แคลคูลัส ๒

Calculus 2

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2566

แคลคูลัส ๒

MAC1303 Calculus 2

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
แก้ไขล่าสุด : พฤษภาคม 2566

สารบัญ

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

1.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ลำดับ (Sequence) ของจำนวนจริง คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก และค่าเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยมเขียน $a(n)$ แทนด้วย a_n ดังนั้น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \quad \text{หรือ} \quad a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad \text{หรือ} \quad \{a_n\}$$

โดยเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1. $\{1, 3, 5, 7, ...\}$ คำตอบ

2. $2, 7, 12, 17, ...$ คำตอบ

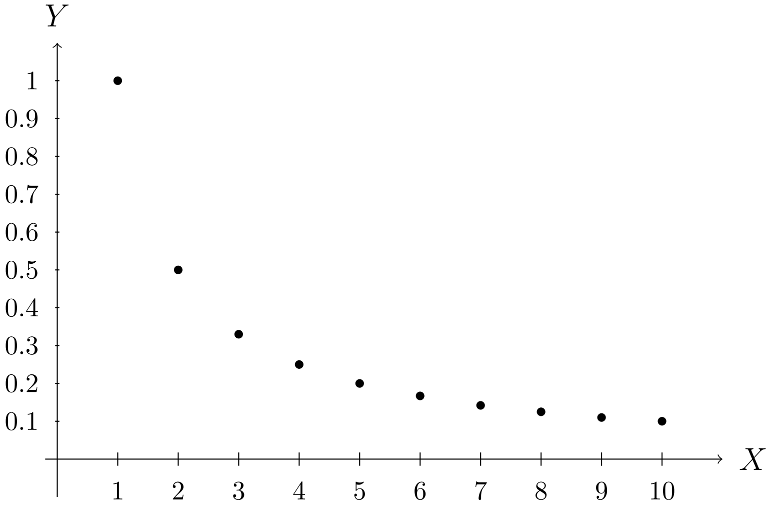
3. $\{-1, 1, -1, 1, ...\}$ คำตอบ

4. $1, 3, 7, 15, ...$ คำตอบ

5. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$ คำตอบ

6. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...\right\}$ คำตอบ

พิจารณากราฟของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$

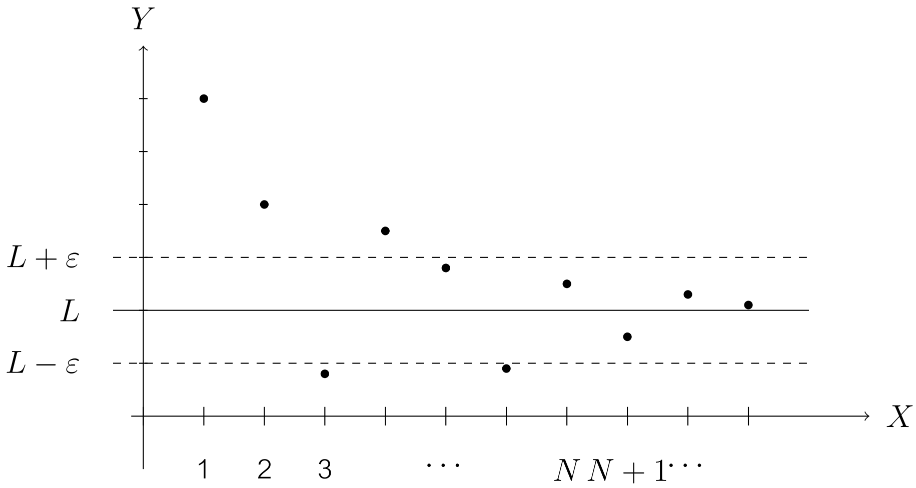


จากกราฟข้างต้นแนวโน้ม $\dfrac{1}{n}$ จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ นั่นหมายถึง $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ แต่เป็นเพียงการคาดเดาเท่านั้นไม่ใช่การพิสูจน์ ซึ่งการยืนยันค่าดังกล่าวต้องอาศัยบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และแสดงความหมายได้ดังกราฟต่อไปนี้



ต่อไปจะเรากล่าวถึง **หลักการอาร์คีมิดีส** (Archimedes Principle) เพื่อใช้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$\text{สำหรับจำนวนจริงบวก } x \text{ ใด ๆ จะได้ว่ามี } n \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } \frac{1}{n} < x$$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักการอาร์คีมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ □

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^t} = 0$$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ และ $t \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\sqrt[t]{\varepsilon} > 0$
โดยหลักการอาร์คีมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\dfrac{1}{N} < \sqrt[t]{\varepsilon}$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า $n^t \geq N^t$ ฉะนั้น

$$\left|\frac{1}{n^t} - 0\right| = \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{N^t} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^t} = 0$ □

เราอาจขยายทฤษฎีบทนี้ไปยัง t ที่เป็นจำนวนจริงบวก ผลที่ได้ยังคงเหมือนเดิม

ทฤษฎีบท 1.1.6 สำหรับค่าคงตัว k ใด ๆ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} k = k$$

บทพิสูจน์. ให้ $a_n = k$ และ $\varepsilon > 0$ ไม่ว่า N เป็นจำนวนนับใด ๆ จะได้ว่า

$$|a_n - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ □

ทฤษฎีบท 1.1.7 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, k \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = kL$$

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M \in \mathbb{R}$
โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n + b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = LM$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^m = L^m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n + 3}{1 - 3n + 2n^2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n + \sqrt[3]{n^3 + 1}}$

ตัวอย่าง 1.1.10 จงหาค่าลิมิต $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

ทฤษฎีบท 1.1.11 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ตัวอย่าง 1.1.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$

ทฤษฎีบท 1.1.13 ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeeze Theorem)
ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $n_0 \in \mathbb{N}$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_n \le b_n \le c_n \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \ge n_0$$

และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 1.1.14 จงใช้ทฤษฎีบทการบีบแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

ทฤษฎีบท 1.1.15 ให้ r เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|r| < 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

ตัวอย่าง 1.1.16 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 3 \cdot 2^n}$

ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

บทนิยาม 1.1.17 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ นอกจากนั้น $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

ตัวอย่าง 1.1.18 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{(n+1)^2}{\sqrt{n^4+1}}\right\}$

2. $\{n-\sqrt{n}\}$

ในบางกรณีเราสามารถหาลิมิต $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ได้จากการหาลิมิต

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง $[1,\infty)$ และ $f(n) = a_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยอาศัยความรู้ใน วิชาแคลคูลัส 1 จะไดทำให้สรุปได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{x\to\infty} f(x) = L,\ \infty \ \text{ หรือ } -\infty \ \text{ แล้ว } \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ตัวอย่าง 1.1.19 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{\ell\text{n} n}{n}\right\}$

ตัวอย่าง 1.1.20 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$

2. $\left\{ n^{\frac{1}{n}} \right\}$

ลำดับย่อย

บทนิยาม 1.1.21 ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้าให้ $b_k = a_{n_k}$ จะได้ว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.22 จงยกตัวอย่างของลำดับย่อยของ $\{2n-1\}$ มาอย่างน้อย 2 ลำดับ

ทฤษฎีบท 1.1.23 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L แล้วจะได้ว่า

ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

จากทฤษฎีบท 1.1.23 เราจะได้ข้อสรุปต่อไปนี้

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่ลิมิตต่างกัน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.1.24 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ลำดับมีขอบเขต

บทนิยาม 1.1.25 จะกล่าวว่าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ มี **ขอบเขต** (bounded) ก็ต่อเมื่อ

มีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 1.1.26 (**ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบมีขอบเขต** (Bounded Convergent Theorem)) ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

บทนิยาม 1.1.27 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น

1. **ลำดับไม่เพิ่ม** (nonincreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$
2. **ลำดับไม่ลด** (nondecreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

และ $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับทางเดียว** (monotone sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มหรือเป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 1.1.28 จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียว

1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

ทฤษฎีบท 1.1.29 (ทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียว (Monotone Convergent Theorem))
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและลำดับทางเดียว แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.1.30 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^5(1-n)^2}{n^4(2n-1)^3}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{\sqrt{n+5}}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n+n^2}{e^n+n}$

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

1.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)-2n^2}{n^2+1}$

1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3n^2+1)}{\ln(n+1)}$

1.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{2n+\sqrt[3]{n^3+5}}$

1.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\cos^2 n}$

1.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n^2+1}$

1.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n \cos n}{n^2+1}$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\left\{\dfrac{\sqrt{9^n+n}}{2^n+3^n}\right\}$

2.2 $\left\{\dfrac{n}{\ln(e^n+1)}\right\}$

2.3 $\left\{\dfrac{3^n+2}{2^n+1}\right\}$

2.4 $\left\{\dfrac{e^n(2n^4+n^3+1)}{n^4(e^n+2^n)}\right\}$

2.5 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}\right\}$

2.6 $\left\{\dfrac{n}{n(-1)^n+2}\right\}$

2.7 $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right\}$

2.8 $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

2.9 $\left\{\dfrac{n!2^n}{(2n)!}\right\}$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

3.1 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n - 3$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

3.2 $a_1 = 6,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

3.3 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

4. จงทดสอบว่าลำดับ $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** (partial sum) ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$
และเรียก $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series) ของจำนวนจริง หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **อนุกรม** (series) ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติเบื้องต้นเกี่ยวกับสัญลักษณ์แทนการบวก โดยให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

ตัวอย่าง 1.2.2 ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = 25$ และ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} b_k = 15$ จงหาค่า $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (a_k + 2b_k - 4)$

อนุกรมเทเลสโคป

ทฤษฎีบท 1.2.3 (**อนุกรมเทเลสโคป** (Telescoping Series))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} \ell\text{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

ทฤษฎีบท 1.2.5 (สูตรของเกาส์ (Gauss' Formula))

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ทฤษฎีบท 1.2.6 จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{10}(3k+1)$

2. $\sum_{n=1}^{10}(2k+1)^2$

3. $\sum_{n=1}^{10}(k-1)^3$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงหาผลบวกต่อไปนี้ $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงแสดงว่า $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

อนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.10 (**อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Series))
ให้ a และ r เป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้ว $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต โดยที่

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่าง 1.2.11 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{k=1}^{10} 2^k$

2. $\sum_{k=1}^{10} 2^{-k}$

3. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^9$

ผลบวกของอนุกรม

บทนิยาม 1.2.12 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** (convergent) และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.15 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.16 (การทดสอบอนุกรมเทเลสโคป (Telescoping Series Test))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.2.17 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell\text{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

ตัวอย่าง 1.2.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.20 (**การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต** (Geometric series Test))

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ } |r| < 1 \text{ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น } \frac{a}{1-r}$$

และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^{-n}$

ทฤษฎีบท 1.2.22 ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

ตัวอย่าง 1.2.23 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1 + 2^n)^2}{5^n}$

ตัวอย่าง 1.2.24 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.25 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.26 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

โดยกฎแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้เรียกว่า **การทดสอบอนุกรมลู่ออก** (Divergent Test)

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ หรือไม่มีลิมิต แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.27 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ อนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.28 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ อนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.29 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.30 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.31 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2^n)^2}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้า $\sum_{k=1}^{8} a_k = 20$ และ $\sum_{k=1}^{8} b_k = 5$ จงหาค่า

   1.1 $\sum_{k=1}^{8}(3a_k - 2b_k)$

   1.2 $\sum_{k=1}^{8} 2(a_k + 3b_k - 1)$

2. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

   2.1 $\sum_{k=1}^{11} k(3-2k)$

   2.2 $\sum_{k=1}^{11}(k+1)^3$

   2.3 $\sum_{k=1}^{15} \sqrt{(k-2)^2}$

   2.4 $\sum_{k=1}^{100} k(1+(-1)^k)$

   2.5 $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k^2+4k+3}$

   2.6 $\sum_{k=1}^{100} \ell\mathrm{n}\left(\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}\right)$

   2.7 $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + 50\cdot 51\cdot 52$

   2.8 $1\cdot 99 + 2\cdot 97 + 3\cdot 95 + \cdots + 49\cdot 3$

   2.9 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2$

   2.10 $1 + (1+3) + (1+3+5) + \cdots + (1+3+5+\cdots+99)$

3. จงแสดงว่า $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$

4. จงแสดงว่า $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. จงใช้อนุกรมเทเลสโคปพิสูจน์ว่า

   5.1 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   5.2 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

6.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

6.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+n-1}}{3n^2+1}$

6.3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

6.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ell\text{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

6.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3^n}+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$

