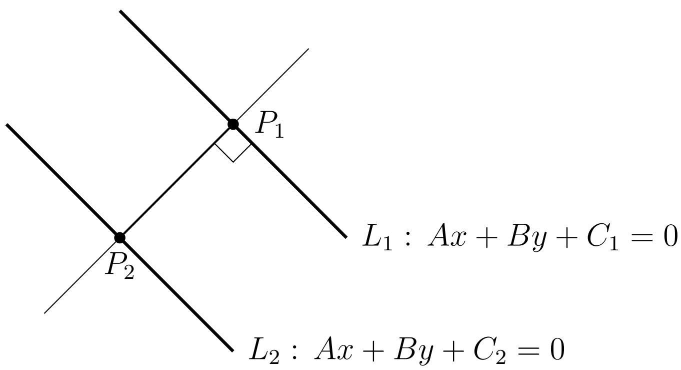
บทนิยาม 4.1.23 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดบนเส้นตรงบนเส้นตรงทั้งสอง

ทฤษฎีบท 4.1.24 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรง ให้ $d(L_1, L_2)$ แทนระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

1. ถ้า $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ จะได้ว่า $d(L_1, L_2) = 0$
2. ถ้า $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ (ขนานกัน) ให้ $P_1 \in L_1$ และ $P_2 \in L_2$ เป็นจุดที่ทำให้ $d(P_1, P_2) = d(L_1, L_2)$ จะได้ว่า เส้นตรงที่ผ่าน P_1 และ P_2 จะตั้งฉากกับ L_1 หรือ L_2 แล้ว

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$ ตามลำดับ



ตัวอย่าง 4.1.25 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

1. $L_1 : \ 3x + 4y = 15$ และ $L_2 : \ 3x + 4y = 25$

2. $L_1 : \ 4x + 3y = 3$ และ $L_2 : \ 3x + 4y = 6$

3. $L_1 : \ x + y = 10$ และ $L_2 : \ 2x + 2y = 5$

4. $L_1 : \ x - 2y = 4$ และ $L_2 : \ 2y - x = 5$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาระยะทาง ความชัน และจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรง $\overline{PQ}$ เมื่อกำหนดให้

   1.1 $P(-2,1)$ และ $Q(1,5)$

   1.2 $P(0,1)$ และ $Q(5,-11)$

   1.3 $P(1,1)$ และ $Q(5,5)$

   1.4 $P(-1,0)$ และ $Q(1,7)$

   1.5 $P(\pi,\pi+1)$ และ $Q(\pi+1,\pi)$

   1.6 $P(\ell\text{n}2,\ell\text{n}3)$ และ $Q(\ell\text{n}3,\ell\text{n}2)$

2. จงหาความชันของเส้นตรงต่อไปนี้

   2.1 $x+2y=3$

   2.2 $3-2x-y=0$

   2.3 $2(x+1)=3(y-1)$

   2.4 $\dfrac{x+2}{y+2}=\dfrac{2}{3}$

3. จงหาสมการของเส้นตรงต่อไปนี้

   3.1 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,5)$ และ $(2,-3)$

   3.2 เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและขนานกับ $3x-7y=3$

   3.3 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3,2)$ และตั้งฉากกับ $2y=3(x-1)$

   3.4 เส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $P(-2,0)$ และ $Q(-4,8)$ และทำมุม 60° กับแกน X

4. จงหามุมระหว่างเส้นตรงต่อไปนี้

   4.1 $y=0$ และ $y=\sqrt{3}x+1$

   4.2 $x+y=2$ และ $y=x-3$

   4.3 $3x-1=y$ และ $y=2x+5$

   4.4 $\dfrac{x-1}{2-y}=\dfrac{1}{3}$ และ $y=x+1$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุด P_0 กับเส้นตรง L หรือ $d(P_0;L)$

   5.1 P_0 คือจุดกำเนิด และ $L:\ 3x-4y=15$

   5.2 $P_0(-2,2)$ และ $L:\ y=3x$

   5.3 $P_0(-2,1)$ และ $L:\ 7x-24y=5$

   5.4 $P_0(\sqrt{5},4)$ และ $L:\ 2x+y=4$

6. จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 หรือ $d(L_1,L_2)$

   6.1 $L_1:\ 3x+4y+13=0$ และ $L_2:\ 3x+4y=2$

   6.2 $L_1:\ x+3y=3$ และ $L_2:\ 3x+y=6$

   6.3 $L_1:\ 2x+3y=10$ และ $L_2:\ 2x+3y=15$

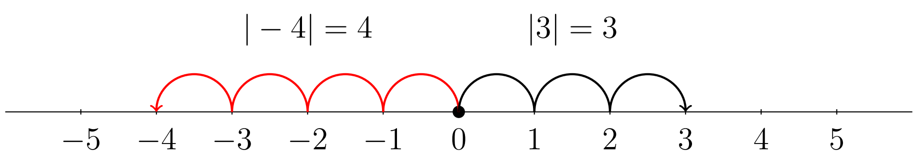
   6.4 $L_1:\ x=y$ และ $L_2:\ y-x=3$

7. ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ ถ้า R เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง $\overline{PQ}$ โดยที่ $d(P, R) : d(R, Q) = m : n$ เมื่อ n และ m เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า

$$R = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$$

4.2 กราฟค่าสัมบูรณ์ (Absolute value graphs)

บทนิยาม 4.2.1 ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางบนเส้นจำนวนจาก x ไปยัง 0

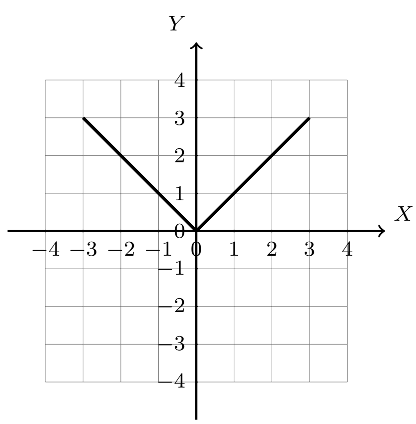


ทฤษฎีบท 4.2.2 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ

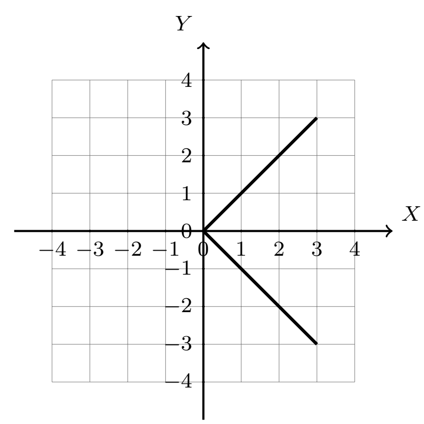
$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.2.3 จงจับคู่สมการต่อไปนี้กับกราฟที่ถูกต้อง

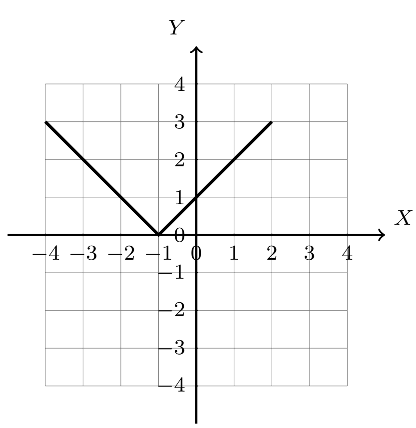
1. $y = |x|$
2. $x = |y|$
3. $y = |x+1|$
4. $x = -|y-1| + 1$



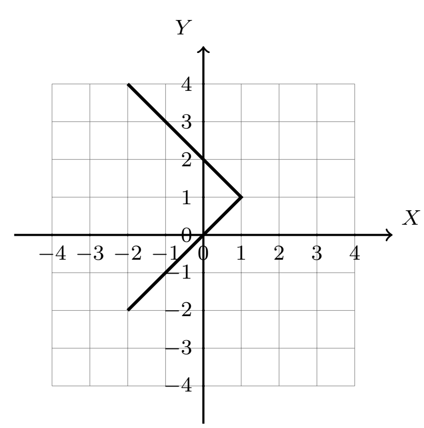
(ก)



(ค)



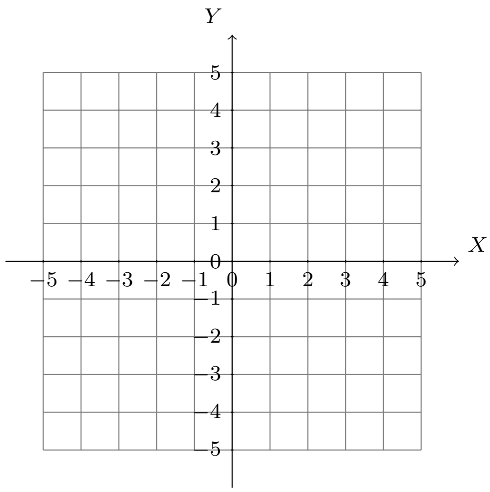
(ข)



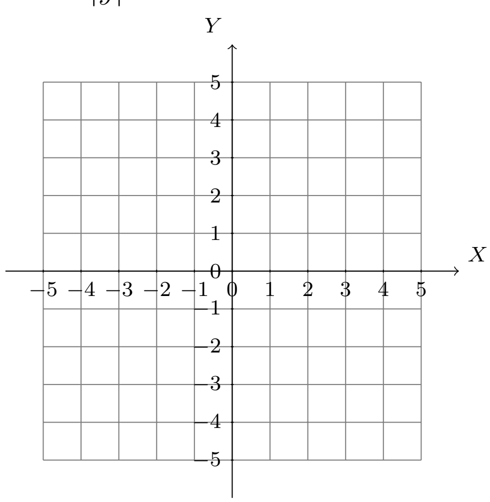
(ง)

ตัวอย่าง 4.2.4 จงวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

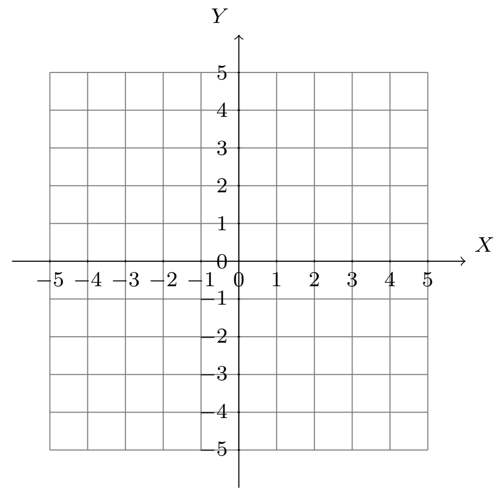
1. $y = |x| + 1$



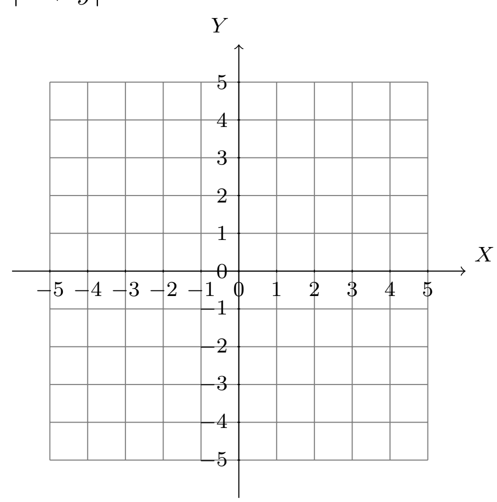
2. $x = -|y| - 1$



3. $|x| + |y| = 4$



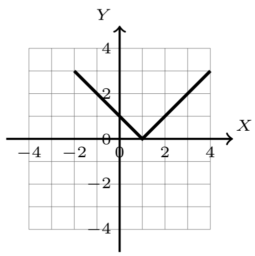
4. $|x + y| = 4$

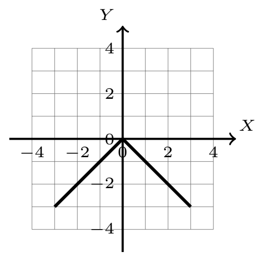


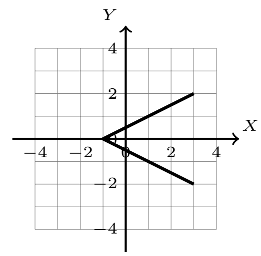
แบบฝึกหัด 4.2

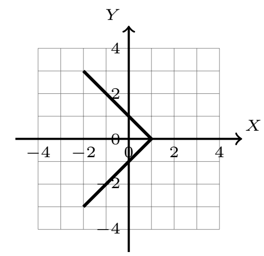
1. จงจับคู่สมการต่อไปนี้กับกราฟที่ถูกต้อง

1.1 $y = -|x|$ 1.2 $x = 2|y| - 1$ 1.3 $y = |x-1|$ 1.4 $x = -|y-1|$

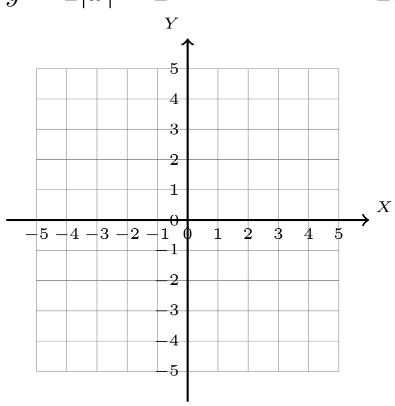
(ก)


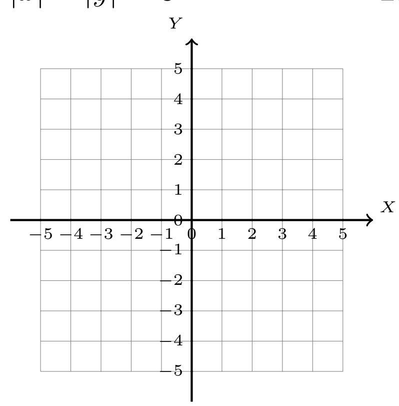
(ข)


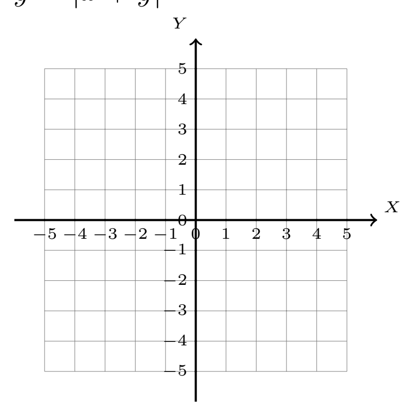
(ค)


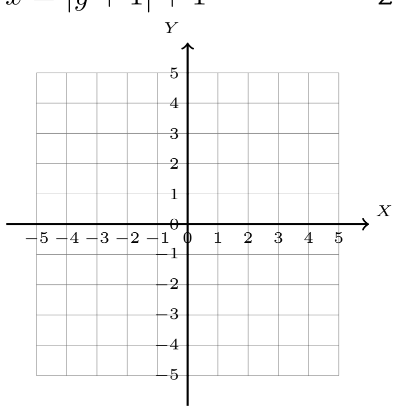
(ง)