6.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{3^n+5^n}$

6.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}-4^n}{10^n}$

6.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n}+1}{2^n}$

6.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

6.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

6.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+4n+3}+4^{-n}\right)$

6.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$

6.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

6.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)$

6.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$

6.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

6.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

6.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

6.19 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$

6.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{sin}n$

6.21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

6.22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+4+6+\cdots+(2n)}$

7. จงยกตัวอย่างอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ที่ทำให้

7.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

7.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

8. ให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

1.3 การทดสอบแบบปริพันธ์

ทฤษฎีบท 1.3.1 **การทดสอบแบบปริพันธ์** (Integral Test)
ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ มีค่าเป็นบวก เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บนช่วง $[n_0, \infty)$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า \quad ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \text{ มีค่าเป็นจำนวนจริง}$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.3.4 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

อนุกรมพีและการทดสอบอนุกรมพี

บทนิยาม 1.3.5 อนุกรมพี (p-Series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.3.6 (การทดสอบอนุกรมพี (p-Series Test))

อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 1.3.7 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}}$

ตัวอย่าง 1.3.8 จงพิจารณาว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} + (-2)^n\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบปริพันธ์

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+4}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n(2^{-\ln n}+1)}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3^{-n}} + \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n^5}}}\right)$

2.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)$

2.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{n^3}\right)$

1.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 1.4.1 (**การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ** (The Comparision Test))
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geq n_0$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ทฤษฎีบท 1.4.4 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต (The Limit Comparision Test))
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^4+n+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$

ตัวอย่าง 1.4.6 จงทดสอบว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n-3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.7 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.8 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\text{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+3n^2+1}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(3n-1)^4}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{n}\right)^4$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\ell\text{n}(n+1)}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n3^n+5}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}n}{n\sqrt{n}}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}n}{e^n\ell\text{n}(n+2)}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n3^n-2}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{-2\ell\text{n}n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n3^n-1}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n+5^n}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^5}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n^2}$

2. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)^p} \quad \text{เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก ๆ } p > 1$$

1.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.5.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.5.2 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

บทนิยาม 1.5.3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วเรียกอนุกรมนี้ว่าเป็นอนุกรม

1. **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolute convergece) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergence) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.4 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 1.5.6 (การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.7 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

ตัวอย่าง 1.5.8 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ln n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.9 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์

ทฤษฎีบท 1.5.10 (**การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์** (The Root Test))
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้ □

ตัวอย่าง 1.5.11 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n}$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{e^n}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n+n+1}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^n}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(n+1)}\right)^n$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln(n+1)}{3^n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+1)}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$

1.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

1.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{n+1}+2^n}{3e^n+5}\right)^n$

1.21 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n+1)}\right)^n$

2. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

1.6 อนุกรมสลับ

บทนิยาม 1.6.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 1.6.2 (การทดสอบอนุกรมสลับ (Alternating Series Test : AST))
อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ และ } \{a_n\} \text{ เป็นลำดับลด หรือมี } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } \quad a_{n+1} < a_n \quad \text{ทุก } n \geq n_0$$

ตัวอย่าง 1.6.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

ตัวอย่าง 1.6.4 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\mathrm{n}(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ell\text{n}(n+2)}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\ell\text{n}n}}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4-n+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n+3^n}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\text{arctan}n}{4n^3-1}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\text{sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\text{arctan}n$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^n}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\ell\text{n}n)^p}{n}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+n}+1}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2(1-n)^3}{n(2n-1)^4}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\left\{\dfrac{\ln n}{n^2}\right\}$

2.2 $\left\{\dfrac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}\right\}$

2.3 $\left\{\dfrac{(3n+1)^2}{\sqrt{n^4+4}}\right\}$

3. จงหาลิมิตของลำดับ $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\right\}$

4. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

4.1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(2-k)(1-k)$

4.2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(2k+1)^2$

4.3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2+4k+3}$

4.4 $2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2$

4.5 $2+(2+4)+(2+4+6)+\cdots+(2+4+6+\cdots+100)$

5. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

5.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$

5.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+n+1}}{n^2+3}$

5.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5^n}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

5.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{5^n}$

6. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

6.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n+3)^2}$

6.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sec^4 n}{\sqrt[3]{n}}$

6.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}+n^{-n}\right)$

6.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3 3^{-n}$

6.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{n+1}\right)^2$

6.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\ell\text{n}\, n}{n(n+1)^3}$

6.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

6.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^7+3}}$

6.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

6.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$

6.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$

6.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ell\text{n}(n+3)}$

6.13 $\sum_{n=1}^{\infty}n4^{-n^2}$

6.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n-n}$

6.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{2}{2n+1}\right)$

6.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{-\ell\text{n}(e^n+n)}$

6.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ell\text{n}(n+4)}$

6.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-2\text{arctan}\, n)$

6.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ell\text{n}(n+1)}$

6.20 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n^2}n^n$

6.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}\, n}{n\sqrt[4]{n}}$

6.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell\text{n}(3^n+1)}$

6.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(3+\cos n)^{-n}$

6.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

6.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\ell\text{n}\left(\frac{n+10}{n+5}\right)$

6.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$

6.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

6.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}(n+1)}{n!}$

6.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2+\ell\text{n}\, n)^2}$

6.30 $\sum_{n=1}^{\infty}9^{-\ell\text{n}\, n}$

6.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}\, n}{3^n-n}$

6.32 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}2^n+1}$

6.33 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3^n}{4^n-1}\right)$

6.34 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{4}\right)^{-n}$

6.35 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}+1\right)^{-2n}$

6.36 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ell\text{n}\, n}$

6.37 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell\text{n}\, n}{2^n}$

6.38 $\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n^3}$

6.39 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{3^n}+\frac{\cos^2 n}{4^n}\right)$

6.40 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^9}{n^3(n+2)^{10}}$

6.41 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

6.42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(5)(7)(9)\cdots(2n+3)}$

6.43 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)(4)(6)\cdots(2n)}{n!}$

6.44 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}$

6.45 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

6.46 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

6.47 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ell \text{n} n}$

6.48 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sin} n}{3^n}$

6.49 $\sum_{n=1}^{\infty} n\text{sin}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

6.50 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ell\text{n}(e^n+1)}$

6.51 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cos}(n!)}{n!}$

6.52 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n-3n^2}{\sqrt{n^6+2}}$

6.53 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ell\text{n}(n+2)}{n}$

6.54 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{sin}^2 n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

6.55 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\text{sin} n}$

6.56 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\text{cos} n\right]^n$

6.57 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cos}(\frac{n\pi}{3})}{n!}$

6.58 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

6.59 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-\text{cos} n}{n^{\frac{2}{3}}-2}$

6.60 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

6.61 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$

6.62 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$

6.63 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-n\right)$

6.64 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n!}$

7. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

7.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

7.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$

7.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(e^n+1)}$

7.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ell\text{n} n}{\ell\text{n}(n+2)}$

7.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

7.6 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{1}{n}}$

7.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+\ell\text{n} n}$

7.8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \text{tan}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

7.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

7.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\text{cos} n\pi}{2^n}$

8. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

8.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$

8.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{2^n}$

9. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง p ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าและเป็นอนุกรมลู่ออก

บทที่ 2

อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

เรียก a ว่า **จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง** (center of power series)
และเรียก $c_n \in \mathbb{R}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง** (coefficients of power series)
หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้า c_0 เมื่อ $x = a$ เสมอ

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา x ที่ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง a
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้
   อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.1.3 จำนวน R ในทฤษฎีบท **??** ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R = 0$ และในข้อ 3 ให้ $R = \infty$

บทนิยาม 2.1.4 เรียกเซต

$$\left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \right\}$$

ว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergent) ของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะได้ว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$ และ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n2^n}$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหา x ที่ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2x^n}{2^n}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{3^n}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(x-3)}{\cos n}\right)^n$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{n^4+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-e)^n}{ne^n}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^n$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n4^n}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2 4^n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 27^n}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{n\sqrt{n}}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{4^n \ell \ln n}$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-3)^n}{n^3}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. จงหาโดเมนของ **ฟังก์ชันเบสเซล** (Bessel function) อันดับ 0 และ 1 ที่กำหนดโดย

2.1 $\displaystyle J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

2.2 $\displaystyle J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$

2.2 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าบนช่วง I ถ้าอนุกรมนี้มีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุก ๆ } x \in I$$

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** (sum function) ของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บน I

ต่อไปเราจะใช้อนุกรมเรขาคณิต (เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาฟังก์ชันผลบวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{1-2x}$
2. $\dfrac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{x^2+4}$

2. $\dfrac{x}{x^2-1}$

3. $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

บทนิยาม 2.2.6 กำหนดให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{บนช่วง } (a-R, a+R)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมนี้ จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x \in (a-R, a+R)$ และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \text{ทุกค่า } x \in (a-R, a+R)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^{n+2}$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$

ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-4x^2)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.11 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\ell\text{n}2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

ตัวอย่าง 2.2.12 ให้ $f(x) = \text{arctan}x$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nx^n$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^n}{2}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$

1.4 $\sum_{n=0}^{\infty}n(-x)^{n-1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}n(2x)^n$

1.6 $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{3n}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}x^{n+1}$

1.8 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n+1}$

2. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

2.1 $f(x) = \frac{2}{3-2x}$

2.2 $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$

2.3 $f(x) = \frac{1}{x+10}$

2.4 $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

2.5 $f(x) = \frac{1+x}{1+x}$

2.6 $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$

2.7 $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$

2.8 $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$

2.9 $f(x) = -\frac{x^3}{(1+x)^2}$

2.10 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$

2.11 $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

2.12 $f(x) = \frac{x^2}{(1-5x)^2}$

3. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

3.1 $f(x) = \ell\text{n}(5-x)$

3.2 $f(x) = x\ell\text{n}(x+1)$

3.3 $f(x) = x^2\text{arctan}(x^3)$

3.4 $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

3.5 $f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^3$

3.6 $f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

2.3 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด a ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า $T_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์** (Taylor polynomial) ดีกรี n ของ f ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **พหุนามแมคลอริน** (Maclaurin polynomial) นั่นคือ

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4 รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x) = \ell\text{n}x$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด I สำหรับ $x, a \in I$
จะได้ว่ามี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}$ เรียกว่า **เศษเหลือ** (remainder)

หมายเหตุ ความผิดพลาด $R_n(x)$ โดยที่

$$|R_n(x)| < 0.\underbrace{000...0}_{r+1}5$$

จะบอกค่าประมาณความถูกต้องอย่างน้อยทศนิยม r ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$ จงหาประมาณค่าของ $\ell\text{n}(1.5)$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 7 ของ f พร้อมทั้งบอกค่าประมาณนี้ว่าถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมกี่ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.7 ให้ $f(x) = x\sin x$ จงหาประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_n(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

1.1 $f(x) = \text{sin}x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 9$
1.2 $f(x) = \text{cos}x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 8$
1.3 $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
1.4 $f(x) = \sqrt{x+1}$	เมื่อ $a = 3$ และ $n = 5$
1.5 $f(x) = e^{x^2}$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
1.6 $f(x) = x^2\ell\text{n}x$	เมื่อ $a = 1$ และ $n = 4$
1.7 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$	เมื่อ $a = 1$ และ $n = 3$
1.8 $f(x) = \ell\text{n}(\text{cos}x)$	เมื่อ $a = \frac{\pi}{4}$ และ $n = 3$
1.9 $f(x) = x\text{cos}x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$
1.10 $f(x) = x^2\text{sin}x$	เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$

2. จงหาค่าประมาณของค่าต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่ทำให้คำตอบถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมตำแหน่งที่ 3

2.1 $\text{sin}12^\circ$	2.4 $\sqrt{4.2}$
2.2 $\text{cos}12^\circ$	2.5 $e^{0.5}$
2.3 $\ell\text{n}(1.02)$	2.6 $\sqrt[3]{7.9}$

3. ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^{0.6} e^{-x^2}\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ โดยที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \tag{2.1}$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \tag{2.2}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.4}$$

เมื่อแทน $x = a$ ในสมการ (2.1)-(2.4) จะได้

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \text{และ} \quad c_3 = \frac{f''(a)}{3!}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, ...$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับ และ f มีค่าที่จุด a อนุกรมที่เขียนในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ของ f รอบจุด a
ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series) นั่นคือ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ รอบจุด 1

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

สำหรับ $|x-a| < R$ เมื่อ R คือรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = \sin x$

2. $f(x) = \cos x$

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ell\mathrm{n}(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \cdots \qquad R = 1$$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงใช้อนุกรมแมคลอรินของ e^x หาค่าลิมิตของ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

ตัวอย่าง 2.4.7 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x\ell\text{n}x$ รอบจุด 1

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

   1.1 $f(x) = \ell\text{n}(1-x)$ เมื่อ $a = 0$

   1.2 $f(x) = \cos x$ เมื่อ $a = \pi$

   1.3 $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $a = 1$

   1.4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ เมื่อ $a = 1$

   1.5 $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ เมื่อ $a = -1$

   1.6 $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ เมื่อ $a = 2$

   1.7 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ เมื่อ $a = 0$

   1.8 $f(x) = \sqrt{x+1}$ เมื่อ $a = 3$

2. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

   2.1 $f(x) = \sin(x^2)$

   2.2 $f(x) = x^2\cos x$

   2.3 $f(x) = x\ell\text{n}(x-1)$

   2.4 $f(x) = \sin^2 x$

   2.5 $f(x) = e^x + e^{2x}$

   2.6 $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x)$

   2.7 $f(x) = x^2\ell\text{n}(1+x^3)$

   2.8 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

3. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = (x+1)^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

4. จงฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

   4.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n)!}$

   4.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

5. จงใช้อนุกรมแมคลอรินหาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ell\text{n}(1+x)}{x^2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2}$

2. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^n}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{2n+1}$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$

3. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

3.1 $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

3.2 $f(x) = \dfrac{x}{2x-2}$

3.3 $f(x) = \dfrac{x^4}{(1-2x^2)^2}$

3.4 $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

3.5 $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

3.6 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

3.7 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}$

3.8 $f(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

4. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_5(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 10x^5 + 4x^3 - x^2 + 2x + 1$$

รอบจุด 1 พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T_5(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่

5. ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt{7.99}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดผลาด

6. ให้ $f(x) = x\cos x$ จงประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดผลาด

7. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} \qquad \text{รอบจุด } 0$$

และหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งตรวจสอบว่าอนุกรมที่ได้เท่ากันหรือไม่

8. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = x\ell\text{n}(2-x)$ รอบจุด 1 โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

9. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sin^2 x$ รอบจุด 0 โดยใช้ตารางเทย์เลอร์

10. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{4n+3}}{(2n)!}$

11. จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์หาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

บทที่ 3

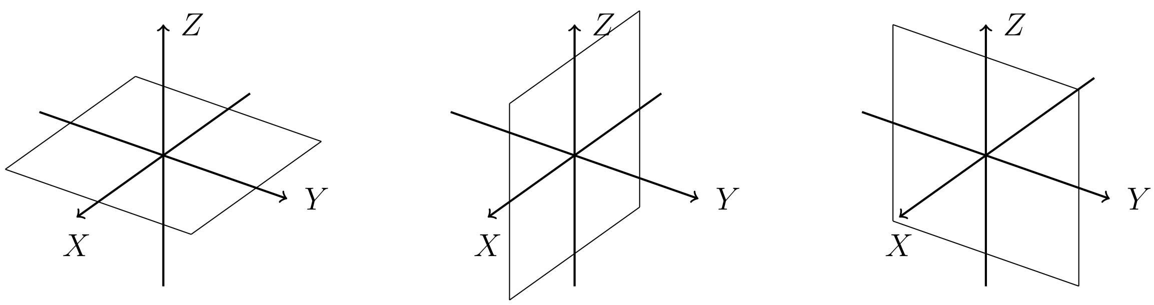
ปริภูมิสามมิติ

3.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดใน **ปริภูมิสามมิติ** (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดการที่จุด O เรียกว่า **จุดกำเนิด** (origin) และเรียก

ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)

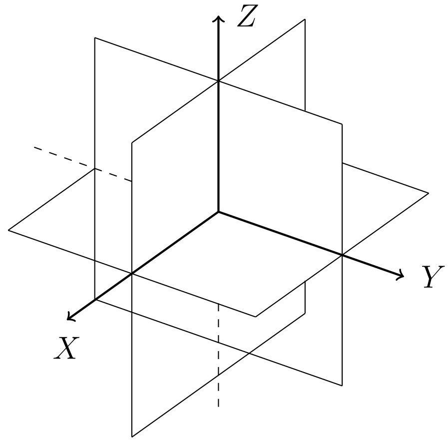
รูปที่ 3.1: ระนาบ XY, XZ และ YZ



ระนาบ XY ระนาบ XZ ระนาบ YZ

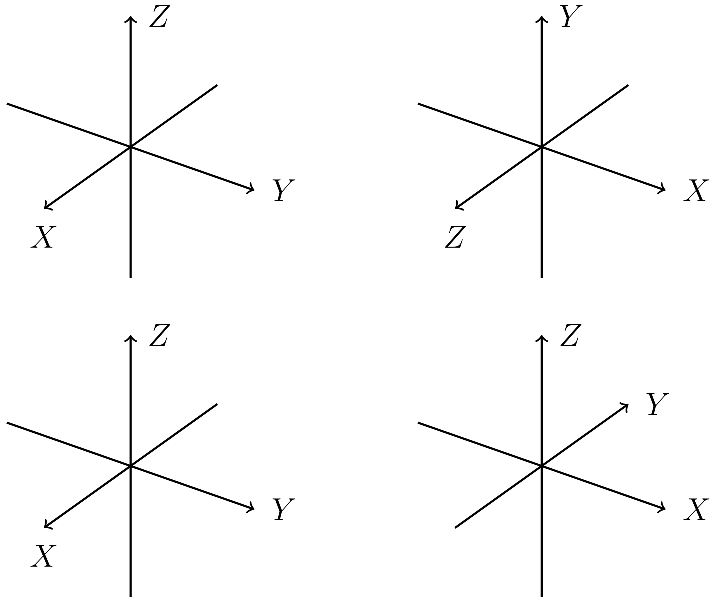
ระนาบพิกัดฉากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค** (Octance)

รูปที่ 3.2: แสดงการแบ่งอัฐภาค



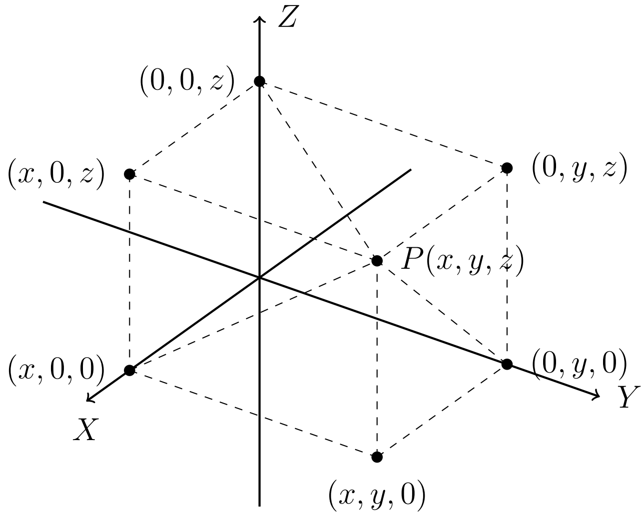
การเลือกทิศทางที่เป็นบวกของพิกัดฉาก เรานิยมใช้กฎมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือไปทางแกน Z บวก นิ้วชี้ ไปทางแกน X บวก และนิ้วกลาง ชี้ไปทางแกน Y บวก ตั้งฉากกันเสมอ ตัวอย่างดังรูปต่อไปนี้ เราจะเลือกใช้แบบใดแบบหนึ่งตามความเหมาะสม

รูปที่ 3.3: แสดงการตั้งแกนในปริภูมิสามมิติ



การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดเป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ $\mathbb{R}^3$ แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ

รูปที่ 3.4: แสดงจุด P และภาพฉายต่าง ๆ ของ P



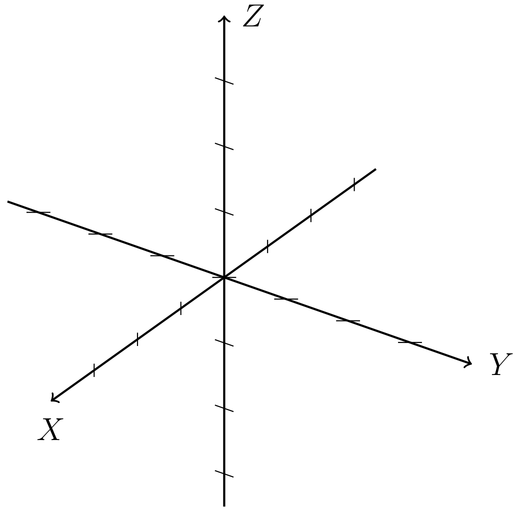
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XY ไปยังแกน Z จะได้จุด $(0, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** (projection) ของ P แกน Z
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ YZ ไปยังแกน X จะได้จุด $(x, 0, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน X
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XZ ไปยังแกน Y จะได้จุด $(0, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน Y
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Z ไปที่ระนาบ XY จะได้จุด $(x, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XY
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน X ไปที่ระนาบ YZ จะได้จุด $(0, y, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ YZ
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Y ไปที่ระนาบ XZ จะได้จุด $(x, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XZ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาภาพฉายทั้งหมดของจุด $P(1, 2, 3)$

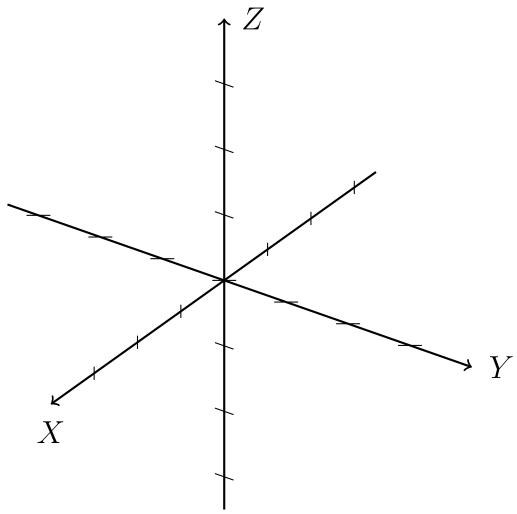
1. ภาพฉายบนระนาบ XY ของจุด P คือ
2. ภาพฉายบนระนาบ XZ ของจุด P คือ
3. ภาพฉายบนระนาบ YZ ของจุด P คือ
4. ภาพฉายบนแกน X ของจุด P คือ
5. ภาพฉายบนแกน Y ของจุด P คือ
6. ภาพฉายบนแกน Z ของจุด P คือ

ตัวอย่าง 3.1.2 จงเขียนจุดต่อไปนี้ในปริภูมิสามมิติ

1. $P(1, 2, 3)$



2. $Q(1, -2, 2)$



แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

   1.1 $A(5,0,0)$

   1.2 $B(0,2,1)$

   1.3 $C(3,1,0)$

   1.4 $D(-3,0,2)$

   1.5 $E(1,1,3)$

   1.6 $F(-4,2,-3)$

   1.7 $G(2,1,-2)$

   1.8 $H(3,-2,6)$

2. จงหาภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY, XZ และ YZ

   2.1 $P(3,1,2)$

   2.2 $P(1,2,-2)$

   2.3 $P(4,-1,0)$

   2.4 $P(-8,9,7)$

3. จงหาภาพฉายของจุด P บนแกน X, Y และ Z

   3.1 $A(5,0,0)$

   3.2 $B(0,2,1)$

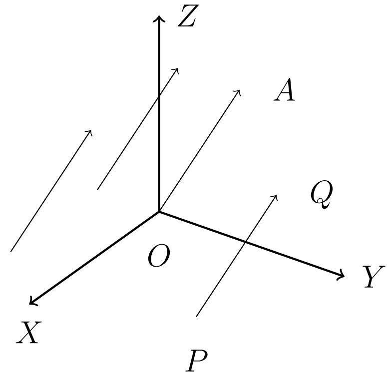
   3.3 $C(3,1,0)$

   3.4 $D(-3,0,2)$

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ ใช้สัญญาลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\overrightarrow{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

รูปที่ 3.5: เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\|\overrightarrow{PQ}\|$

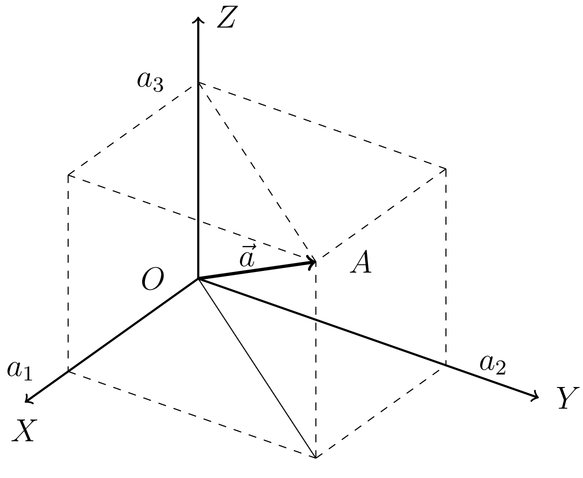


บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$
แล้ว $\vec{a}$ เป็น**เวกเตอร์ตำแหน่ง** (position vector) ของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1, a_2 และ a_3 ว่า**ส่วนประกอบ** (component) ของ $\vec{a}$ ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ