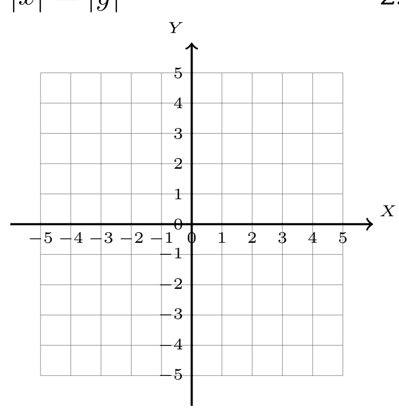
2. จงวาดกราฟของวงรี เมื่อกำหนดสมการวงรีต่อไปนี้

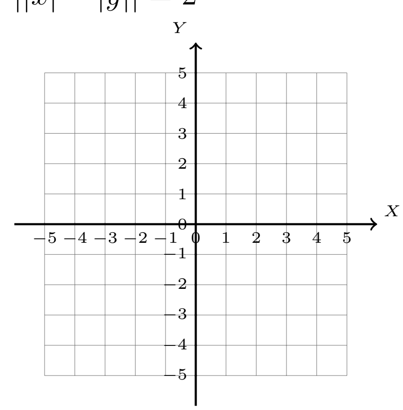
2.1 $y = 2|x| - 2$


2.3 $|x| - |y| = 3$


2.5 $y = |x + y|$


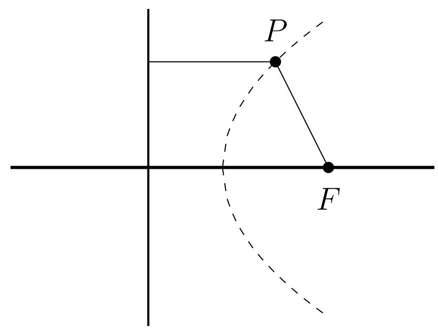
2.2 $x = |y+1| + 1$


2.4 $|x| = |y|$


2.6 $||x| - |y|| = 2$


4.3 พาราโบลา (Parabola)

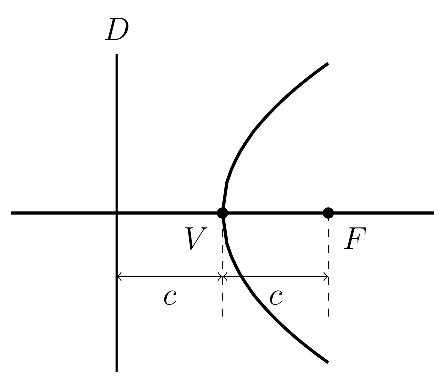
บทนิยาม 4.3.1 พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดซึ่งห่างจากจุดคงที่และเส้นตรงเส้นหนึ่งด้วยระยะเท่ากันเสมอ จุดคงที่เรียกว่า**จุดโฟกัส** (focus) ของพาราโบลา เส้นตรงเส้นนั้นเรียกว่า **เส้นบังคับหรือเส้นไดเรกทริกซ์** (directrix)



หมายเหตุ ในวิชานี้เราจะพิจารณาเส้นไดเรกทริกซ์เป็นเส้นตรงแนวดิ่งหรือเส้นตรงแนวนอน
พาราโบลา Pa มี F เป็นจุดโฟกัส และ D เป็นเส้นไดเรกทริกซ์ ให้ P เป็นจุดบนพาราโบลา แล้ว

$$Pa = \{P \,:\, d(F,P) = d(P;D)\}$$

- เลื่อน P มาไว้บนส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตัดตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ เราจะเรียกจุดนี้ว่า**จุดยอด** (vertex) ของพาราโบลา เขียนแทนด้วย V
- ให้ c แทนระยะทางระหว่างจุดยอด V ไปยังเส้นไดเรกทริกซ์ นั่นคือ $d(V;D) = c$ หรือ $d(V,F) = c$



- ให้ P มีพิกัดเป็น (x,y) และ V มีพิกัดเป็น (h,k) จากสมการ $d(F,P) = d(P;D) = c$ เมื่อไดเรกทริกซ์ตั้งฉากกับแกน X จะได้

$$(x-h) = 4c(y-k)^2 \qquad \text{และ} \qquad (x-h) = -4c(y-k)^2$$

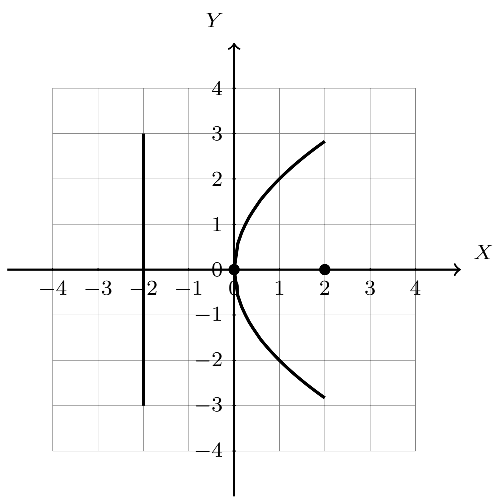
เมื่อไดเรกทริกซ์ตั้งฉากกับแกน Y จะได้

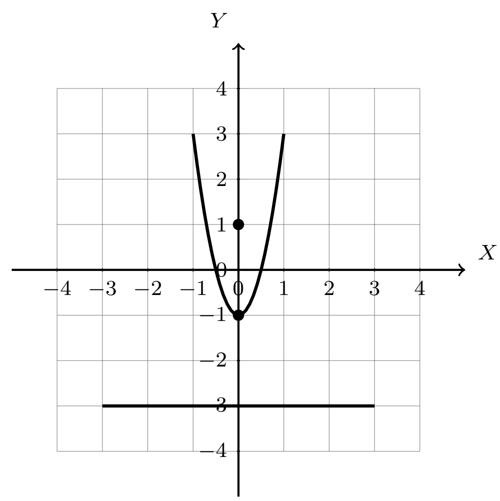
$$(y-k) = 4c(x-h)^2 \qquad \text{และ} \qquad (y-k) = -4c(x-h)^2$$

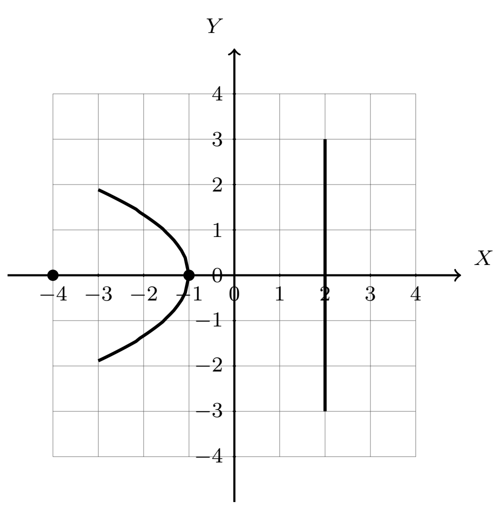
กรณีเฉพาะที่จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

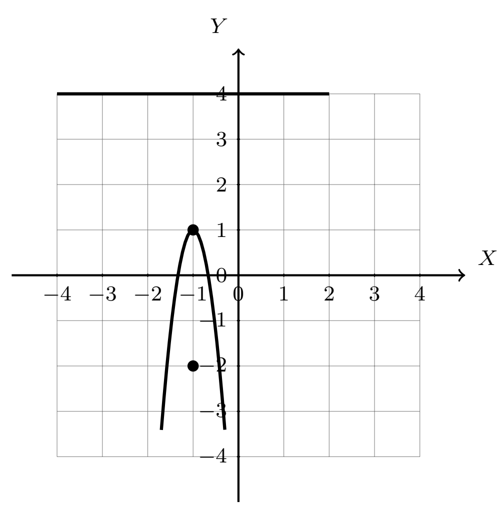
$$y = \pm 4cx^2 \quad \text{และ} \quad x = \pm 4cy^2$$

ตัวอย่าง 4.3.2 จากกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ จงหาสมการพาราโบลา จุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกทริกซ์

1. 

3. 

2. 

4. 

ตัวอย่าง 4.3.3 จากสมการของพาราโบลาที่กำหนดให้ จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกทริกซ์

1. $y = 16x^2 + 1$

2. $x = 4(y+1)^2 - 3$

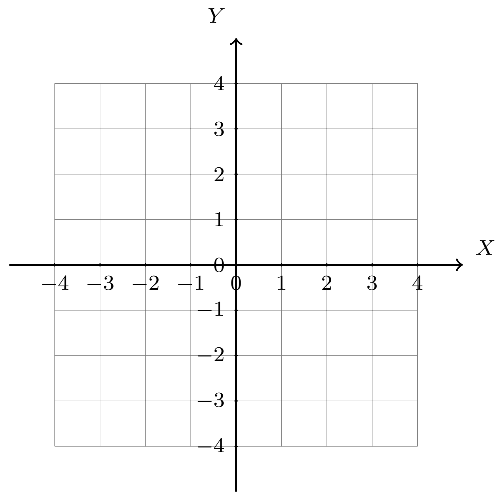
3. $8x^2 + y = 16x - 3$

4. $x = 4y^2 + 4y - 1$

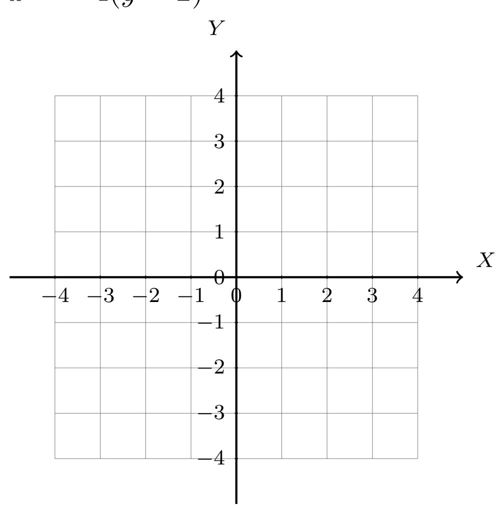
5. $x^2 + y + 2x = 10$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงวาดกราฟพาราโบลาต่อไปนี้

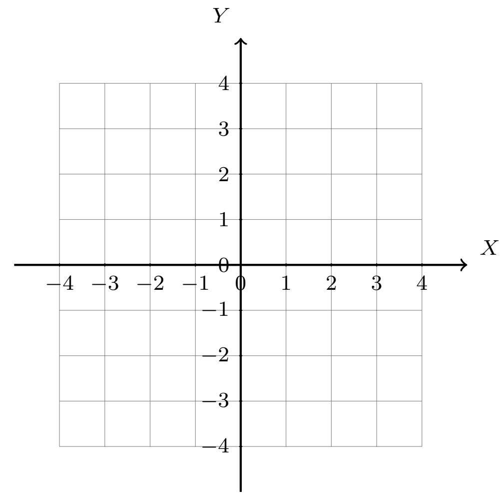
1. $x = 9y^2 + 1$



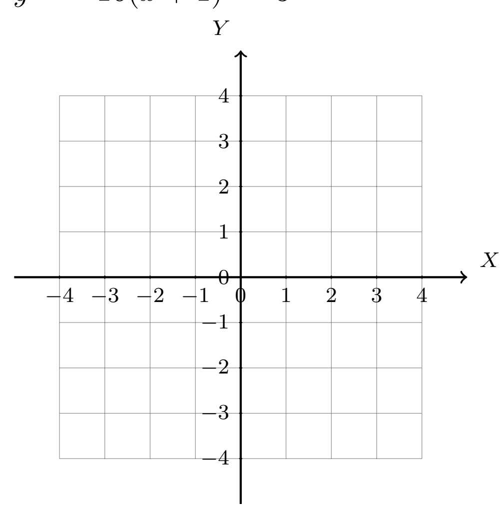
2. $x = -4(y-2)^2$



3. $y = 4x^2 - 1$



4. $y = -16(x+1)^2 - 3$



ตัวอย่าง 4.3.5 จงหาสมการของพาราโบลา เมื่อกำหนดให้

1. มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีความโฟกัสเท่ากับ 3 หน่วย

2. มีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส และมี $y = 6$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์

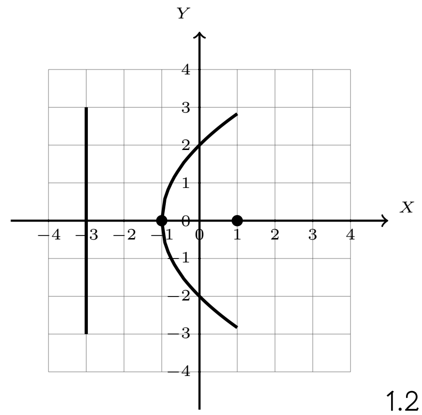
3. มี $(-1, 1)$ และ $(3, 1)$ เป็นจุดยอดและจุดโฟกัสตามลำดับ

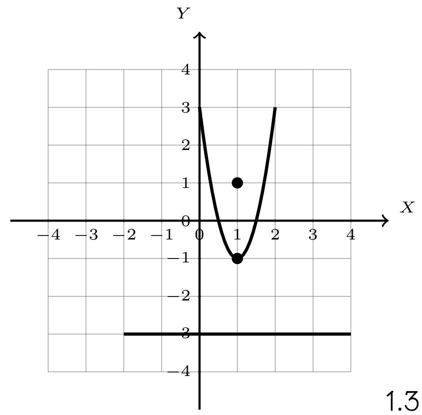
4. มี $(1, 3)$ เป็นจุดยอด และมี $x + 3 = 0$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์

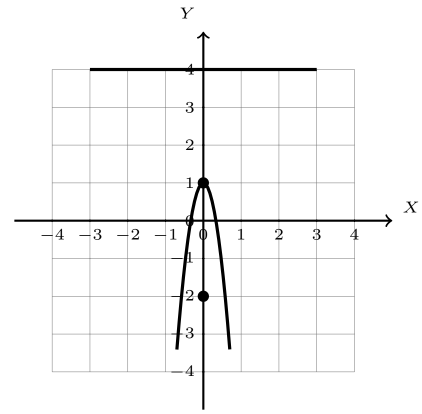
5. พาราโบลาผ่านจุด $(1, 0)$, $(-1, 8)$ และ $(2, 1)$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จากกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ จงหาสมการพาราโบลา จุดโฟกัส จุดยอด สมการเส้นไดเรกทริกซ์

1.1


1.2


1.3


2. จงวาดกราฟของพราราโบลา เมื่อกำหนดสมการดังต่อไปนี้

2.1 $y = 4(x-1)^2$
2.2 $x = -16(y-2)^2 + 1$
2.3 $y = (x+1)(x-3)$
2.4 $y = x^2 - 2x + 3$
2.5 $6x^2 + y - 12x = 10$
2.6 $x = 4(y-2)(3-y)$