รูปที่ 3.6: แสดงเวกเตอร์ $\vec{a}$ ในปริภูมิสามมิติ



จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

บทนิยาม 3.2.2 เวกเตอร์ที่มีตัวประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

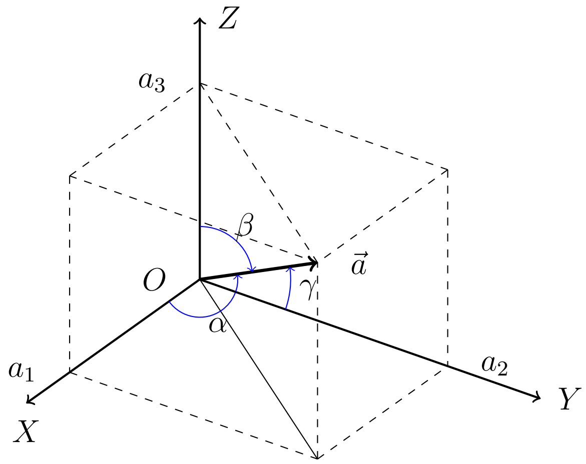
ข้อตกลง เมื่อ P เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แทนด้วย $\vec{P}$

หมายเหตุ $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$ และ $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

มุมแสดงทิศทาง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก α, β, γ ว่า**มุมแสดงทิศทาง** (direction angles) ของ $\vec{a}$ และ cosα, cosβ, cosγ ว่า**โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\vec{a}$

รูปที่ 3.7: มุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a}$



จากรูปจะได้ว่า $\qquad \cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ขนาด และโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อ $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0-4)$

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = \langle -1, 1, \sqrt{2} \rangle$

บทนิยาม 3.2.6 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle -1, -4, 7 \rangle$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{a} + \vec{b}$

2. $2\vec{a} + 3\vec{b}$

3. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $(ck)\vec{a}=c(k\vec{a})=k(c\vec{a})$
6. $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$
7. $(c+k)\vec{a}=c\vec{a}+k\vec{a}$
8. $1\vec{a}=\vec{a}$
9. $0\vec{a}=\vec{0}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.2.9 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^3$ และจะได้ว่า

$\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศเดีย**วกับ $\vec{a}$

$-\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศตรงข้าม**กับ $\vec{a}$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{u} = \langle 1, -2, 2\rangle$

2. $\vec{v} = \langle 1, 1, \sqrt{2}\rangle$

3. $\vec{w} = \langle 3\sin\theta, 4\sin\theta, 5\cos\theta\rangle$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ

$$\vec{i} = \langle 1,0,0\rangle \qquad \vec{j} = \langle 0,1,0\rangle \qquad \vec{k} = \langle 0,0,1\rangle$$

ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1,0,0\rangle + a_2\langle 0,1,0\rangle + a_3\langle 0,0,1\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.11 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$
ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a}\cdot\vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ตัวอย่าง 3.2.12 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3\rangle$

2. $\vec{a} = \langle 2, 1, -7\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 4, 6, 2\rangle$

3. $\vec{a} = \langle 2\text{sin}x, \text{cos}x, 1\rangle$ และ $\vec{b} = \langle \text{sin}x, 2\text{cos}x, 1\rangle$

ทฤษฎีบท 3.2.13 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

ทฤษฎีบท 3.2.14 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
2. $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
3. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$
4. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$

ตัวอย่าง 3.2.15 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ จงหาค่าของ

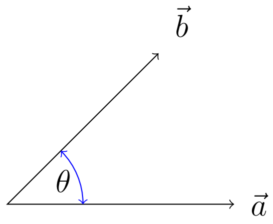
$$\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2 + \|3\vec{u}-2\vec{v}\|^2$$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.2.16 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป



ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ตั้งฉากกัน** (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ หรือ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 3.2.17 ให้ $A(1,2,0)$, $B(0,4,2)$ และ $C(3,2,-2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $B\hat{A}C$

ตัวอย่าง 3.2.18 ให้ $\vec{a} = \langle 3,2,-1\rangle$, $\vec{b} = \langle 1,-1,1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3,4,-2\rangle$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกัน

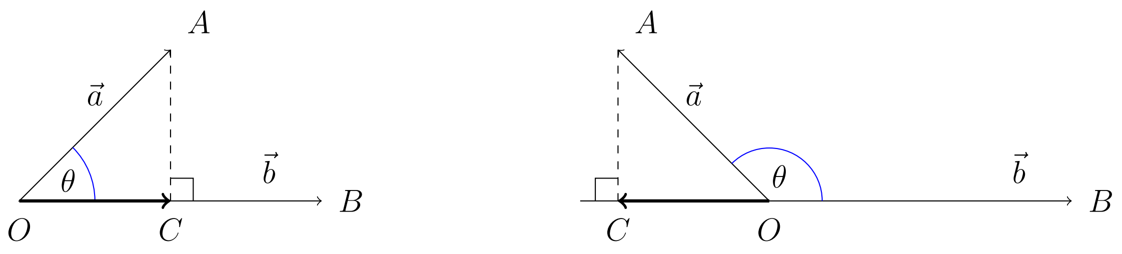
ตัวอย่าง 3.2.19 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\frac{\|3\vec{u}+4\vec{v}\|}{\|5\vec{u}-12\vec{v}\|}$$

ภาพฉายเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.20 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด C ดังรูป

รูปที่ 3.8: แสดงตัวอย่างภาพฉายเวกเตอร์



เรียก $\overrightarrow{OC}$ ว่า **ภาพฉายเวกเตอร์** (vector projection) ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$

ทฤษฎีบท 3.2.21 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า

$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b}$$

ตัวอย่าง 3.2.22 จงหาภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, -2\rangle$

2. $\vec{a} = \langle 3, 1, 2\rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, 4\rangle$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.23 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \times \vec{b}$ คือ

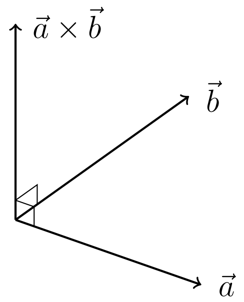
$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

หรือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ M

รูปที่ 3.9: แสดงตัวอย่างผลคูณเชิงเวกเตอร์



ตัวอย่าง 3.2.24 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 1, -1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \times \vec{b}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

ทฤษฎีบท 3.2.25 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

บทตั้ง 3.2.26 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

ทฤษฎีบท 3.2.27 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้ว

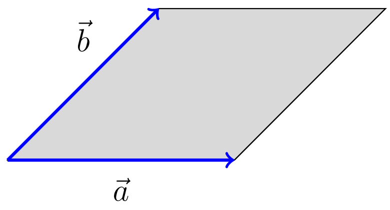
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sin}\theta$$

ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ขนานกัน** (paralell) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.28 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็น เวก เตอร์ ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว พื้นที่ รูป**สี่ เหลี่ยม ด้าน ขนาน** (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

รูปที่ 3.10: พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$



ข้อสังเกต พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

ตัวอย่าง 3.2.29 จง หา พื้นที่ ของ สามเหลี่ยม ที่ มี จุด ยอด เป็น $A(2,-1,2)$, $B(-1,3,1)$ และ $C(0,2,-3)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.30 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์** (scalar triple products) ของ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ คือ $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ หรือ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ นั่นคือ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

ตัวอย่าง 3.2.31 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 0, 1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

ทฤษฎีบท 3.2.32 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ หรือกล่าวได้ว่า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a} \times \vec{b}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$
3. ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ แล้ว $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

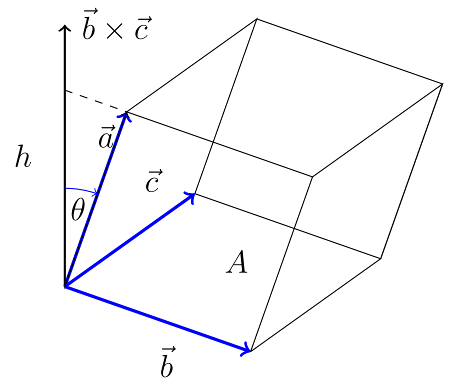
ตัวอย่าง 3.2.33 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1, -3, 4 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

ตัวอย่าง 3.2.34 จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1,4,-7\rangle$, $\langle 2,-1,4\rangle$ และ $\langle 0,-9,18\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.35 ปริมาตรของ**รูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน** (parallepiped) ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เท่ากับ $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

รูปที่ 3.11: ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$



บทพิสูจน์. จากรูป 3.11 จะได้ว่า $V = Ah = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \|\vec{a}\| |\cos\theta| = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$ □

ตัวอย่าง 3.2.36 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\langle 1,1,-1\rangle$, $\langle 2,1,0\rangle$ และ $\langle 0,1,3\rangle$

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 0\rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 2\rangle$, $\vec{c} = \langle 1, 0, 3\rangle$ และ $\vec{d} = \langle -2, 1, 5\rangle$ จงหา

    1.1 $2\vec{a} - 3\vec{b}$

    1.2 $\|\vec{c} + 2\vec{d}\| + \|2\vec{a} + \vec{b}\|$

    1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c} - \vec{d}$

    1.4 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b} + \vec{c}$

    1.5 มุมระหว่าง $\vec{a} + \vec{c}$ กับ $\vec{a} - \vec{c}$

    1.6 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$

    1.7 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{c}$

    1.8 เวกเตอร์ 5 หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{c}$

    1.9 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{d}$

2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| + \|3\vec{u} - 5\vec{v}\|$$

3. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

    3.1 $(ck)\vec{a} = c(k\vec{a}) = k(c\vec{a})$

    3.2 $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$

    3.3 $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$

    3.4 $1\vec{a} = \vec{a}$

    3.5 $0\vec{a} = \vec{0}$

4. ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

5. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3, 1, 2)$, $(-5, 1, 0)$ และ $(4, -2, 1)$

6. กำหนดให้ $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 0)$ และ $D(2, 1, -1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1\rangle$

8. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

9. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 5, -2\rangle$, $\langle 3, -1, 0\rangle$ และ $\langle 5, 9, -4\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

10. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

10.1 ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ แล้ว $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

10.2 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

10.3 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

10.4 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$

10.5 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

10.6 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

10.7 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

11. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงพิสูจน์ว่า

11.1 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ หรือกล่าวได้ว่า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a}\times\vec{b}$

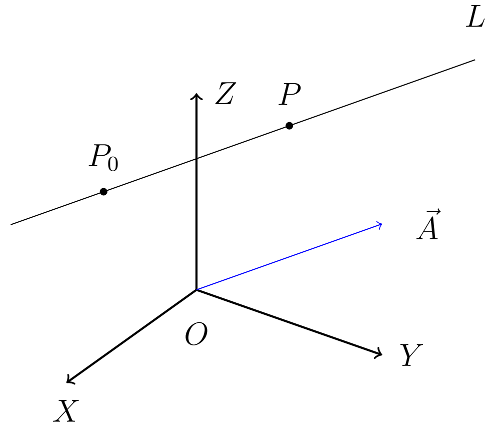
11.2 $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$

11.3 ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=0$ แล้ว $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ว่า **เส้นตรง** (Line) ที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$ และเรียก $\vec{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง** (direction vector) ของเส้นตรง

รูปที่ 3.12: เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ดังนั้นจะได้ว่ามี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \tag{3.1}$$

ถ้ากำหนดจุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\vec{A} = \langle a, b, c\rangle$ ดังนั้น

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle \tag{3.2}$$

เรียกสมการ (3.1) หรือ (3.2) ว่า **สมการเวกเตอร์** (vector equation) ของเส้นตรง L
จากสมการ (3.2) เราจะแยกเขียนสมการสำหรับส่วนประกอบได้เป็น

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$

หรือ

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct \tag{3.3}$$

เรียกสมการ (3.3) ว่า **สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม** (parametric equation) ของเส้นตรง L
ถ้า a, b, c ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{3.4}$$

เรียกสมการ (3.4) ว่า **สมการสมมาตร** (symmetric equation) ของเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และขนานกับ $\vec{A} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1, 3, 4)$ และ $P_2(1, -2, 3)$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงตรวจสอบว่าจุด $P(1,-2,3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $L_1 : \ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+5}{3} = z-2$
2. $L_2 : \ x = 3-t, \quad y = 2-4t, \quad z = 3+t$

ตัวอย่าง 3.3.5 จุด $A(1,2,0)$, $B(-1,3,4)$ และ $C(-1,1,-4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดระนาบ XY ระนาบ XZ และ ระนาบ YZ

1. $x = 1 + t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = t - 3$

2. $\dfrac{3-x}{3} = \dfrac{y-10}{5}, z = 4$

การขนานกันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.7 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน (parallel line) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และขนานกับเส้นตรง

$$L: \; x + 2 = \frac{4-y}{2} = 1 - z$$

การตัดกันของเส้นตรง

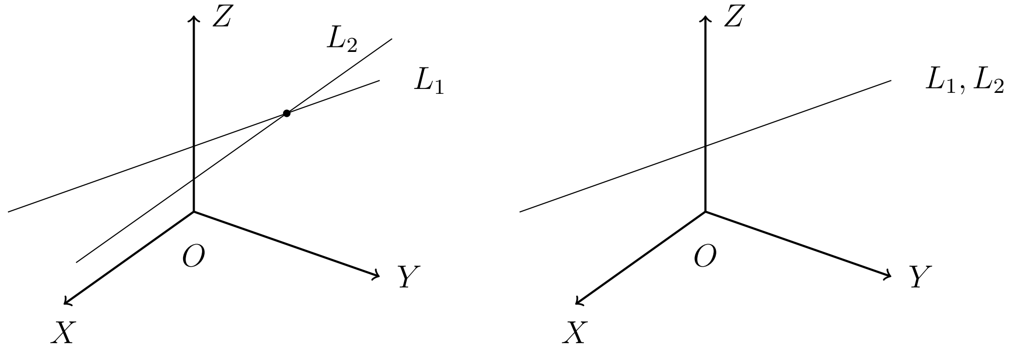
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ในปริภูมิสามมิติมีลักษณะดังนี้

1. เกิดจุดตัด

   1.1 เกิดตัดกันเพียงจุดเดียว

   1.2 เกิดตัดกันมากกว่าจุดเดียว

รูปที่ 3.13: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ตัดกัน

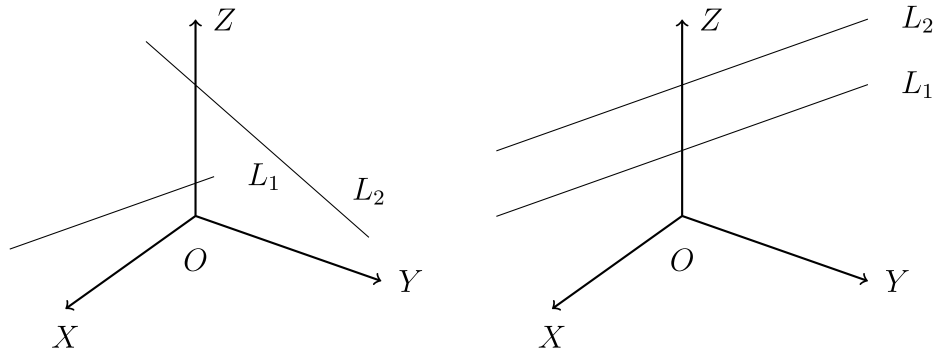


2. ไม่เกิดจุดตัด

   2.1 ไม่เกิดจุดตัดกัน และเส้นตรงไม่ขนานกัน

   2.2 ไม่เกิดจุดตัด แต่เส้นตรงขนานกัน

รูปที่ 3.14: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ไม่ตัดกัน



ตัวอย่าง 3.3.9 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 9 + 3s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.3.10 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1 : 2 - x = 3 - y = \frac{z-1}{2} \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{7-x}{3} = y = z - 1$$

การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.11 เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew line) ก็ต่อเมื่อเราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกันได้ หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกันไม่ไม่ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.12 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t \\ 3z &= 2 + t \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} x &= 2 - 2s \\ y &= 1 + 4s \\ z &= 1 - 2s \end{cases}$$

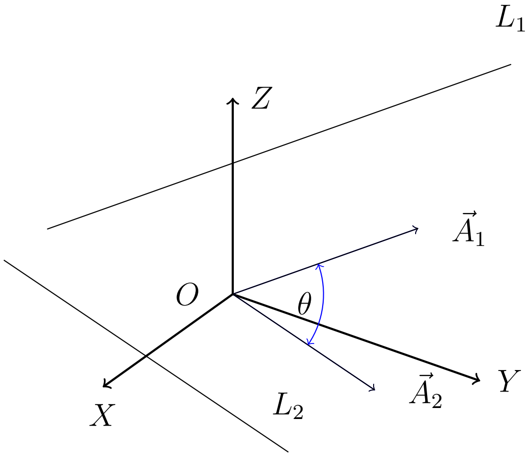
ตัวอย่าง 3.3.13 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1 \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$$

มุมระหว่างเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.14 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้น

รูปที่ 3.15: มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น



$$\cos\theta = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\|\vec{A}_1\|\|\vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.15 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

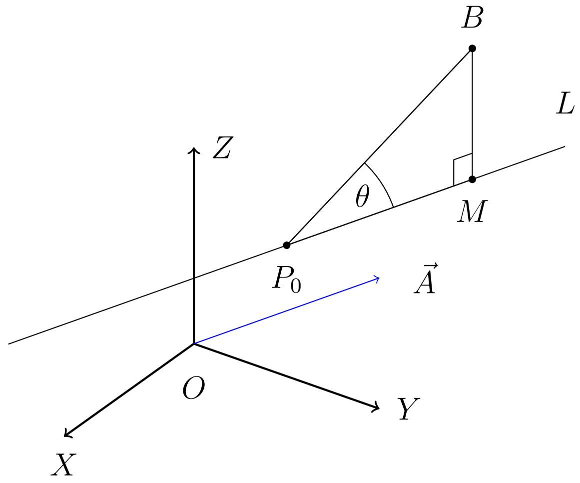
1. $L_1 : x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad 2z = 1 + 4t$
   $L_2 : x = -3s, \quad y = 2 + 4s, \quad z = 5s - 1$

2. $L_1 : 2x - 1 = y = \dfrac{1 - z}{3}$ และ $L_2 : \dfrac{x}{4} = y - 1 = z$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

การวัดระยะทางระหว่างจุด B กับเส้นตรง L คือความยาวที่สั้นที่สุดจากจุด B ไปยังเส้นตรง L หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด B ไปยังเส้นตรง L ที่จุด M เรียกจุด M ว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก** (Orthogonal point)

รูปที่ 3.16: จุดเชิงเส้นตั้งฉากจาก B ไปยังเส้นตรง L



จากรูป 3.16 จะได้ว่า $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{P_0B}\|\text{sin}\theta$ เนื่องจาก $\vec{A}$ ขนานกับ $\overrightarrow{P_0M}$ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{PB}$ กับ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\|\|\vec{A}\|\text{sin}\theta}{\|\vec{A}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

จากรูป 3.16 เห็นได้ชัดว่า $\overrightarrow{P_0M}$ คือภาพฉายเวกเตอร์ของ $\overrightarrow{P_0B}$ บน $\vec{A}$ ฉะนั้น

$$\overrightarrow{P_0M} = \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}$$

$$\vec{M} - \vec{P_0} = \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}$$

ดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{P_0} + \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right)\vec{A}$$

ตัวอย่าง 3.3.16 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด $B(2, 1, -1)$ บนเส้นตรง

$$L: \; x = 5 + 4t, \; y = 2 - t, \; z = 4 + 3t$$

พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรงนี้

ตัวอย่าง 3.3.17 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1,-1,2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง

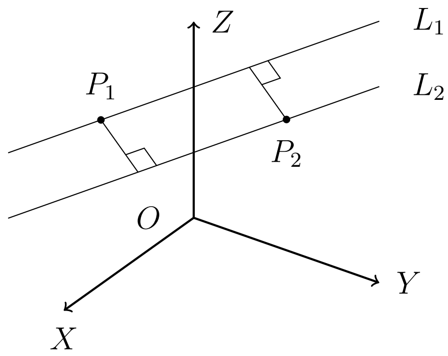
$$L:\ x-1=\frac{3-y}{2}=-z$$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.18 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

1. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

รูปที่ 3.17: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน



ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 คือ ระยะทางระหว่างจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือ P_2 ไปยัง L_1 นั้นคือ

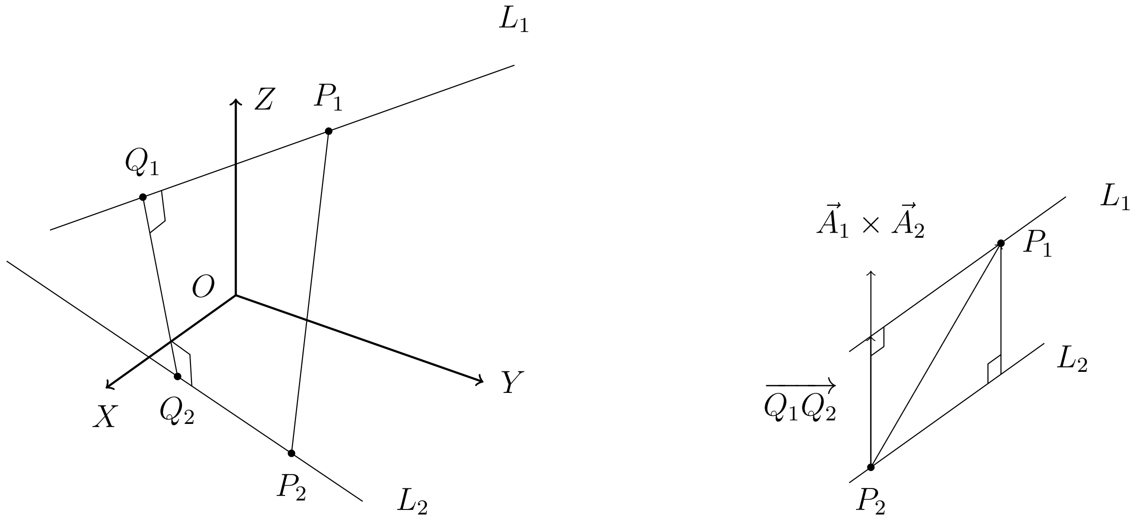
$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \quad \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.19 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -1 + 2t \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = -2s$$

2. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

รูปที่ 3.18: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน



จากรูป Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2 ดังนั้น

$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \quad \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ จะได้ว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ จากรูปจะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = \text{ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ } \overrightarrow{P_2P_1} \text{ บน } \vec{A}_1 \times \vec{A}_2$$

ดังนั้น

$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \qquad \frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.20 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = -\frac{z}{2} \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = -3t, y = 1 + 2t, z = t$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$

   1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{A} = \langle 1,-1,3\rangle$

   1.2 $P_0(-1,3,5)$ และ $\vec{A} = \langle 0,2,-1\rangle$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 ผ่านจุด $(1,-1,0)$ และ $(2,-3,5)$

   2.2 ผ่านจุด $(-1,-3,-2)$ และขนานกับ $\langle -5,0,1\rangle$

   2.3 ผ่านจุด $(1,2,-2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y = z$

3. จงตรวจสอบว่าจุด $(1,2,-3)$ อยู่บนเส้นตรงใดต่อไปนี้หรือไม่

   3.1 $x = 3-2t, \quad y = 3+t, \quad z = 1-4t$

   3.2 $2x = 3+2t, \quad y = 1-2t, \quad 3z = 4t-7$

   3.3 $2x-1 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3}$

   3.4 $\dfrac{x+7}{4} = 4-y = \dfrac{z+9}{3}$

4. จงพิจารณาว่าจุด $A(3,3,1)$, $B(-1,5,-7)$ และ $C(5,2,5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

5. จงหาระยะทางจากจุด $B(1,-2,1)$ ไปยังเส้นตรงต่อไปนี้ และจุดเชิงตั้งฉาก

   5.1 $x = 6+4t, \quad y = 3-2t, \quad z = 1+t$

   5.2 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

6. จงหาพิกัดของจุดบนเส้นตรงต่อไปนี้ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

   6.1 $x = 9+4t, \quad y = t, \quad z = 3+2t$

   6.2 $\dfrac{8-x}{6} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+7}{8}$

7. จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

   7.1 $L_1 \left\{ \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& t \\ y &=& -1 &+& 3t \\ 3z &=& 2 &-& 3t \end{array} \right. \qquad L_2 \left\{ \begin{array}{rcrcr} x &=& 4 &+& s \\ y &=& 5 &+& 3s \\ z &=& 0 &+& s \end{array} \right.$