3. จากสมการของพาราโบลาที่กำหนดให้ จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกทริกซ์

3.1 $y = 8(x+1)^2$
3.2 $x = -12(y-1)^2 + 5$
3.3 $y = -4(x-1)(x+1)$
3.4 $y = x^2 - 6x - 1$
3.5 $4x^2 + 2y - 16x = 5$
3.6 $x - y^2 + y = 1$

4. จงหาสมการพาราโบลาเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีความโฟกัสเท่ากับ 4 หน่วย

4.2 มีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส และมี $y = 2$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์

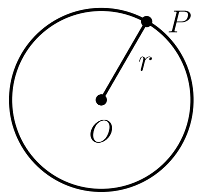
4.3 มี $(-2, 2)$ และ $(4, 2)$ เป็นจุดยอดและจุดโฟกัสตามลำดับ

4.4 มี $(0, 2)$ เป็นจุดยอด และมี $x = 3$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์

4.5 พาราโบลาผ่านจุด $(0, 3)$, $(1, -2)$ และ $(4, 5)$

4.4 วงกลม (Circle)

บทนิยาม 4.4.1 วงกลม (Circle) คือเซตของจุดที่ห่างจากจุดคงที่ด้วยระยะคงที่ เรียกจุดคงที่ว่า**จุดศูนย์กลาง** (center) และระยะคงที่ว่า**รัศมี** (radius)



กำหนด C_r คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $O(0,0)$ และรัศมี r แล้ว

$$C_r = \{P : d(P,O) = r\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r^2\}$$

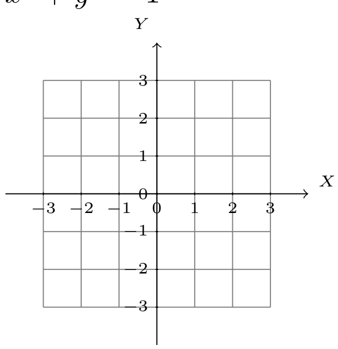
และเมื่อจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) และรัศมี r วงกลมคือเซต

$$\{(x,y) : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

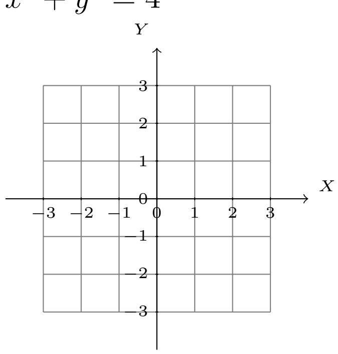
เรียก $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ สมการของวงกลม

ตัวอย่าง 4.4.2 จงวาดกราฟของสมการวงกลมต่อไปนี้

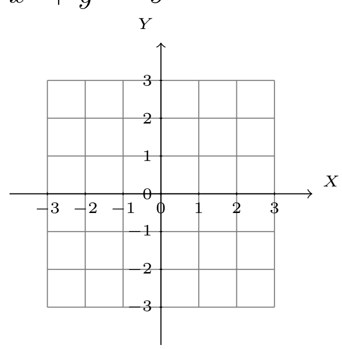
1. $x^2 + y^2 = 1$



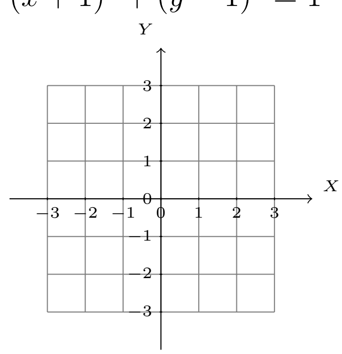
2. $x^2 + y^2 = 4$



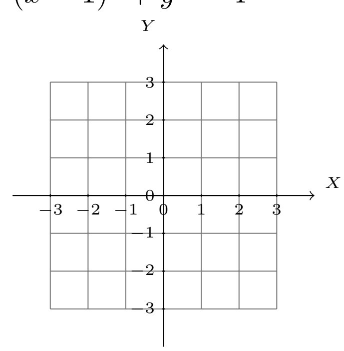
3. $x^2 + y^2 = 9$



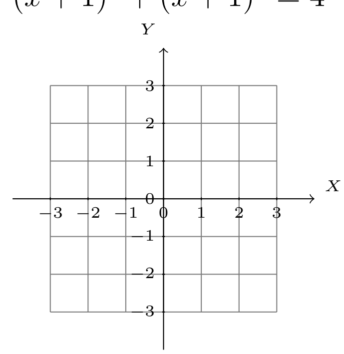
4. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$



5. $(x-1)^2 + y^2 = 4$

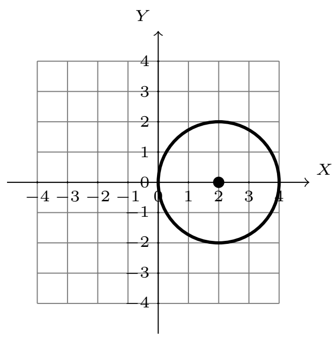


6. $(x+1)^2 + (x+1)^2 = 4$

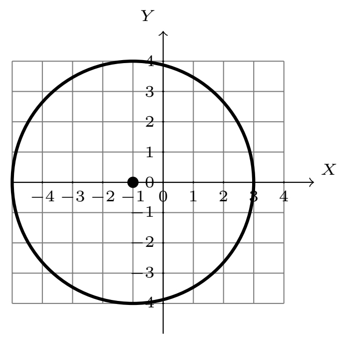


ตัวอย่าง 4.4.3 จงจับคู่สมการต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

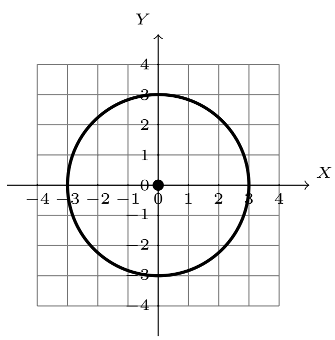
1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $x^2 + (y-2)^2 = 4$
3. $(x+1)^2 + y^2 = 16$
4. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$
5. $(2x-1)^2 + (2y+1)^2 = 16$
6. $x^2 + y^2 = 4x$



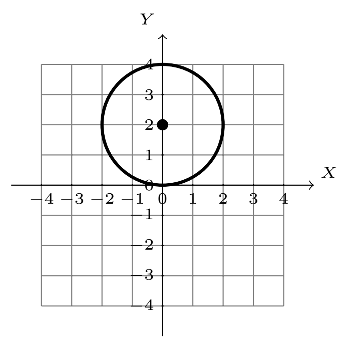
(ก)



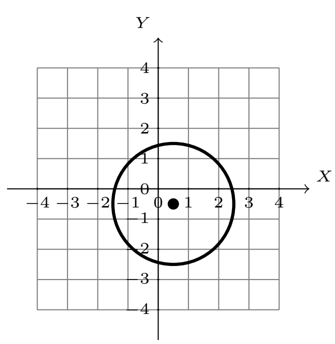
(ง)



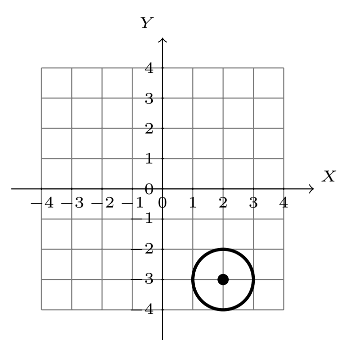
(ข)



(จ)



(ค)



(ฉ)

ตัวอย่าง 4.4.4 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของสมการวงกลมต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 = 36$

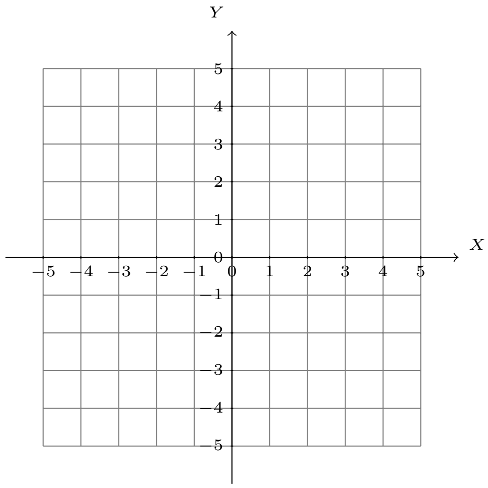
2. $x^2 + y^2 + 2y = 3$

3. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

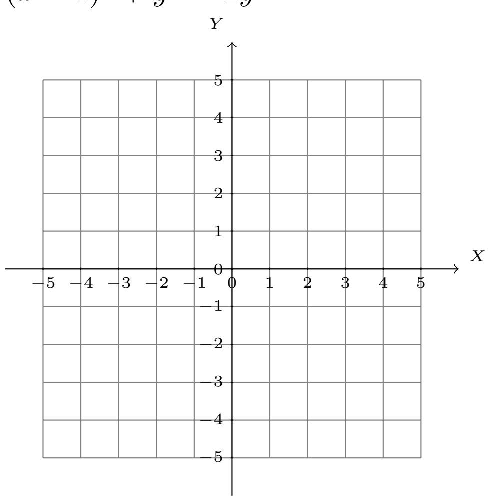
4. $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y = 5$

ตัวอย่าง 4.4.5 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีพร้อมกับวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

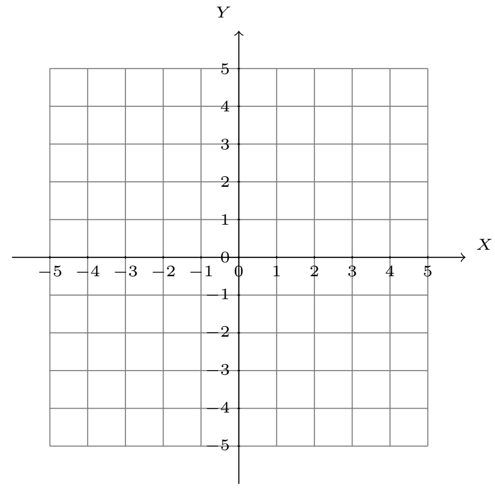
1. $x^2 + y^2 = 4$



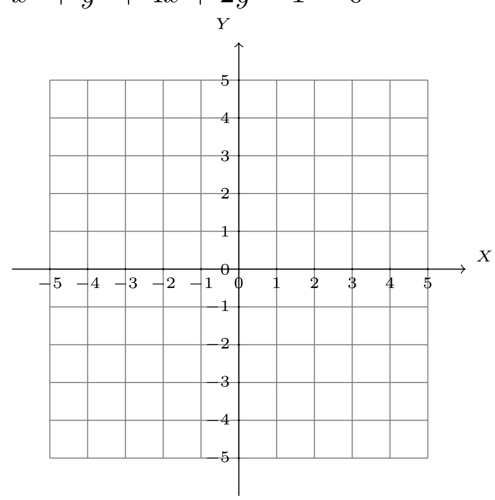
2. $(x-1)^2 + y^2 = 2y$



3. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$



4. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$



ตัวอย่าง 4.4.6 จงหาสมการของวงกลม เมื่อ

1. มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมี 4 หน่วย

2. มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และเส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter) ยาว 10π หน่วย

3. มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีจุด $(3,4)$ อยู่บนเส้นรอบวง (circumference)

4. มีส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด $(-1,2)$ และ $(1,6)$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

5. มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3,5)$ และมีเส้นตรง $3x+4y=1$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมนี้

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาสมการของวงกลมต่อไปนี้

   1.1 มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี 5 หน่วย

   1.2 มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด เส้นรอบวงยาว 12π หน่วย

   1.3 มีศูนย์กลางที่จุด $(0, 3)$ มีพื้นที่เท่ากับ 9π ตารางหน่วย

   1.4 มีศูนย์กลางที่จุด $(5, 2)$ และผ่าน $(-1, 3)$

   1.5 มีส่วนของเส้นตรงจาก $(2, -3)$ และ $(8, -1)$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

   1.6 มี $(6, -2)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสกับเส้นตรง $x + 2y = 6$

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีพร้อมกับวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

   2.1 $x^2 + y^2 = 9$

   2.2 $(x + 1)^2 + y^2 = 16$

   2.3 $x^2 + y^2 - 2x = 3$

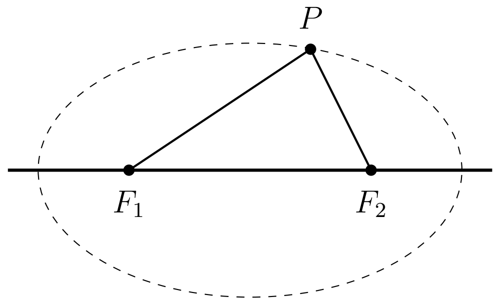
   2.4 $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 7$

   2.5 $x^2 + y^2 + 2y = 0$

   2.6 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$

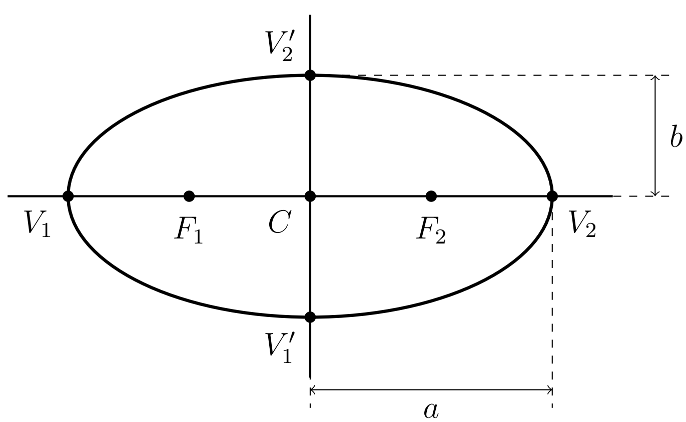
4.5 วงรี (Ellipse)

บทนิยาม 4.5.1 วงรี (ellipse) คือเซตของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่ เรียกจุดคงที่สองจุดนั้นว่า**จุดโฟกัส** (focus) ของวงรี



กำหนดวงรี E มี F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัส และ P เป็นจุดบนวงรี แล้ว

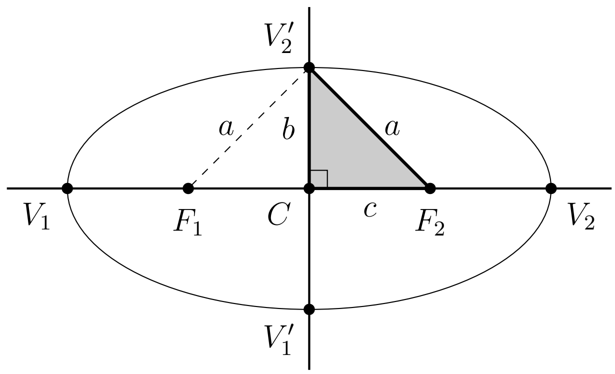
1. เรียก C ที่เป็นจุดกึ่งกลางของ F_1 และ F_2 ว่า**จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงรี
2. เลื่อน P มาไว้บนส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสทั้งสอง เราจะเรียกจุดนี้ว่า**จุดยอด** (vertex) ของวงรี เขียนแทนด้วย V_1 และ V_2
3. เรียกส่วนของเส้นตรง V_1V_2 ว่า**แกนเอก** (major axis)
4. ให้ a แทนระยะทางระหว่างจุด C ไปยังจุดยอดหนึ่ง นั้นคือ $d(C, V_1) = a$ หรือ $d(C, V_2) = a$
5. เลื่อน P มาไว้บนส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรีและตั้งฉากกับแกนเอก เราจะเรียกจุดนี้ว่า**จุดยอดร่วม** (co–vertex) ของวงรี เขียนแทนด้วย V_1' และ V_2'
6. เรียกส่วนของเส้นตรง $V_1'V_2'$ ว่า**แกนโท** (minor axis)
7. ให้ b แทนระยะทางระหว่างจุด C ไปยังจุดยอดร่วมหนึ่ง นั้นคือ $d(C, V_1') = b$ หรือ $d(C, V_2') = b$
8. จากการกำหนดดังกล่าวเราจะได้ว่า **ผลบวกคงที่ของวงรีมีค่าเท่ากับความยาวแกนเอก** หรือเท่ากับ $2a$



$$E = \{P \,:\, d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a\}$$

9. ให้ c แทนระยะทางระหว่างจุด C ไปยังจุดโฟกัสหนึ่ง นั้นคือ $d(C, F_1) = c$ หรือ $d(C, F_2) = c$ แล้วจะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2$$



10. เรียกอัตราส่วน $\dfrac{c}{a}$ ว่า**ความเยื่องศูนย์กลาง (eccentricity)** เขียนแทนด้วย e สำหรับวงรีจะได้ว่า

$$0 < e < 1$$

หมายเหตุ สำหรับวงกลมจะมี $e = 0$ หรือกล่าวได้ว่าวงกลมไม่มีความเยื่องศูนย์กลาง

11. ให้ P มีพิกัดเป็น (x, y) และ C มีพิกัดเป็น (h, k) จากสมการ $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$ และความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ เมื่อ F_1F_2 ขนานกับแกน X จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

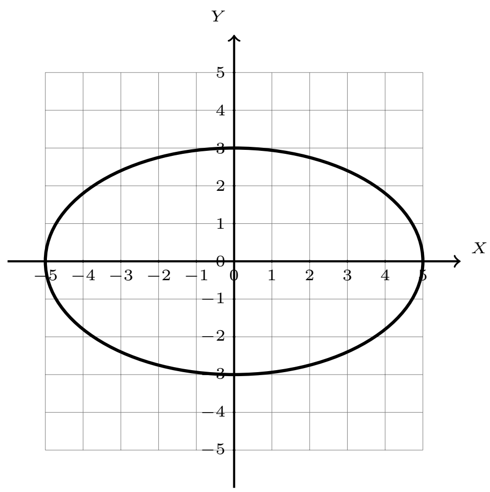
กรณีที่ F_1F_2 ขนานกับแกน Y จะได้

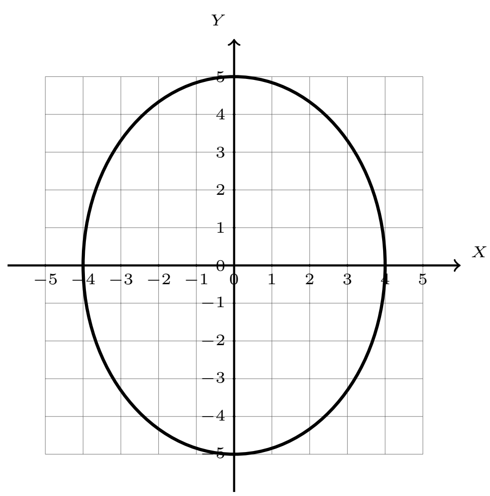
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

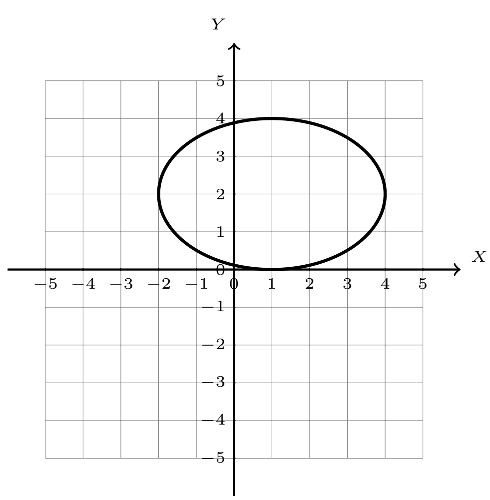
กรณีเฉพาะที่จุดศูนย์กลางวงรีอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{และ} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ตัวอย่าง 4.5.2 จากกราฟวงรีที่กำหนดให้ จงหาสมการวงรี จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดยอดร่วม ผลบวกค่งที่ a, b และ c

1. 

2. 

3. 

ตัวอย่าง 4.5.3 จากสมการวงรีที่กำหนดให้ จงหาสมการวงรี จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดยอดร่วม ผลบวกค่งที่ a, b และ c

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$

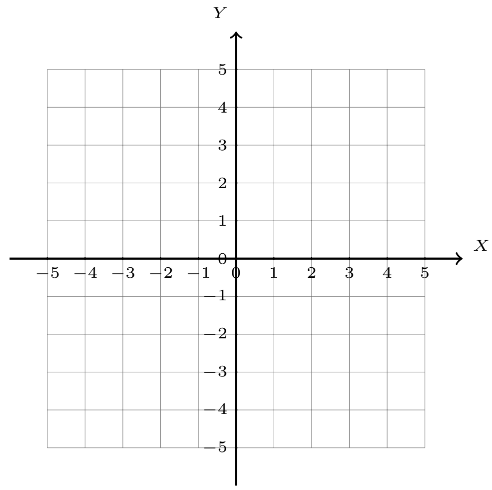
2. $x^2 + 4y^2 + 8y = 0$

3. $16x^2 + 9y^2 - 64x - 36y = 44$

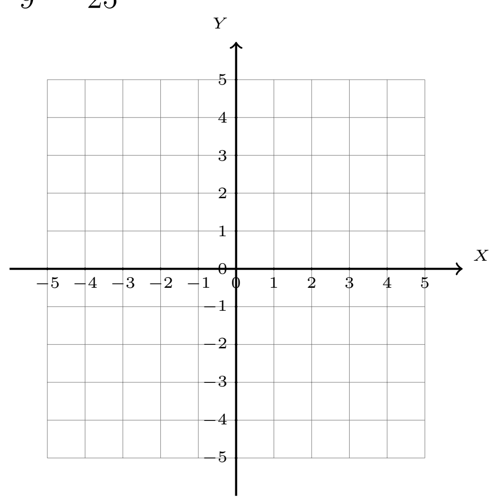
4. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y = 199$

ตัวอย่าง 4.5.4 จงวาดกราฟของวงรี เมื่อกำหนดสมการวงรีต่อไปนี้

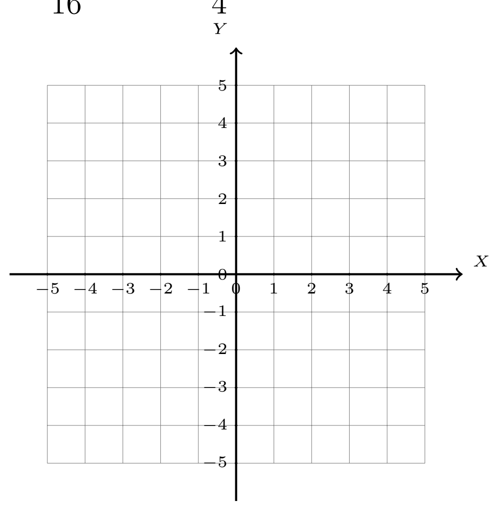
1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



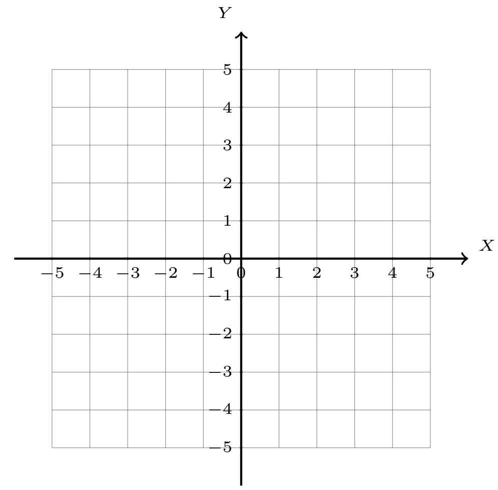
2. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



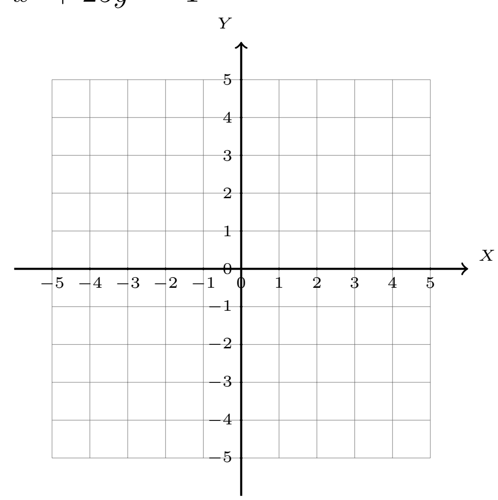
3. $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$



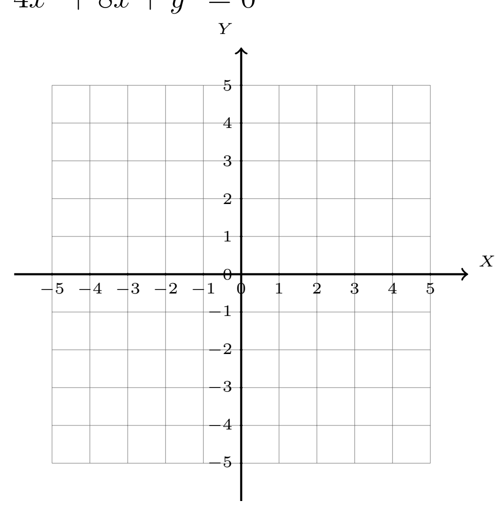
4. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$



5. $x^2 + 25y^2 = 1$



6. $4x^2 + 8x + y^2 = 0$



ตัวอย่าง 4.5.5 จงหาสมการวงรีจากข้อที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีความยาวแกนเอกเท่ากับ 6 หน่วย และความยาวแกนโทเท่ากับ 4 หน่วย

2. มี $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีความยาวแกนโท 6 หน่วย

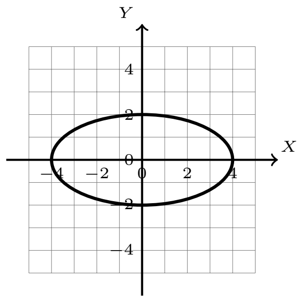
3. มี $(0, 7)$ และ $(0, -7)$ เป็นจุดยอดร่วม และมีความเยื่องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{24}{25}$

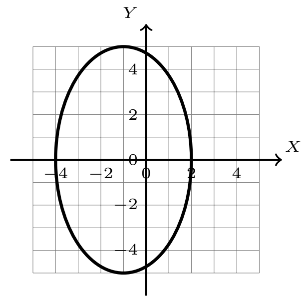
4. มี $(1, -2)$ และ $(1, 6)$ เป็นจุดยอด และมีความยาวแกนโท 4 หน่วย

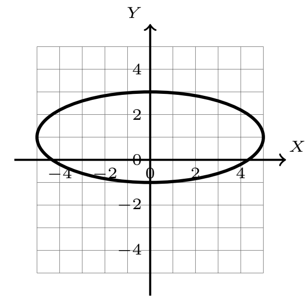
5. มี $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และวงรีผ่านจุด $(1, \frac{3}{2})$

แบบฝึกหัด 4.5

1. จากกราฟวงรีที่กำหนดให้ จงหาสมการวงรี จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดยอดร่วม ผลบวกค่าที่ a, b และ c

1.1 

1.2 

1.3 

2. จงวาดกราฟของวงรี เมื่อกำหนดสมการวงรีต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

2.2 $25(x-1)^2 + 9y^2 = 225$

2.3 $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

2.4 $5x^2 + 9y^2 + 20x = 25$

2.5 $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$

2.6 $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$

3. จงหาสมการวงรีจากข้อที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีความยาวแกนเอกเท่ากับ 8 หน่วย และความยาวแกนโทเท่ากับ 4 หน่วย

3.2 มี $(3,0)$ และ $(-3,0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีความยาวแกนโท 16 หน่วย

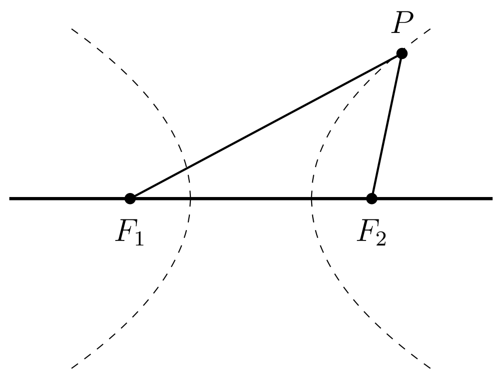
3.3 มี $(0,3)$ และ $(0,3)$ เป็นจุดยอดร่วม และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{2}$

3.4 มี $(-3,-2)$ และ $(5,-2)$ เป็นจุดยอด และมีความยาวแกนโท 2 หน่วย

3.5 มี $(0,1)$ และ $(0,-1)$ เป็นจุดโฟกัส และวงรีผ่านจุด $(\frac{3}{2},1)$

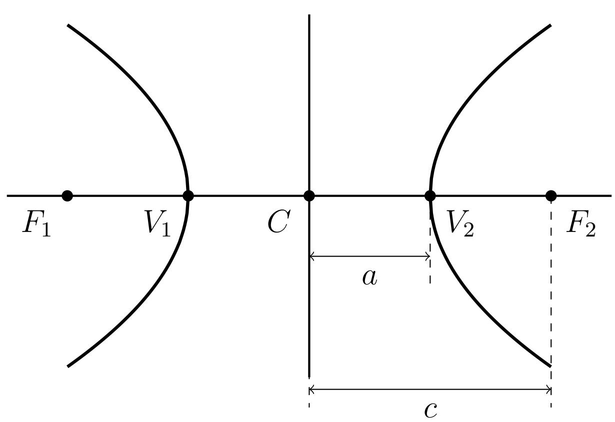
4.6 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