   7.2 $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = 2-y = z$ และ $L_2 : \dfrac{2x+1}{3} = y = z-2$

8. จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 $L_1\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& t\\ y &=& 1 &-& t\\ 3z &=& 5 &+& t\end{array}\right.$ $\qquad L_2\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& s\\ y &=& 5 &-& 2s\\ z &=& 1 &-& s\end{array}\right.$

8.2 $L_1 : 1-x = y = \dfrac{z+3}{\sqrt{2}}$ และ $L_2 : \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+1}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{3-y}{2} = z-2$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,2,1)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{5} = 2-z$

11. จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

11.1 $L_1\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x &=& 1 &+& 4t\\ y &=& 2 &-& t\\ z &=& 0 &+& t\end{array}\right.$ $\qquad L_2\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 0 &-& 4s\\ y &=& 1 &+& 2s\\ 3z &=& 1 &-& 6s\end{array}\right.$

11.2 $L_1 : x-1 = \dfrac{3-y}{2} = 2z+1$ และ $L_2 : 2-x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{1-4z}{2}$

12. จงระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

12.1 $L_1\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t\\ y &=& 1 &+& t\\ z &=& 5 &-& t\end{array}\right.$ $\qquad L_2\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 4 &-& 3s\\ y &=& -3 &-& s\\ z &=& 1 &+& s\end{array}\right.$

12.2 $L_1\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 0 &+& 7t\\ y &=& 2 &+& t\\ 3z &=& 4 &-& 3t\end{array}\right.$ $\qquad L_2\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &-& s\\ y &=& 5 && \\ z &=& 6 &+& 2s\end{array}\right.$

12.3 $L_1 : x+5 = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{6-z}{9}$ และ $L_2 : 2-x = \dfrac{4-y}{4} = \dfrac{z+1}{-9}$

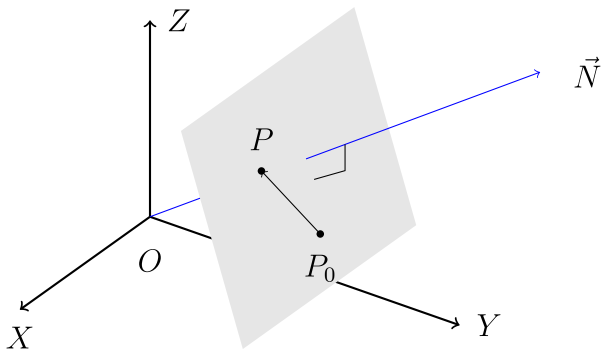
12.4 $L_1\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 5 &+& 4t\\ y &=& 2 &-& t\\ 3z &=& 4 &+& 3t\end{array}\right.$ $\qquad L_2\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 8s\\ y &=& 1 &+& 2s\\ z &=& -1 &-& 6s\end{array}\right.$

12.5 $L_1 : x+1 = \dfrac{z+1}{2}, y = 2$ และ $L_2 : x = 2-t,\ \ y = 3+4t,\ \ z = 2t$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.4.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{N} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ว่า **ระนาบ** (plane) ที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$ และเรียก $\vec{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก** (normal vector)

รูปที่ 3.19: ระนาบในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ หรือ

$$(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N} = 0 \tag{3.5}$$

เราจะเรียกสมการ (3.5) ว่า **สมการเวกเตอร์ของระนาบ** (vector equation of the plane)
ถ้ากำหนดให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ และ $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ จะได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.6}$$

เรียกสมการ (3.6) ว่า **สมการสเกลาร์** (scalar equation) ของระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และมี $\langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก
ถ้าเราจัดรูปสมการ (3.6) โดยกำหนดให้ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ จะได้ว่า

$$ax + by + cz = d \tag{3.7}$$

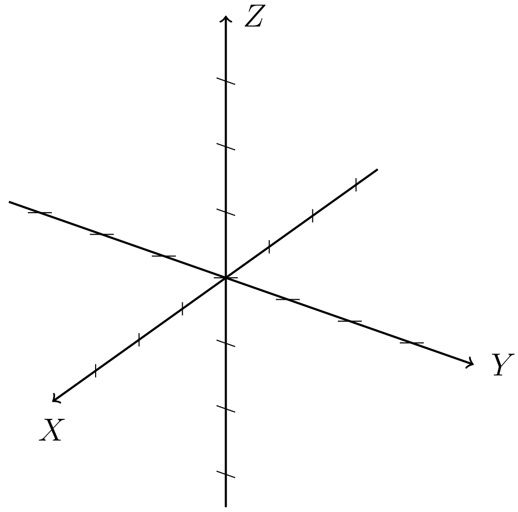
เรียกสมการ (3.7) ว่า **สมการคาร์ทีเซียน** (cartesian equation) ของระนาบ ที่มี $\langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการสเกลาร์ และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle 1, -1, 4\rangle$

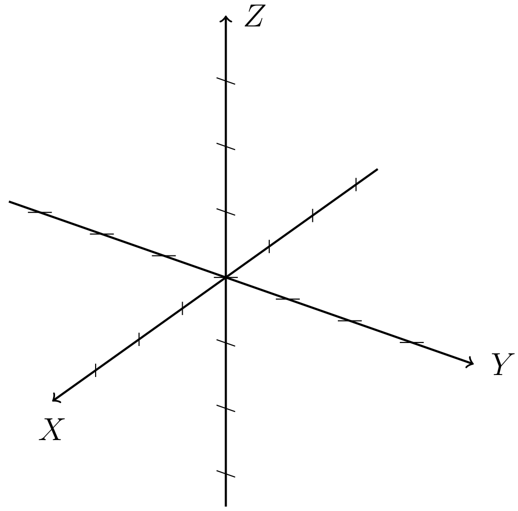
ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1,2,3)$, $Q(3,-1,6)$ และ $R(5,1,0)$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงร่างกราฟของระนาบต่อไปนี้

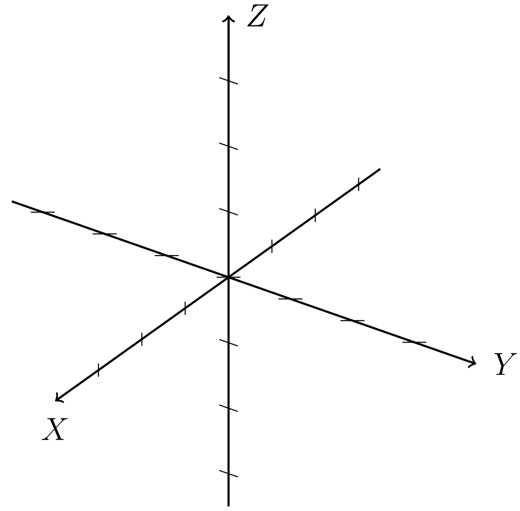
1. $x = 2$



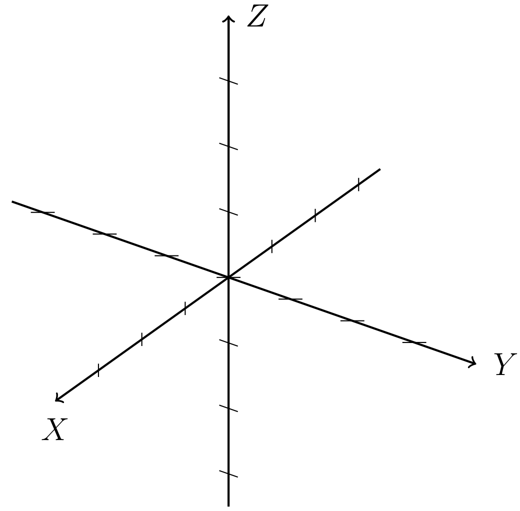
2. $y = 1$



3. $z = 3$



4. $x + y + z = 2$



ตัวอย่าง 3.4.5 จงตรวจสอบว่า $P(1,2,-1)$ และ $Q(2,3,1)$ อยู่บนระนาบ $x-2y-4z=1$ หรือไม่

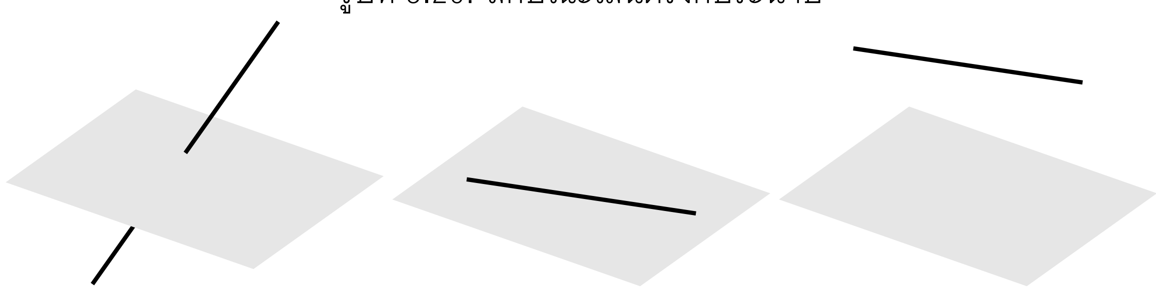
ตัวอย่าง 3.4.6 จงตรวจสอบว่า $P(1,2,-1)$, $Q(2,0,3)$, $R(3,4,1)$ และ $S(-2,1,2)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

เส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 ลักษณะคือ

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันจุดเดียว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับระนาบ
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด เรียกว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบ
3. เส้นตรงกับระนาบมีไม่มีจุดร่วม เรียกว่าเส้นตรงขนานกับระนาบ

รูปที่ 3.20: ลักษณะเส้นตรงกับระนาบ



ข้อสังเกต ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{N}=0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงขนานกับระนาบ หรือ เส้นตรงอยู่บนระนาบ
ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{N}\neq 0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงตัดกับระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่

1. $L:\ x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 3 - 3t$ และ $M:\ x + 4y + 2z = 5$

2. $L:\ x - 1 = \dfrac{y+3}{2} = z$ และ $M:\ 2x - y + z = 7$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง $L:\ x = y - 1 = \dfrac{z}{2}$ และผ่านจุด $Q(1, 3, -1)$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z \text{ และ } L_2 : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$$

และผ่านจุด $Q(2, -3, 1)$

ตัวอย่าง 3.4.10 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $Q(3, -6, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง

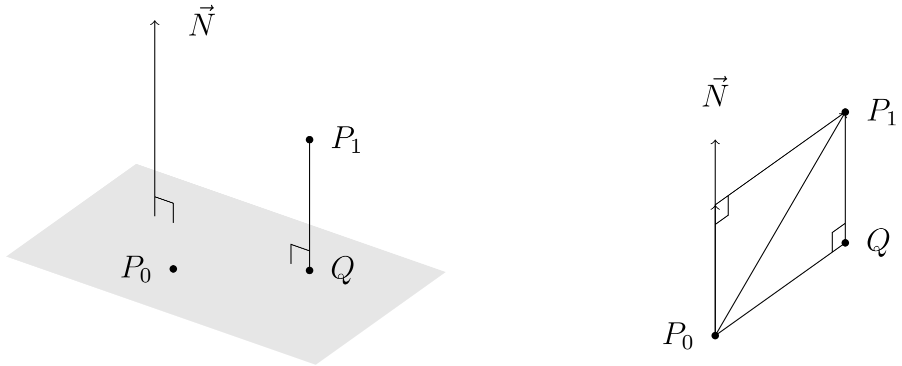
$$\vec{P} = \langle 2, 0, 1 \rangle + t\langle 3, -1, 1 \rangle$$

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.11 ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ คือระยะทางตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังระนาบ

ให้ระนาบ M มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P}-\vec{P_0})\cdot\vec{N}=0$ และ P_1 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ ลากไปตั้งฉากกับระนาบ M ที่จุด Q ดังรูป

รูปที่ 3.21: ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ



จากรูปที่ 3.21 จะได้ว่า $\|\overrightarrow{QP_1}\|$ = ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ บน $\vec{N}$ จะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{QP_1}\|=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}=\frac{|(\vec{P_1}-\vec{P_0})\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

กำหนดให้ระนาบ M ผ่านจุด $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ และมี $\vec{N}=\langle a,b,c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก M จะมีสมการคาร์ทีเซียนเป็น $ax+by+cz=d$ เมื่อ $d=ax_0+by_0+cz_0$ แล้ว

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{QP_1}\|&=\frac{|(\vec{P_1}-\vec{P_0})\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}=\frac{|\langle x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\rangle\cdot\langle a,b,c\rangle|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\&=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\&=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ กับระนาบ $ax+by+cz=d$ คือ

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(4,3,-1)$ กับระนาบ $x-2y+2z=5$