บทนิยาม 4.6.1 ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือเซตของจุดที่มีผลต่างของระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่ เรียกจุดคงที่สองจุดนั้นว่า**จุดโฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา



กำหนดให้ H คือไฮเพอร์โบลามี F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัส และ P เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลา แล้ว

1. เรียก C ที่เป็นจุดกึ่งกลางของ F_1 และ F_2 ว่า**จุดศูนย์กลาง** (center) ของไฮเพอร์โบลา
2. เลื่อน P มาไว้บนส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสทั้งสอง เราจะเรียกจุดนี้ว่า**จุดยอด** (vertex) ของไฮเพอร์โบลา เขียนแทนด้วย V_1 และ V_2
3. เรียกส่วนของเส้นตรง V_1V_2 ว่า**แกนตามขวาง** (major axis)
4. ให้ a แทนระยะทางระหว่างจุด C ไปยังจุดยอดหนึ่ง นั้นคือ $d(C, V_1) = a$ หรือ $d(C, V_2) = a$
5. ให้ c แทนระยะทางระหว่างจุด C ไปยังจุดโฟกัสหนึ่ง นั้นคือ $d(C, F_1) = c$ หรือ $d(C, F_2) = c$
6. จากข้อมูลดังกล่าวเราจะได้ว่า **ผลต่างคงที่ของไฮเพอร์โบลามีค่าเท่ากับความยาวแกนเอก** หรือเท่ากับ $2a$



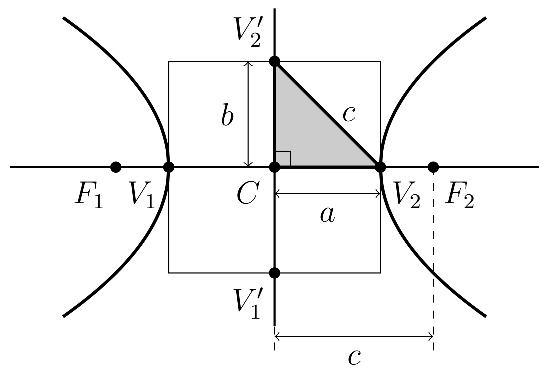
$$H = \{P : |d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a\}$$

7. ให้ V_1' และ V_2' เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ตัดตั้งฉากกับ F_1F_2 ที่จุด C และมีระยะ $d(C, V_1') = b$ และ $d(C, V_2') = b$ ซึ่งหาได้จาก

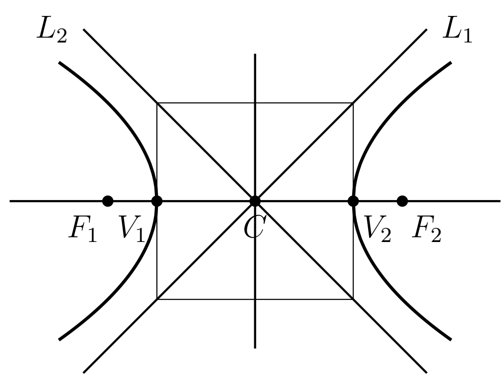
$$c^2 = a^2 + b^2$$

เราจะเรียกจุดนี้ว่า**จุดปลายแกนสังยุค** ของไฮเพอร์โบลา

8. เรียกส่วนของเส้นตรง $V_1'V_2'$ ว่า**แกนสังยุค** (minor axis)



9. เรียกเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังกราฟว่า **เส้นกำกับ (asymptote)** ของไฮเพอร์โบลา และให้ (h, k) เป็นพิกัดของ C



L_1 มีสมการเป็น $y = \frac{b}{a}(x - h) + k$ และ L_2 มีสมการเป็น $y = -\frac{b}{a}(x - h) + k$

10. ความเยื่องศูนย์กลาง $e = \dfrac{c}{a}$ สำหรับไฮเพอร์โบลาจะได้ว่า $e > 1$

11. ให้ P มีพิกัดเป็น (x, y) และ C มีพิกัดเป็น (h, k) จากสมการ $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$ และความสัมพันธ์ $c^2 = a^2 + b^2$ เมื่อ F_1F_2 ขนานกับแกน X จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

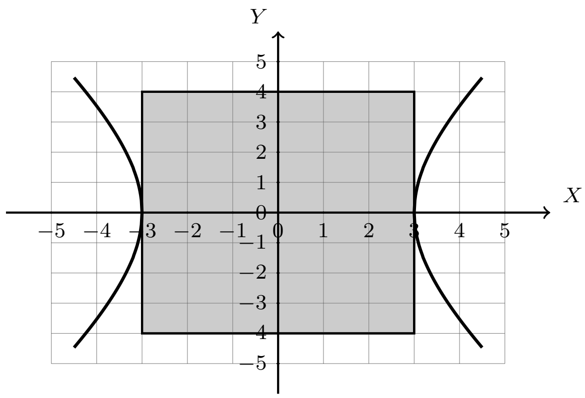
กรณีที่ F_1F_2 ขนานกับแกน Y จะได้

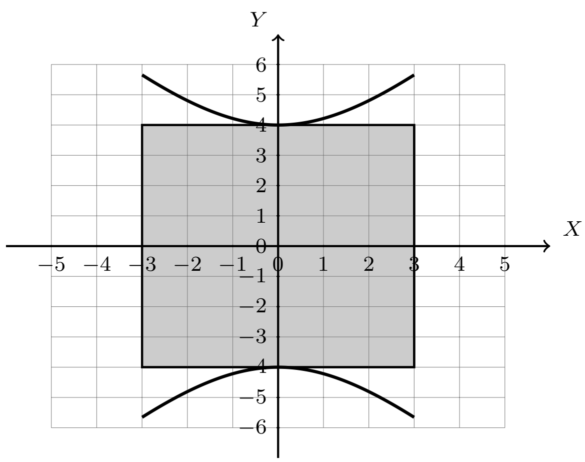
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

กรณีเฉพาะที่จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{และ} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ตัวอย่าง 4.6.2 จากกราฟไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นสัมผัส ผลต่างค่งที่ a, b และ c

1. 

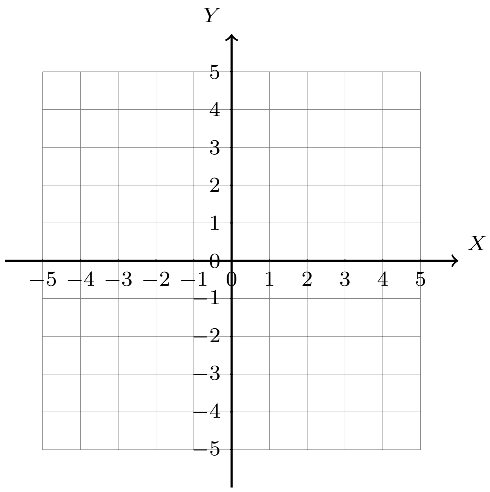
2. 

ตัวอย่าง 4.6.3 จากสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นสัมผัส ผลต่างค่งที่ a, b และ c

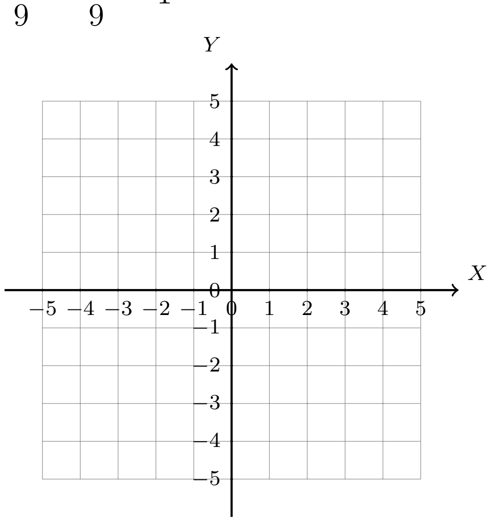
1. $x^2 - 4y^2 = 16$
2. $16y^2 - 9x^2 + 36x + 32y + 124 = 0$

ตัวอย่าง 4.6.4 จงวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

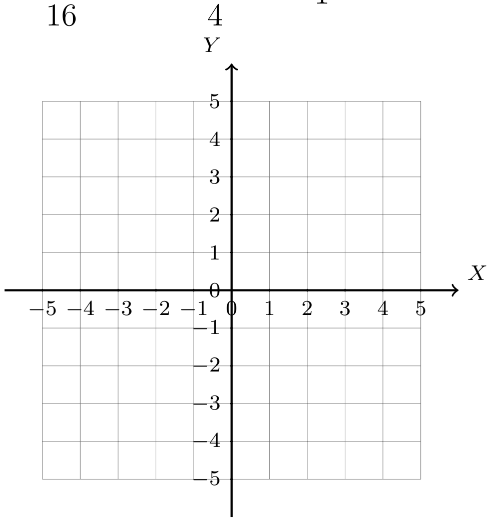
1. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



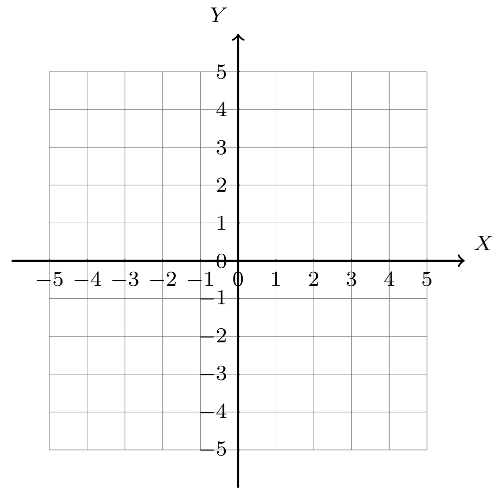
2. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{9} = 1$



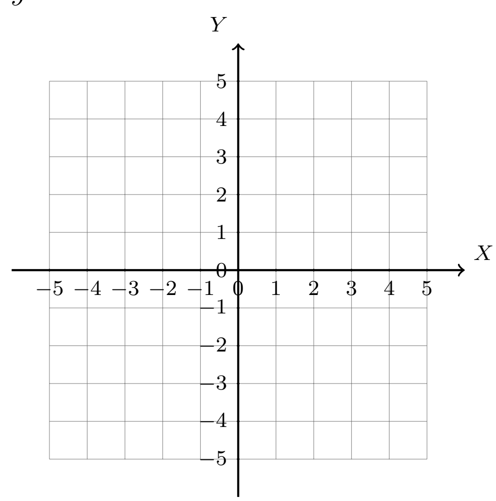
3. $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$



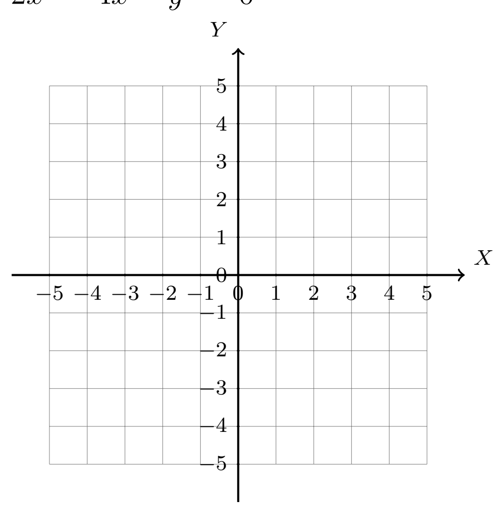
4. $5x^2 - \dfrac{y^2}{5} = 1$



5. $y^2 - x^2 = 1$



6. $2x^2 - 4x - y^2 = 0$



ตัวอย่าง 4.6.5 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาจากข้อที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 6 หน่วย และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 4 หน่วย

2. มี $(5, 0)$ และ $(-5, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีความยาวแกนสังยุค 6 หน่วย

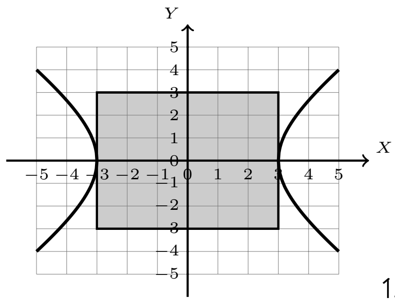
3. มี $(0, 1)$ และ $(0, -1)$ เป็นจุดยอด และมี $y = x$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่ง

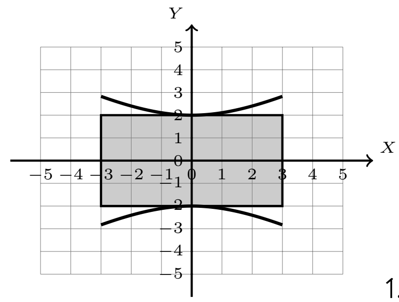
4. มี $(2, -4)$ และ $(2, 8)$ เป็นจุดปลายแกนสังยุค และมีความเยื่องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{5}{4}$

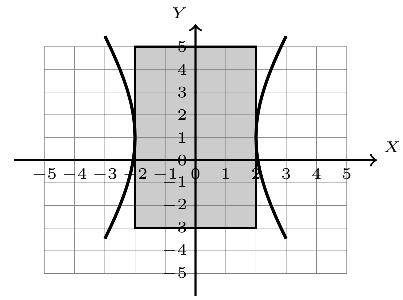
5. มี $(-\sqrt{2}, 0)$ และ $(\sqrt{2}, 0)$ เป็นจุดโฟกัส และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(\sqrt{2}, 1)$

แบบฝึกหัด 4.6

1. จากกราฟไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ จงหาสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นสัมผัส ผลต่างค่งที่ a, b และ c

1.1


1.2


1.3


2. จงวาดกราฟของไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดสมการดังต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

2.2 $4(x-1)^2 - 9y^2 = 36$

2.3 $\dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

2.4 $y^2 - 2x^2 + 8x - 6 = 0$

2.5 $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$

2.6 $4x^2 - 25y^2 + 25x - 100y - 164$

3. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด มีความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 6 หน่วย และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 6 หน่วย

3.2 มี $(3,0)$ และ $(-3,0)$ เป็นจุดโฟกัส และมีความยาวแกนสังยุค 2 หน่วย

3.3 มี $(2,0)$ และ $(2,0)$ เป็นจุดปลายแกนสังยุค และมีความยาวแกนตามขวาง 8 หน่วย

3.4 มี $(3,-2)$ และ $(5,-2)$ เป็นจุดยอด และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ 2

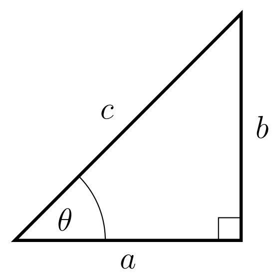
3.5 มี $(0,-\sqrt{2})$ และ $(0,\sqrt{2})$ เป็นจุดโฟกัส และวงรีผ่านจุด $(1,\sqrt{2})$

บทที่ 5

ตรีโกณมิติ (Trigonometry)

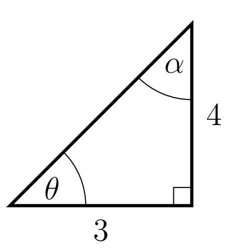
5.1 ตรีโกณมิติพื้นฐาน (Basic Trigonometry)

บทนิยาม 5.1.1 กำหนดค่าตรีโกณมิติทั้ง 6 ชนิดดังนี้



1. **ไซน์** (sine) ของมุม θ คืออัตราส่วนของ $\frac{b}{c}$ เขียนแทนด้วย $\sin\theta = \frac{b}{c}$
2. **โคไซน์** (cosine) ของมุม θ คืออัตราส่วนของ $\frac{a}{c}$ เขียนแทนด้วย $\cos\theta = \frac{a}{c}$
3. **แทนเจนต์** (tangent) ของมุม θ คืออัตราส่วนของ $\frac{b}{a}$ เขียนแทนด้วย $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$
4. **โคเซกเกนต์** (cosecant) ของมุม θ คือส่วนกลับของไซน์ เขียนแทนด้วย $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{b}$
5. **เซกเกนต์** (secant) ของมุม θ คือส่วนกลับของโคไซน์ เขียนแทนด้วย $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{a}$
6. **โคแทนเจนต์** (cotangent) ของมุม θ คือส่วนกลับของแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาค่าตรีโกณมิติทั้ง 6 ชนิดของมุม θ และ α



ทฤษฎีบท 5.1.3 กำหนดให้ θ และ α เป็นมุมแหลม (acute angle) และ $\theta + \alpha = 90^\circ$ แล้ว

$$\sin\theta = \cos\alpha \qquad \tan\theta = \cot\alpha \qquad \sec\theta = \csc\alpha$$

ตัวอย่าง 5.1.4 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{5}{13}$ จงหาค่าของ

1. $\cos\theta$
2. $\tan\theta$
3. $\cot\theta$
4. $\sec\theta$
5. $\csc\theta$
6. $\cos(90^\circ - \theta)$
7. $\tan(90^\circ - \theta)$
8. $\sin(90^\circ - \theta)$
9. $\cot(90^\circ - \theta)$
10. $\sec(90^\circ - \theta)$

ทฤษฎีบท 5.1.5 จากการนิยามค่าตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงตอบคำถามต่อไปนี้

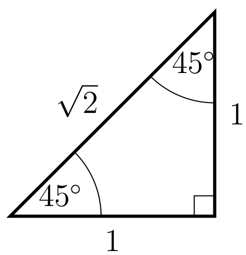
1. จงหาค่าของ $\sin^2 35^\circ + \sin^2 57^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 33^\circ$

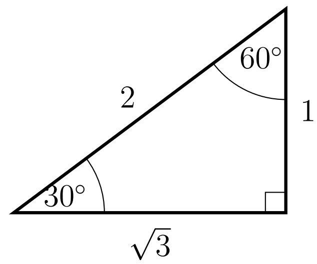
2. กำหนดให้ $\sec\theta - \tan\theta = 5$ จงหาค่าของ $\tan\theta + \sec\theta$

3. จงหาค่าของ $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 89^\circ$

4. กำหนดให้ $\tan 12^\circ = a$ จงหาค่าของ $\frac{\tan 78^\circ + \cot 12^\circ}{1 - \tan 78^\circ \cot 12^\circ}$ ในรูป a

ค่าตรีโกณมิติมาตรฐาน





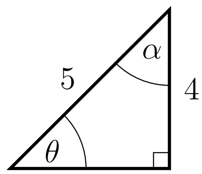
θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

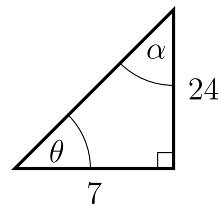
ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาค่าของ

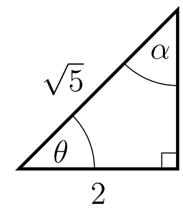
1. $\cos^2 45^\circ + \tan^2 30^\circ$
2. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ$
3. $\cot 45^\circ + \sec 60^\circ + \csc 30^\circ$
4. $\sin 45^\circ(\cos 45^\circ + \csc 45^\circ)$
5. $\frac{1}{\tan 30^\circ + \cot 60^\circ}$
6. $\frac{1}{\sin 60^\circ + \cos 30^\circ} + \frac{1}{\sin 60^\circ - \cos 30^\circ}$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จากรูป จงหาค่าของตรีโกณมิติทั้ง 6 ชนิด ของมุม θ และ α

1.1


1.2


1.3


2. กำหนดให้ $\tan\theta = 2$ จงหาค่าของ

2.1 $\cos\theta$ 2.3 $\cot\theta$ 2.5 $\csc\theta$ 2.7 $\tan(90^\circ - \theta)$ 2.9 $\csc(90^\circ - \theta)$

2.2 $\tan\theta$ 2.4 $\sec\theta$ 2.6 $\cos(90^\circ - \theta)$ 2.8 $\sin(90^\circ - \theta)$ 2.10 $\sec(90^\circ - \theta)$

3. ให้ A เป็นมุมแหลมและ $\tan A + \cot A = 3$ จงหาค่าของ

3.1 $\tan^2 A + \cot^2 A$ 3.3 $\tan A - \cot A$ 3.5 $\tan^3 A - \cot^3 A$

3.2 $\tan^2 A - \cot^2 A$ 3.4 $\tan^4 A - \cot^4 A$ 3.6 $\tan^3 A + \cot^3 A$

4. จงหาค่าของ $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 89^\circ$

5. จงหาค่าของ

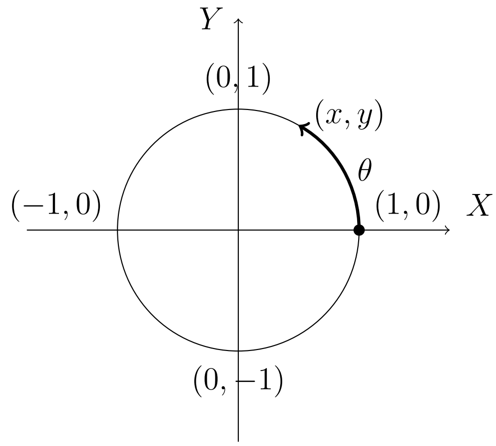
5.1 $1 - \cos 45^\circ \sin 45^\circ$ 5.4 $\sec 30^\circ - \csc 60^\circ$ 5.7 $\frac{1}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

5.2 $\tan^3 30^\circ - \cot^3 30^\circ$ 5.5 $\cos 60^\circ(\sin 45^\circ + \cot 45^\circ)$ 5.8 $\frac{1}{\cot 45^\circ - \tan 60^\circ} + \frac{1}{\cot 45^\circ + \tan 60^\circ}$

5.3 $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ 5.6 $\frac{1}{\tan 30^\circ - \cot 30^\circ}$ 5.9 $\frac{\sin 45^\circ + \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 60^\circ} + \frac{\sin 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 60^\circ}$

5.2 วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle)

พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$



ให้ $(1,0)$ เป็นจุดเริ่มต้น เมื่อวัดความยาวเส้นรอบลงไป**ทวนเข็มนาฬิกา** (counterclockwise) ไปยังจุดสิ้นสุด ความยาวที่วัดได้ให้มีค่าเป็น**บวก** เมื่อวัดวัดความยาวเส้นรอบลงไป**ตามนาฬิกา** (clockwise) ไปยังจุดสิ้นสุด ความยาวที่วัดได้ให้มีค่าเป็น**ลบ** และเรียกตัวเลขเหล่านั้นตามด้วย**หน่วยเรเดียน** (radian) ดังนั้น

$$\pi \text{ เรเดียน} \quad \text{เทียบเท่ากับ} \quad 180 \text{ องศา}$$

จะได้ว่า

- θ มีหน่วยเป็นองศา จะเทียบเท่ากับ $\frac{\theta}{180}\pi$ ในหน่วยเรเดียน
- θ มีหน่วยเป็นเรเดียน จะเทียบเท่ากับ $\frac{\theta}{\pi}180$ ในหน่วยองศา

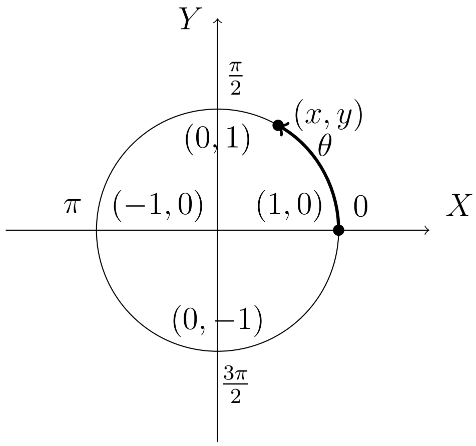
ตัวอย่าง 5.2.1 จงแปลงมุมในหน่วยองศาให้เป็นเรเดียน

1. 0°
2. 30°
3. 45°
4. 60°
5. 90°
6. 180°
7. 270°
8. 255°
9. -360°
10. -600°

ตัวอย่าง 5.2.2 จงแปลงมุมในหน่วยเรเดียนให้เป็นองศา

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{3}$
3. $\frac{2\pi}{3}$
4. $\frac{3\pi}{4}$
5. $\frac{5\pi}{6}$
6. 2π
7. $\frac{7\pi}{3}$
8. $\frac{11\pi}{6}$
9. $-\frac{9\pi}{4}$
10. $-\frac{13\pi}{2}$

ถ้าลากเส้นโค้งจากจุด $(1,0)$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาไปสิ้นสุดที่จุด (x,y) ด้วยความยาว θ เรเดียน เราจะได้ว่า



$$x = \cos\theta \qquad \text{และ} \qquad y = \sin\theta$$

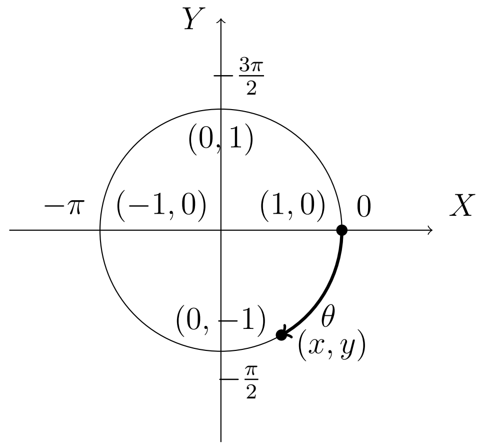
ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาคู่อันดับ (x,y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยของมุมต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{\pi}{2}$
3. π
4. $\frac{3\pi}{2}$
5. 2π
6. $\frac{2\pi}{3}$
7. $\frac{3\pi}{4}$
8. $\frac{5\pi}{6}$
9. 2π
10. $\frac{11\pi}{6}$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าของ

1. $\sin\frac{\pi}{4}$
2. $\cos\frac{5\pi}{3}$
3. $\sin\frac{11\pi}{6}$
4. $\tan\frac{\pi}{4}$
5. $\cot\frac{3\pi}{4}$
6. $\sec\frac{7\pi}{6}$
7. $\csc\frac{2\pi}{3}$
8. $\tan\frac{7\pi}{3}$

ถ้าลากเส้นโค้งจากจุด $(1,0)$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาไปสิ้นสุดที่จุด (x,y) ด้วยความยาว θ เรเดียน เราจะได้ว่า



ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาคู่อันดับ (x,y) ของมุมต่อไปนี้

1. $-\pi$
2. $-\frac{3\pi}{4}$
3. $-\frac{5\pi}{6}$
4. $-\frac{4\pi}{3}$
5. $-\frac{11\pi}{6}$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาค่าของ

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
4. $\sec\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาค่าของ

1. $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
2. $\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงแปลงมุมในหน่วยองศาให้เป็นเรเดียน

1.1 $120°$	1.3 $15°$	1.5 $36°$	1.7 $600°$	1.9 $-540°$
1.2 $150°$	1.4 $215°$	1.6 $390°$	1.8 $-90°$	1.10 $-330°$

2. จงแปลงมุมในหน่วยเรเดียนให้เป็นองศา

2.1 $\frac{\pi}{2}$	2.3 $\frac{13\pi}{6}$	2.5 $\frac{6\pi}{5}$	2.7 $\frac{7\pi}{12}$	2.9 $-\frac{\pi}{18}$
2.2 $\frac{4\pi}{3}$	2.4 $\frac{17\pi}{4}$	2.6 4π	2.8 $\frac{11\pi}{18}$	2.10 $-\frac{8\pi}{36}$

3. จงหาคู่อันดับ (x, y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยของมุมต่อไปนี้

3.1 $\frac{\pi}{4}$	3.3 3π	3.5 -20π	3.7 $\frac{133\pi}{4}$	3.9 $-\frac{36\pi}{18}$
3.2 $\frac{7\pi}{6}$	3.4 $-\frac{3\pi}{2}$	3.6 $\frac{17\pi}{3}$	3.8 $\frac{2015\pi}{6}$	3.10 $\frac{111\pi}{4}$

4. จงหาค่าของ

4.1 $\sin(\frac{3\pi}{4})$	4.3 $\cos(\frac{5\pi}{6})$	4.5 $\csc(\frac{8\pi}{3})$	4.7 $\cot(-\frac{121\pi}{4})$
4.2 $\tan(\frac{11\pi}{3})$	4.4 $\sec(\frac{21\pi}{4})$	4.6 $\cos(\frac{111\pi}{4})$	4.8 $\tan(-\frac{2016\pi}{3})$

5. จงหาค่าของ

5.1 $\sin^2 0° + \sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + \ldots + \sin^2 180°$

5.2 $\tan 0° + \tan 1° + \tan 2° + \ldots + \tan 89° + \tan 91° + \ldots + \tan 180°$

5.3 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (Trigonometric Identity)

เอกลักษณ์การบวกมุมและการลบมุม (Angle–Sum and Angle–Difference Identities)

ทฤษฎีบท 5.3.1 กำหนดให้ A และ B เป็นมุม แล้ว

1. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ $\qquad$ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
2. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ $\qquad$ $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
3. $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ $\qquad$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$
4. $\sin(-A) = -\sin A$ $\qquad$ $\cos(-A) = \cos A$ $\qquad$ $\tan(-A) = -\tan A$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาค่าของ

1. $\sin 75°$
2. $\tan 15°$
3. $\cos 165°$

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาค่าของ

1. $\sin 50°\cos 10° + \cos 50°\sin 10°$
2. $\sin 70°\sin 40° + \cos 70°\cos 40°$
3. $\sin 220°\cos 100° - \cos 220°\sin 100°$
4. $\frac{\tan 80°+\tan 55°}{1-\tan 80°\tan 55°}$