ตัวอย่าง 3.4.13 จงระยะทางระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+2}{3}$ กับระนาบ $x + y - z = 9$

ตัวอย่าง 3.4.14 จงหาจุดบนระนาบ $2x + y - 3z + 10 = 0$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $P(4, 2, 2)$

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.15 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}$ ของ L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉาก

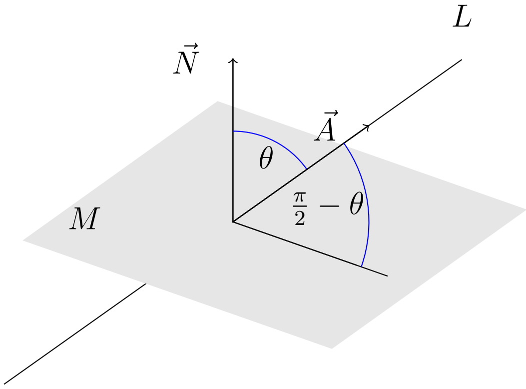
$$\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right| \text{ เรเดียน} \qquad \text{หรือ} \qquad |90-\theta| \text{ องศา}$$

และจะเห็นว่า

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|}$$

แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 3.22: มุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ M

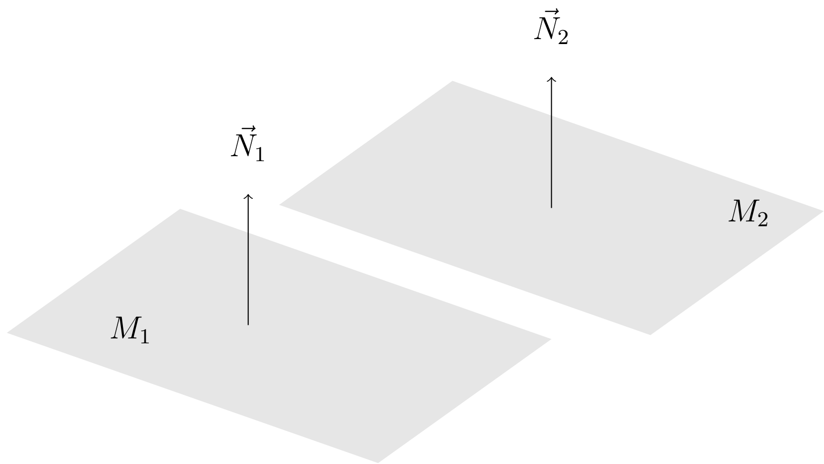


ตัวอย่าง 3.4.16 จงหามุมระว่างเส้นตรง $L: \ \frac{x}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{5}$ กับระนาบ $M: \ 2x + y - 7z = 1$

การขนานกันของระนาบและระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง

ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน

รูปที่ 3.23: การขนานกันของระนาบ



ตัวอย่าง 3.4.17 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ และขนานกับระนาบ $x + 2y - z = 5$

บทนิยาม 3.4.18 ระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองคือระยะฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกันมีสมการดังนี้ $ax + by + cz = d_1$ และ $ax + by + cz = d_2$ ตามลำดับ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ M_1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ระยะทางระหว่างระนาบ } M_1 \text{ และ } M_2 &= \text{ ระยะทางระหว่างจุด } P_1 \text{ กับระนาบ } M_2 \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

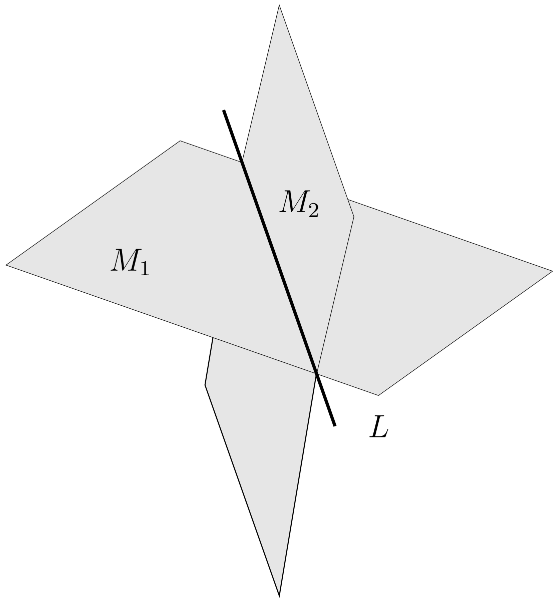
ตัวอย่าง 3.4.19 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และ $x + 2y - 2z = 1$

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 5 หน่วย

การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน (พิจารณาจากเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกันหรือไม่) รอยตัดที่เกิดย่อมเป็นเส้นตรง

รูปที่ 3.24: รอยตัดของของระนาบทั้งสอง



จากรูปเนื่องจากเส้นตรง L อยู่บนระนาบ M_1 และ M_2 ดังนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ ดังนั้น $\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ และจุดผ่าน L คือจุดที่อยู่บน M_1 และ M_2

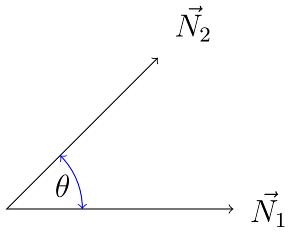
ตัวอย่าง 3.4.21 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$2x - y + z = 1 \quad \text{และ} \quad x + y - 2z = 5$$

มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 3.4.22 มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

รูปที่ 3.25: มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N_1}$ และ $\vec{N_2}$



ตัวอย่าง 3.4.23 จงหามุมระหว่างระนาบ $2x + y + 2z = 1$ กับ $5x - 3y + 4z = 5$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

    1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{N} = \langle 2,-1,5\rangle$

    1.2 $P_0(-1,0,5)$ และ $\vec{N} = \langle 3,2,1\rangle$

    1.3 $P_0(1,3,-3)$ และ $\vec{N} = \langle 0,3,-2\rangle$

    1.4 $P_0(2,6,-4)$ และ $\vec{N} = \langle -1,-3,1\rangle$

2. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด

    2.1 $(1,-1,0)$, $(0,-1,2)$ และ $(-1,-3,5)$

    2.2 $(-1,-3,-2)$, $(2,5,0)$ และ $(1,-2,1)$

3. จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

    3.1 $x = z$

    3.2 $3x + y = 2$

    3.3 $x - y + z = 2$

    3.4 $2x - y + z = 5$

    3.5 $5x + 2y - 3z = 15$

    3.6 $3x + 3y + 2z = 6$

4. จงพิจารณาว่าจุดทั้ง 4 จุดอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

    4.1 $(1,1,1)$, $(-2,4,1)$, $(3,1,2)$ และ $(5,1,3)$

    4.2 $(1,2,7)$, $(-1,1,2)$, $(2,0,7)$ และ $(1,1,2)$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุดกับระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

    5.1 $(1,-2,3)$ กับ $3x + 2y - z = 12$

    5.2 $(-1,1,-2)$ กับ $3x + 4y - 5z = 15$

6. จงหาจุดบนระราบ $x - 2y + 3z = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2,3,-2)$

7. พิจารณาเส้นตรง L กับระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่ และจงหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

    7.1 $L: \dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ และ $M: x - 2y + 2z = 4$

    7.2 $L: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = z$ และ $M: 5x + 4y - 3z = 15$

    7.3 $L: x = 3 + t, y = -1 + 3t, z = 1 + 2t$ และ $M: 2x - y + 3z = 5$

    7.4 $L: 1 - x = \dfrac{y}{2} = z - 2$ และ $M: 3x + y + z = 3$

8. จงหาสมการระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

8.1 ผ่านจุด $(1,0,2)$ และเส้นตรง $\dfrac{x}{3} = y+1 = \dfrac{2-z}{2}$

8.2 ผ่านเส้นตรง $\dfrac{x-2}{2} = y+1 = -z$ และ $\dfrac{1-x}{2} = -y = z+1$

8.3 ผ่านจุด $(2,1,-3)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ และ $x-1 = y+1 = \dfrac{z}{2}$

8.4 ผ่านเส้นตรง $x = 3+2t, y = -t, z = 2t$ และ $x-2 = \dfrac{-1-y}{2} = -3-z$

8.5 ผ่านจุด $(2,-1,0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = z$

8.6 ผ่านจุด $(1,2,3)$ และ $(2,0,2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y-1 = \dfrac{z}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ M_1 และ M_2

9.1 $M_1:\ x+y+z=2$
$M_2:\ 2x-y+z=3$

9.2 $M_1:\ x+y+3z=5$
$M_2:\ x-5y+z=1$

10. จงหามุมระหว่างระนาบ M_1 และ M_2

10.1 $M_1:\ 2x-5y+5z=2$
$M_2:\ 1x-2y+7z=1$

10.2 $M_1:\ x+y+z=3$
$M_2:\ x-y-z=4$

11. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,2,3)$, $(2,0,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x+y-z=1$

12. จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x+2y-2z=10$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 3 หน่วย

13. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและอยู่บนระนาบ $x+y=3z$

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.1 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I แล้ว

$$\vec{F}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t) \rangle$$

เรียกว่า**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** (vector value function) จาก I ไป $\mathbb{R}^n$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในกรณี $n = 2, 3$ นั่นคือ

$$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.2 ให้ $\vec{F}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $\vec{F}(1)$
2. $\vec{F}(2)$

บทนิยาม 3.5.3 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จาก I ไป $\mathbb{R}^3$ และ u เป็นฟังก์ชันจาก I ไป $\mathbb{R}$ และ $t \in I$ แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$
2. $(u\vec{G})(t) = u(t)\vec{F}(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

ตัวอย่าง 3.5.4 ให้ $\vec{F}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle 1 + t, 2t, 1 - t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $(\vec{F} + \vec{G})(1)$

2. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(1)$

3. $(\vec{F} \times \vec{G})(1)$

ลิมิตของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.5 ให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ลิมิตของ $\vec{F}(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{F}(t)$ แล้ว

$$\lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า } \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{t\to t_0} x(t),\ \lim_{t\to t_0} y(t) \text{ และ } \lim_{t\to t_0} z(t) \text{ มีค่า}$$

และจะได้ว่า $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \left\langle \lim\limits_{t\to t_0} x(t), \lim\limits_{t\to t_0} y(t), \lim\limits_{t\to t_0} z(t) \right\rangle$

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{t\to 1} \langle t^2+1, \cos \pi t, t^2-1\rangle$

บทนิยาม 3.5.7 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\vec{F} \text{ มีความต่อเนื่อง } t = t_0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{F}(t_0) \text{ และ } \lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า และ } \lim_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

ถ้า $\vec{F}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องบนช่วง I

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.8 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0 \in I$ ถ้า

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h) - \vec{F}(t_0)}{h} \quad \text{มีค่า}$$

จะเขียนแทนด้วย

$$\frac{d}{dt}\vec{F}(t)|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h) - \vec{F}(t_0)}{h} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{F}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h) - \vec{F}(t_0)}{h}$$

เรียกว่า **อนุพันธ์** (derivative) ของ $\vec{F}$ ที่จุด $t_0 \in I$

ทฤษฎีบท 3.5.9 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เมื่อ $t \in I$ และ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์บนช่วง I จะได้ว่า $\vec{F}$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$\vec{F}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.10 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \left\langle t^2 + t - 3, \text{cos}2t, e^t\text{sin}t \right\rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{F}')(0)$

ทฤษฎีบท 3.5.11 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $\vec{F}$, $\vec{G}$ และ u มีอนุพันธ์ที่ t แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$
2. $(u\vec{G})'(t) = (u'\vec{F})(t) + (u\vec{F}')(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากการใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต □

ตัวอย่าง 3.5.12 กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, t, \text{sin}t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle t^2, t, 1 \rangle$ จงหา

1. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$

2. $\vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.13 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนโดเมน $D \subset \mathbb{R}$ ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บนช่วง $[a, b] \subset D$ และ

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle$$

ทฤษฎีบท 3.5.14 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ c_1, c_2 เป็นคต่าคงตัว และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^b (c_1\vec{F}(t) + c_2\vec{G})dt = c_1 \int_a^b \vec{F}(t)dt + c_2 \int_a^b \vec{G}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_a^b \vec{F}(t)dt = \int_a^c \vec{F}(t)dt + \int_c^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $a < c < b$
3. $\displaystyle\int_a^b (u\vec{C}(t)dt = \int_a^b u(t)dt\vec{C}$
4. $\displaystyle\int_a^b (\vec{C} \cdot \vec{F})(t)dt = \vec{C} \cdot \int_a^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $\vec{C} \cdot \vec{F}$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 3.5.15 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t\rangle$ และ $\vec{C} = \langle 1, 2, 1\rangle$ จงหา