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ

1. $\sin\theta$
2. $\cos(\pi-\theta)$
3. $\tan(\theta - \frac{\pi}{4})$
4. $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)$

เอกลักษณ์มุมสองเท่า (Double-Angle Identities)

ทฤษฎีบท 5.3.5 กำหนดให้ A เป็นมุม แล้ว

1. $\sin(2A) = 2\sin A\cos A$
2. $\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
3. $\tan(2A) = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาค่าของ

1. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$
2. $1 - 2\cos^2 75^\circ$
3. $\sin^2 105^\circ$
4. $\frac{\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

ตัวอย่าง 5.3.7 กำหนดให้ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ จงหาค่าของ

1. $\sin(2\theta)$
2. $\cos(2\theta)$
3. $\tan(\pi - 2\theta)$
4. $\csc(\frac{\pi}{2} + 2\theta)$

เอกลักษณ์มุมครึ่งเท่า (Half–Angle Identities)

ทฤษฎีบท 5.3.8 กำหนดให้ A เป็นมุม แล้ว

1. $\sin(\frac{A}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ $\qquad \sin^2(\frac{A}{2}) = \frac{1-\cos A}{2}$
2. $\cos(\frac{A}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\qquad \cos^2(\frac{A}{2}) = \frac{1+\cos A}{2}$
3. $\tan(\frac{A}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$

ตัวอย่าง 5.3.9 จงหาค่าของโดยใช้เอกลักษณ์มุมครึ่งเท่า

1. $\sin 15°$
2. $\cos 75°$

ตัวอย่าง 5.3.10 กำหนดให้ $\cos A = -\frac{7}{25}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ จงหาค่าของ

1. $\sin(\frac{A}{2})$
2. $\cos(-\frac{A}{2})$
3. $\tan(\frac{A}{2})$

ตัวอย่าง 5.3.11 จงลดกำลังของค่าตรีโกณต่อไปนี้ โดยใช้ $\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$ และ $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$

1. $\sin^2 2x$
2. $\cos^2 3x$
3. $\cos^4 x$

เอกลักษณ์การบวก (Sum Identities)

ทฤษฎีบท 5.3.12 กำหนดให้ A และ B เป็นมุม แล้ว

1. $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$
2. $\sin A - \sin B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$
3. $\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$
4. $\cos A - \cos B = -2\sin(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$

ตัวอย่าง 5.3.13 จงหาค่าของโดยใช้เอกลักษณ์การบวก

1. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$
2. $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

เอกลักษณ์การคูณ (Product Identities)

ทฤษฎีบท 5.3.14 กำหนดให้ A และ B เป็นมุม แล้ว

1. $\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$
2. $\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$
3. $\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$
4. $\sin A\sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]$

ตัวอย่าง 5.3.15 จงหาค่าของโดยใช้เอกลักษณ์การคูณ

1. $\sin 105^\circ \cos 15^\circ$
2. $\cos 50^\circ \cos 10^\circ + \cos^2 20^\circ - \sin 30^\circ$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาค่าต่อไปนี้

    1.1 $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$

    1.2 $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ$

    1.3 $\sin 95^\circ \sin 55^\circ - \cos 95^\circ \cos 55^\circ$

    1.4 $\frac{\tan 160^\circ - \tan 40^\circ}{1 - \tan 160^\circ \tan 40^\circ}$

2. ให้ $\cos A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin B = \frac{5}{13}$ เมื่อ $0 < B < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ

    2.1 $\sin(A+B)$

    2.2 $\cos(A-B)$

    2.3 $\tan(A+B)$

    2.4 $\sin(A-2B)$

    2.5 $\cos(A+B-\pi)$

    2.6 $\sec(2\pi - A - B)$

    2.7 $\cos(A+B+\pi)$

    2.8 $\sin(\frac{2A-\pi}{2})$

3. กำหนดให้ $\cos A = -\frac{4}{5}$ เมื่อ $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ

    3.1 $\sin(\frac{A}{2})$

    3.2 $\cos(\frac{A}{2})$

    3.3 $\tan(2A)$

    3.4 $\sin(2A)$

    3.5 $\cos(2A-\pi)$

    3.6 $\sec(A-2\pi)$

    3.7 $\cos 2(A+\pi)$

    3.8 $\sin(\frac{A-\pi}{2})$

4. จงหาค่าของ

    4.1 $\cos 36^\circ \sin 18^\circ$

    4.2 $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

    4.3 $\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$

    4.4 $\sin 500^\circ - \cos 110^\circ - \cos 10^\circ$

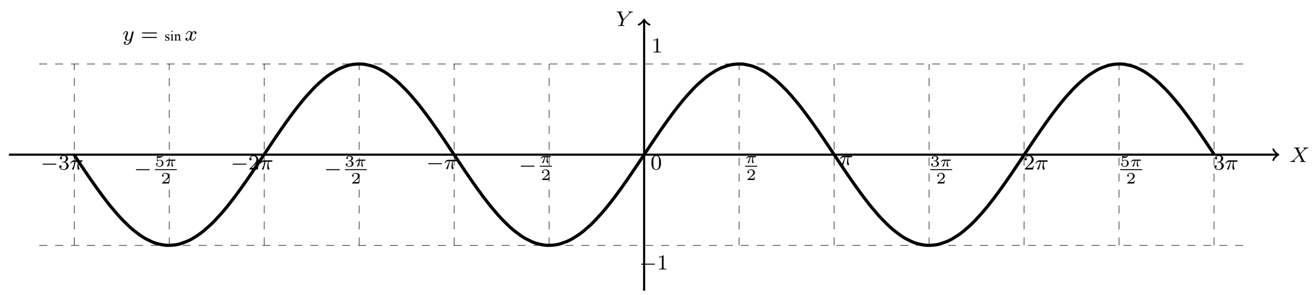
5.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

บทนิยาม 5.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริง เราจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันเป็นคาบ (periodic function)** ที่มีคาบ p ถ้า

$$f(x+np) = f(x) \qquad \text{ทุกๆ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

แอมพลิจูด (amplitude) ของฟังก์ชันคือ ครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (ถ้ามีค่าสูงสุดและต่ำสุด)

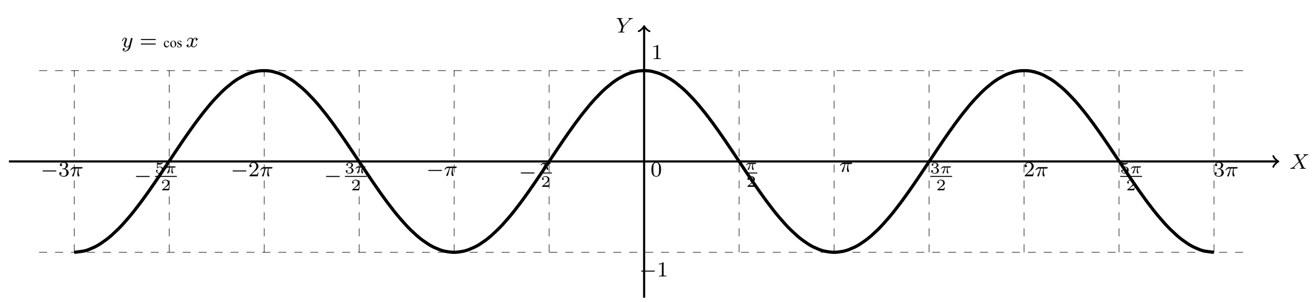
ฟังก์ชันไซน์ (Sine function)



จากกราฟของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดมเน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. แอมพลิจูด (amplitude)
4. คาบ (period)

ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine function)



จากกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ $y = \cos x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดมเน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. แอมพลิจูด (amplitude)
4. คาบ (period)

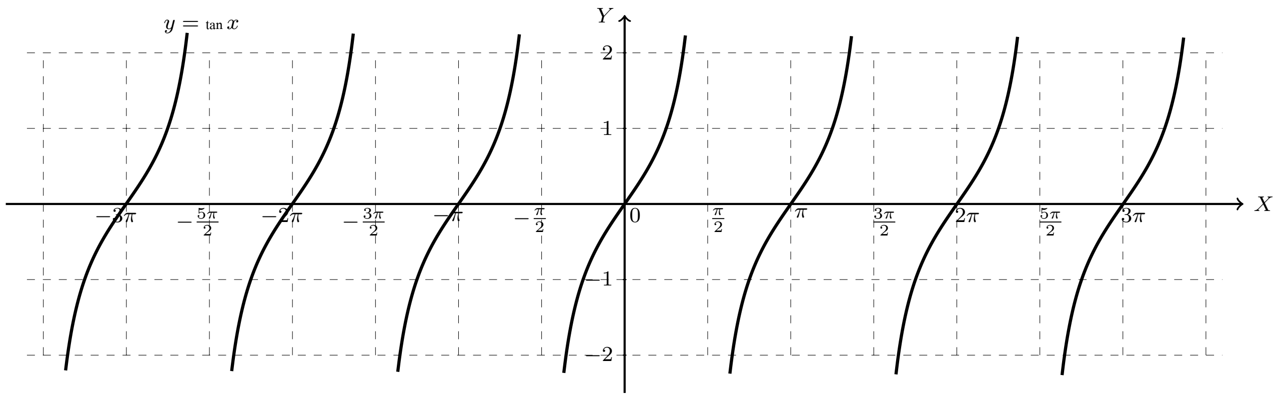
ทฤษฎีบท 5.4.2 ให้ $y = A\sin(kx+\phi)+b$ (หรือ $y = A\cos(kx+\phi)+b$) เมื่อ A, k เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และ ϕ, b เป็นจำนวนจริง แล้วฟังก์ชันนี้มี

1. โดเมนเป็น $\mathbb{R}$
2. เรนจ์เป็น $[-|A|+b, |A|+b]$
3. คาบเป็น $\frac{2\pi}{k}$
4. แอมพลิจูดเป็น $|A|$

ตัวอย่าง 5.4.3 จงหา โดเมน เรนจ์ แอมพลิจูด และคาบ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = 5\sin 3x$
2. $y = 3\cos(\pi x + \frac{\pi}{2})$
3. $y = \pi \sin \pi(\pi x - \pi) + \pi$
4. $y = -10\cos(1000x + \frac{\pi}{3})$
5. $y = \cos^2 x + 1$
6. $y = \sin x + \cos x$

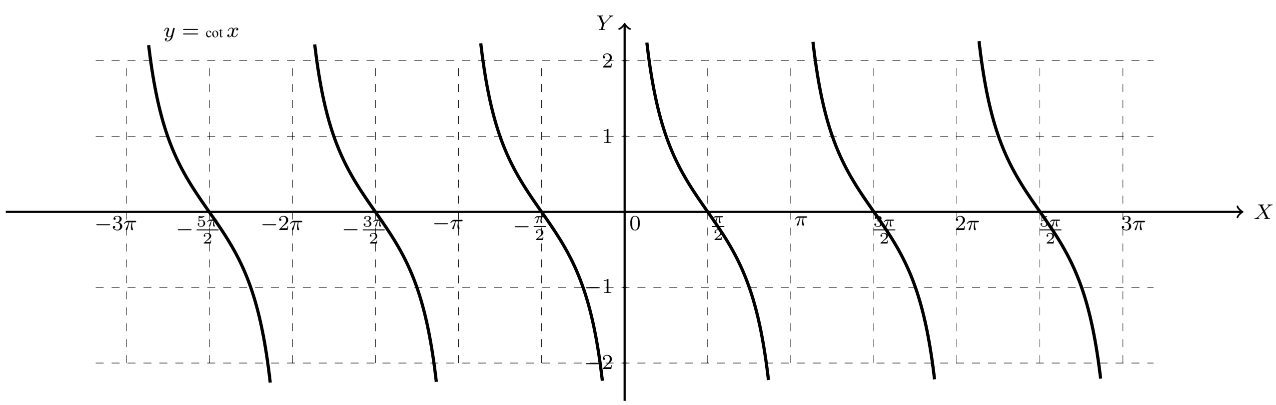
ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent function)



จากกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ $y = \tan x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดมเน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. คาบ (period)

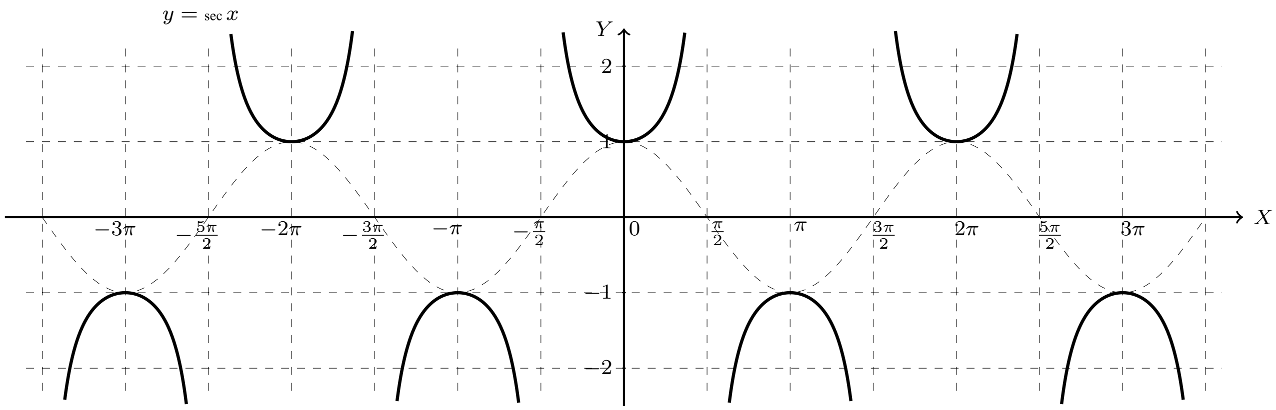
ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent function)



จากกราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ $y = \cot x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดมเน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. คาบ (period)

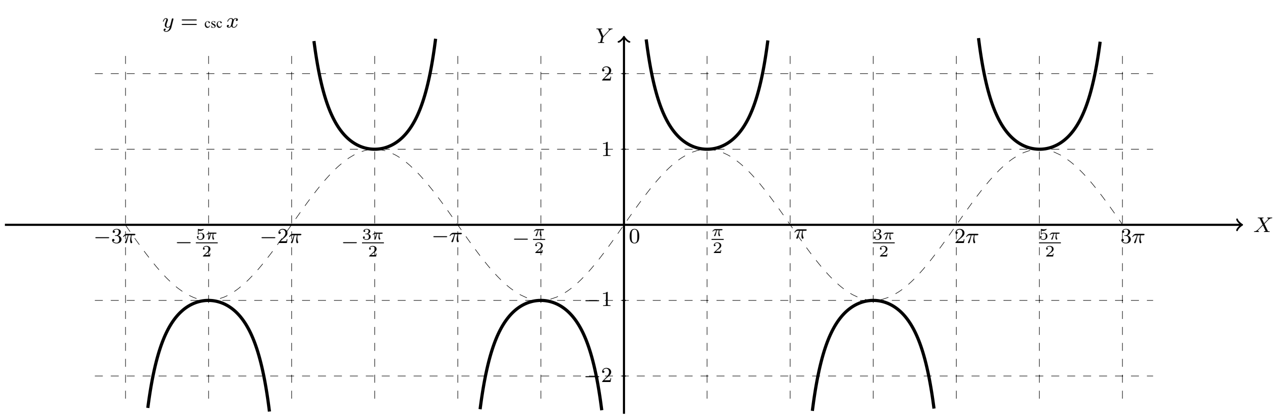
ฟังก์ชันเซกเกนต์ (Secant function)



จากกราฟของฟังก์ชันเซกเกนต์ $y = \sec x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดเมน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. คาบ (period)

ฟังก์ชันโคเซกเกนต์ (Cosecant function)



จากกราฟของฟังก์ชันโคเซกเกนต์ $y = \csc x$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โดเมน (domian)
2. เรนจ์ (range)
3. คาบ (period)

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหา โดเมน เรนจ์ แอมพลิจูด และคาบ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $y = 2\sin 2x$

   1.2 $y = 4\cos(4x+4)+4$

   1.3 $y = e\sin\pi(x-1)$

   1.4 $y = -7\cos 3(3x+\pi)+5$

   1.5 $y = \frac{1}{3}\sin(\frac{\pi}{2}x-1)+\pi$

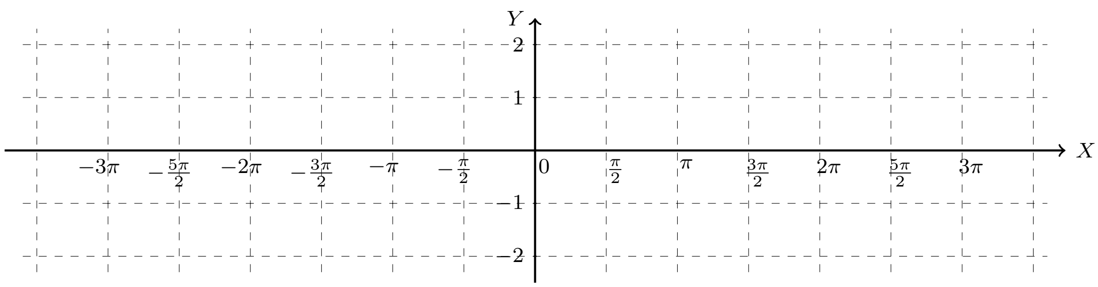
   1.6 $y = \sin^2 x$

   1.7 $y = \cos x\sin x+\frac{1}{2}$

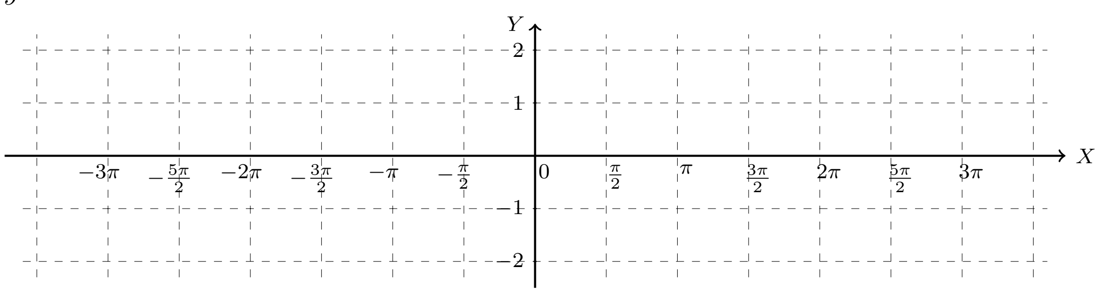
   1.8 $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$

2. จงวาดกราฟต่อไปนี้

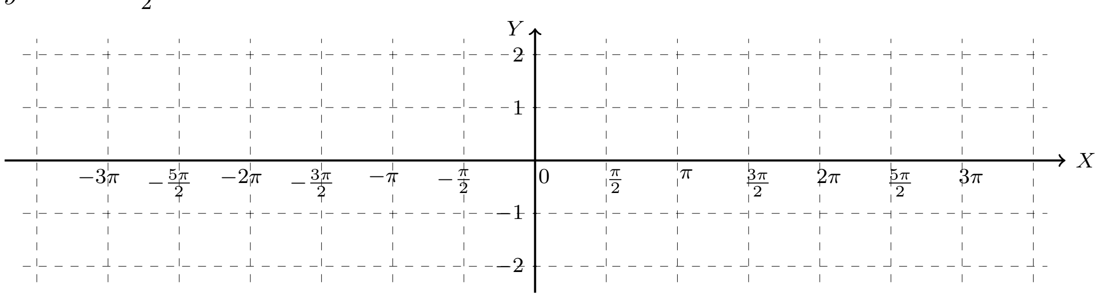
   2.1 $y = 2\sin x$



   2.2 $y = \cos 2x$



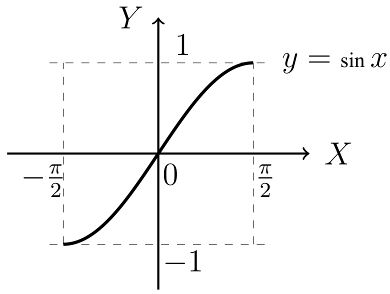
   2.3 $y = -2\sin\frac{1}{2}x$

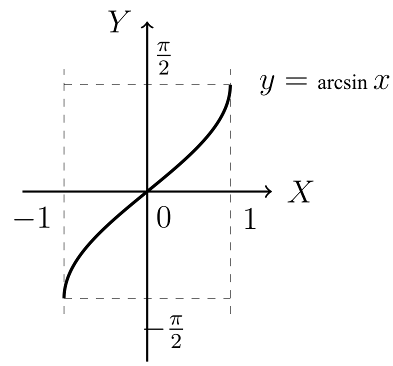


5.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Function)

บทนิยาม 5.5.1 ให้ฟังก์ชัน $y = \sin x$ เมื่อ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ แล้วฟังก์ชันผกผันของไซน์คือ $x = \sin y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \arcsin x$$

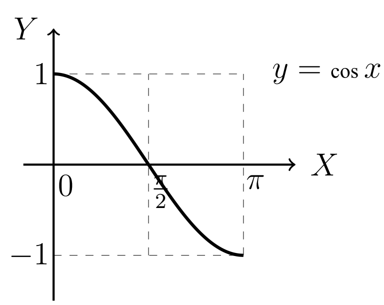


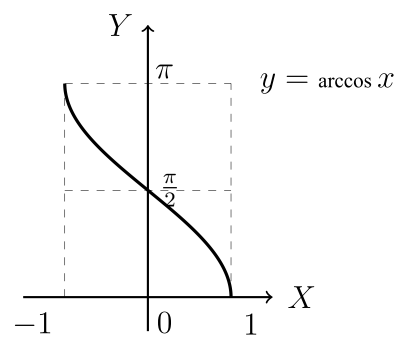


ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของไซน์มีโดเมนเท่ากับ $[-1, 1]$ และเรนจ์เท่ากับ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

บทนิยาม 5.5.2 ให้ฟังก์ชัน $y = \cos x$ เมื่อ $x \in [0, \pi]$ แล้วฟังก์ชันผกผันของโคไซน์คือ $x = \cos y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \arccos x$$





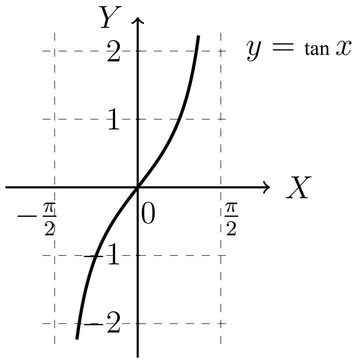
ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของโคไซน์มีโดเมนเท่ากับ $[-1, 1]$ และเรนจ์เท่ากับ $[0, \pi]$

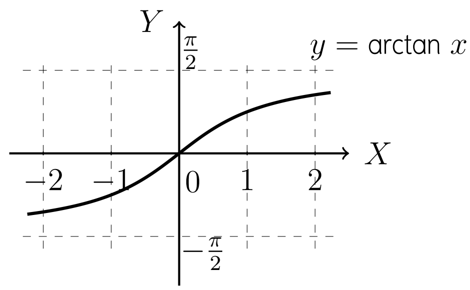
ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\arcsin 0$
2. $\arccos 1$
3. $\arcsin \frac{1}{2}$
4. $\arcsin(-\frac{1}{2})$
5. $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
6. $\arcsin(-1)$

บทนิยาม 5.5.4 ให้ฟังก์ชัน $y = \tan x$ เมื่อ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ แล้วฟังก์ชันผกผันของแทนเจนต์คือ $x = \tan y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \text{arctan } x$$

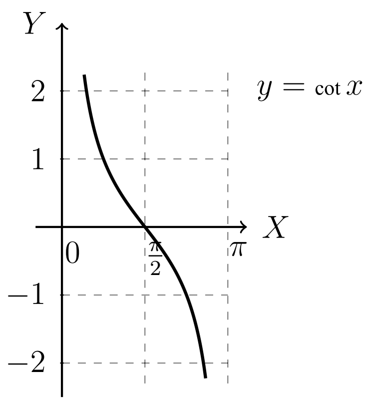


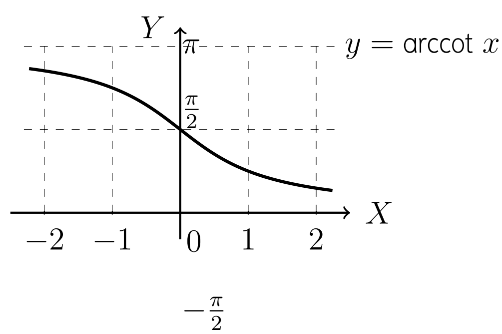


ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของแทนเจนต์มีโดเมนเท่ากับ $\mathbb{R}$ และเรนจ์เท่ากับ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

บทนิยาม 5.5.5 ให้ฟังก์ชัน $y = \cot x$ เมื่อ $x \in (0, \pi)$ แล้วฟังก์ชันผกผันของโคแทนเจนต์คือ $x = \cot y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \text{arccot } x$$





ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของโคแทนเจนต์มีโดเมนเท่ากับ $\mathbb{R}$ และเรนจ์เท่ากับ $(0, \pi)$

ตัวอย่าง 5.5.6 จงหาค่าต่อไปนี้

1. arctan 0
2. arctan 1
3. arccot (-1)
4. arctan $\sqrt{3}$
5. arctan $(-\frac{1}{\sqrt{3}})$
6. arccot 0

บทนิยาม 5.5.7 ให้ฟังก์ชัน $y = \sec x$ เมื่อ $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, pi]$ แล้วฟังก์ชันผกผันของเซกแกนต์คือ $x = \sec y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \text{arcsec } x$$

ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของเซกเกนต์มีโดเมนเท่ากับ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ และเรนจ์เท่ากับ $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

บทนิยาม 5.5.8 ให้ฟังก์ชัน $y = \csc x$ เมื่อ $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ แล้วฟังก์ชันผกผันของโคเซกแกนต์คือ $x = \sec y$ เขียนแทนด้วย

$$y = \text{arccsc } x$$

ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของโคเซกเกนต์มีโดเมนเท่ากับ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ และเรนจ์เท่ากับ $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

ตัวอย่าง 5.5.9 จงหาค่าต่อไปนี้

1. arcsec $\sqrt{2}$
2. arcsec (-2)
3. arccsc (-1)

ตัวอย่าง 5.5.10 จงหาค่าต่อไปนี้

1. sin (arccos $\frac{3}{5}$)
2. sec ($\frac{1}{2}$arcsin $(-\frac{3}{5})$)
3. arctan $\frac{1}{2}$ + arctan $\frac{1}{3}$
4. tan $\left[\frac{\text{arcsin } \frac{7}{25} + \text{arccos } \frac{7}{25}}{2}\right]$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาค่าต่อไปนี้

1.1 arcsin $\frac{1}{2}$
1.2 arccos $(-\frac{1}{2})$
1.3 arcstan $(-\sqrt{3})$
1.4 arcsin (-1)
1.5 arccot 2
1.6 arccos $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
1.7 arccsc (-2)
1.8 arcssec $\sqrt{2}$

2. จงหาค่าต่อไปนี้

2.1 arccos (sin $60°$)
2.2 arccos (sin $120°$)
2.3 arcsin (cos $\frac{7\pi}{4}$)
2.4 cos (arccos $(-\frac{1}{2})$)
2.5 tan (arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$)
2.6 sec (arccot (-2))

3. จงหาค่าต่อไปนี้

3.1 sin (arcsin $\frac{1}{3}$)
3.2 cos (arcsin $(-\frac{3}{5})$)
3.3 tan (arccos $\frac{1}{\sqrt{5}}$)
3.4 sec (arccos $(-\frac{5}{13})$)
3.5 cot (arcsin $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$)
3.6 tan (arccot $2 +$ arccot 3)
3.7 tan (2arcsin $(-\frac{1}{\sqrt{5}})$)
3.8 cos (3arctan (-2))
3.9 sin (arctan $2 +$ arctan 3)
3.10 sin^2 ($\frac{1}{2}$arctan $\frac{4}{3}$)

4. จงหาค่าของ arctan $\frac{1}{3}$ $+$ arctan $\frac{1}{5}$ $+$ arctan $\frac{1}{7}$ $+$ arctan $\frac{1}{8}$

5. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

5.1 sin (arcsin x) $= x$
5.2 arcsin (sin x) $= x$
5.3 arctan $x =$ arccot $\frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$
5.4 arcsin $x +$ arccos $x = \frac{\pi}{2}$
5.5 arctan $x +$ arctan $y =$ arctan $(\frac{x+y}{1-xy})$

บรรณานุกรม

[1] กรรณิกา กวักเพฑูรย์, **หลักคณิตศาสตร์**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กทม., 2542

[2] คณะผู้เขียนตำราวิชาคณิตศาสตร์, **ทฤษฎีจำนวน**, มูลนิธิ สอวน, กรุงเทพฯ, 2552

[3] อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย, **ตรรกศาสตร์และระบบจำนวนจริง**, โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, กรุงเทพฯ, 2545

[4] พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ, **ระบบจำนวน**, วี.พริ้นท์(1991), กรุงเทพฯ, 2558

[5] อัจฉรา หาญชูวงศ์, **ทฤษฎีจำนวน**, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2542

[6] David S. Dummit and Richard M. Foote, **Abstract Algebra**, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004