1. $\displaystyle\int_0^\pi \vec{F}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \vec{C} \cdot \vec{F}(t)dt$

ตัวอย่าง 3.5.16 จงหา $\int_0^{2\pi} \|\langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1\rangle\| dt$

ตัวอย่าง 3.5.17 ถ้านิยามความยาวของส่วนเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a, b]$ คือ

$$L(a, b) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

จงหา $L(0, 2\pi)$ ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = \langle 3\text{cos}t, 5\text{sin}t, 4\text{cos}t\rangle$

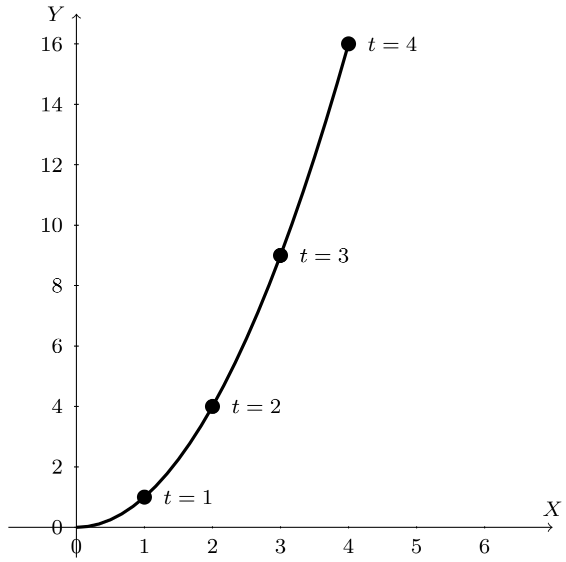
กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เมื่อ $a \le t \le b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่ คือ

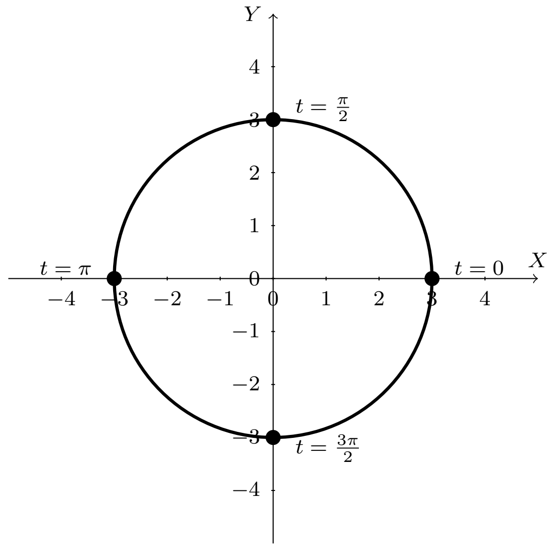
$$\text{กราฟความสัมพันธ์} \ \ \{(x(t), y(t)) \ : \ \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \ \text{ เมื่อ } \ a \le t \le b\}$$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 4$



$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

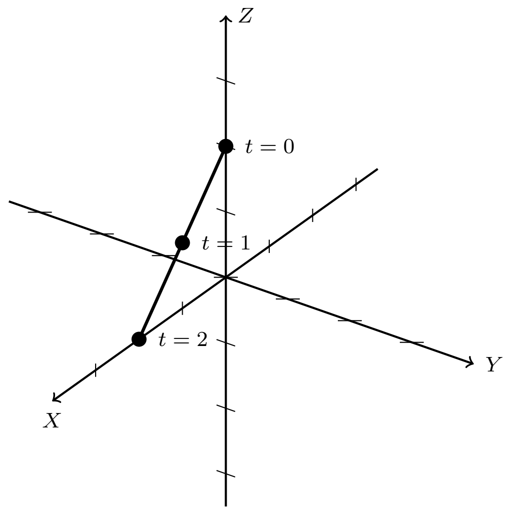


กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $a \le t \le b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่คือ

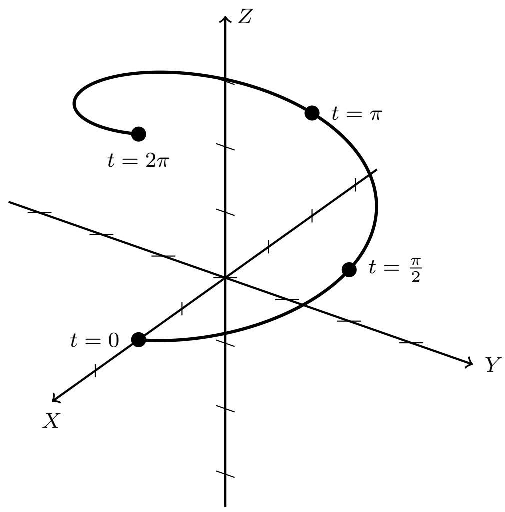
$$\text{กราฟความสัมพันธ์} \ \ \{(x(t), y(t), z(t)) \ : \ \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \ \text{ เมื่อ } \ a \le t \le b\}$$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t) = \langle t, 0, 2-t \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2$



$\vec{r}(t) = \left\langle 2\cos t, 2\sin t, \frac{t}{2} \right\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$



เวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง

ให้ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ หรือ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$

อัตราความเร็ว $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$

เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t)$

อัตราความเร่ง $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$

ตัวอย่าง 3.5.18 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, 3t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง เมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่าง 3.5.19 รถคันหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ XY ด้วยความเร่ง $\vec{a}(t) = 2\vec{i}\ m/s^2$ ถ้ารถคันนี้เริ่มเคลื่อนที่เมื่อเวลา 0 วินาที มีความเร็วเริ่มต้น $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 10\vec{i} - 5\vec{j}\ m/s$

1. เวกเตอร์ความเร็วที่เวลาใด ๆ
2. เวกเตอร์ความเร็วและอัตราความเร็วที่เวลา 1 วินาที
3. ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลาใด ๆ

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่

ให้เส้นโค้งหนึ่งเป็นกราฟฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เมื่อ $a \le t \le b$

1. จะได้ว่า $\vec{r}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{r}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์สัมผัสหน่วย** (unit tangent vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{T}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{T}(t)$ เรียก **เส้นสัมผัส** (tangent) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

2. เนื่องจาก $\vec{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{T}(t)$ ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{T}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์แนวฉากหน่วย** (unit normal vector) เขียนแทนด้วย $\vec{N}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{T}'(t)\| \neq 0$$

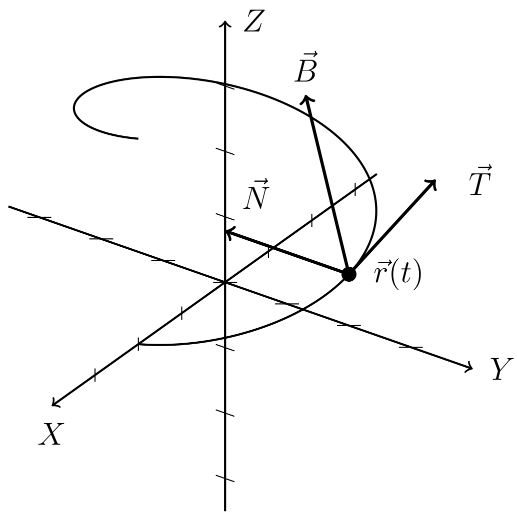
   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{N}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉาก** (normal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

3. **เวกเตอร์แนวฉากคู่** (binormal vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{B}(t)$ นิยามโดย

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

   เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{B}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉากคู่** (binormal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

รูปที่ 3.26: $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ และ $\vec{B}(t)$ ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$



ตัวอย่าง 3.5.20 ให้ $\vec{r}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t\rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$

ตัวอย่าง 3.5.21 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 1 + \sin t, 1 - \cos t, 2\rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(1, 2, 2)$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle 2t+1, \dfrac{t-1}{1-\sqrt{t}}, t\sin\pi t\right\rangle$

1.2 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle 2-t^2, \tan t, \dfrac{\sin t}{t}\right\rangle$

1.3 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle t^2+1, \dfrac{t^3-1}{t^2-1}, 1-2t\right\rangle$

1.4 $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle t\tan t, 2t^3, \dfrac{1}{t-1}\right\rangle$

2. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle 1+t, 1+2t, 1+3t\rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$ จงหา

2.1 $\vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

2.2 $(\vec{F}\cdot\vec{G})'(t)$

2.3 $(\vec{F}'\times\vec{G}')(t)$

2.4 $(\vec{F}\cdot\vec{G}')(t)$

3. จงหาค่าต่อไปนี้

3.1 $\displaystyle\int_1^3 \left\langle t, 2t+1, t^2\right\rangle dt$

3.2 $\displaystyle\int_0^\pi \left\langle t\sin t, \cos^2 t, t+1\right\rangle dt$

3.3 $\displaystyle\int_0^1 \left\langle 2\cos t, 3\sin t+1, \sec^2 2t\right\rangle dt$

3.4 $\displaystyle\int_0^1 \left\langle e^t, \frac{1}{1-t}, \sqrt{2-t}\right\rangle dt$

4. จงเขียนกราฟแสดงการการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อไปนี้

4.1 $\vec{r}(t) = \langle t, 2+t\rangle$ เมื่อ $1 \le t \le 3$

4.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2+1\rangle$ เมื่อ $1 \le t \le 4$

4.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 2+t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 5$

4.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 4\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

4.5 $\vec{r}(t) = \langle 2\sin t, 3\cos t, t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

5. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ดังนี้ ขณะเวลาที่กำหนดให้

5.1 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2+1\rangle$ เมื่อ $t = 2$

5.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t+\dfrac{1}{t}, t-\dfrac{1}{t}\right\rangle$ เมื่อ $t = 1$

5.3 $\vec{r}(t) = \langle \sin 3t, \cos 2t\rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{4}$

5.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t\cos t, t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

5.5 $\vec{r}(t) = \langle \ell n 2t, e^{2t}, t\cos t\rangle$ เมื่อ $t = 1$

5.6 $\vec{r}(t) = \langle \tan^2 t, \cos t\sin t, 2t\rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{3}$

6. เรือลำนี้เคลื่อนที่ในระนาบ XY โดยมีฟังก์ชันตำแหน่งที่เวลาใด ๆ ในระบบพิกัดฉากเป็น $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$ และ $y(t) = -t^2 + 2t - 3$ จงหาอัตราความเร็วของเรือลำนี้ที่เวลา 3 วินาที

7. ถ้าการเดินทางของอนุภาคตัวหนึ่งเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ โดยมี $x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคนี้ที่เวลา 0 วินาที

8. เรือมีฟังก์ชันความเร็วเป็น $\vec{v}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j}$ โดยกำหนดให้ $a = 10\ m/s^2$ และ $b = -5\ m/s^2$ จงหา

    8.1 ความเร็วที่เวลา 1 วินาที และ 2 วินาที

    8.2 ความเร่งที่เวลา 1.5 วินาที

    8.3 ความเร่งเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลา 1 ถึง 2 วินาที

9. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

    9.1 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, 0\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

    9.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

    9.3 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t, 1 - t, 1 + t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

    9.4 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, \text{sin}t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

    9.5 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}^2t, \text{cos}^2t, t\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

    9.6 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t + \text{cos}t, \text{sin}t - \text{cos}t, e^t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

10. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

    10.1 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t\text{cos}t, \text{sin}t + \text{cos}t, t\rangle$ เมื่อ $t = 0$

    10.2 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}^2t, \text{cos}^2t, t\rangle$ เมื่อ $t = \pi$

    10.3 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

    10.4 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t^2, 1 - t^2, t - 2\rangle$ เมื่อ $t = 1$

    10.5 $\vec{r}(t) = \langle 3\text{sin}t, 5\text{cos}t, 4\text{sin}t\rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

11. ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 0, \pi)$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
   1.1 ผ่านจุด $(0,1,2)$ และ $(1,3,-1)$
   1.2 ผ่านจุด $(0,-1,1)$ และขนานกับ $\langle -1,3,7\rangle$
   1.3 ผ่านจุด $(1,0,2)$ และขนานกับเส้นตรง $x-1=y+1=2z$
2. จงพิจารณาว่าจุด $A(1,2,1)$, $B(2,3,-2)$ และ $C(1,2,3)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
3. จงระยะทางระหว่าง $L_1 : 2x = \dfrac{z-1}{3}, y=1$ และ $L_2 : x = 1+t, \;\; y = 3+t, \;\; z = 3-t$
4. จงหาสมการของระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
   4.1 ผ่านจุด $(-2,3,4)$ และเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = \langle 0,-1,1\rangle$
   4.2 ผ่านจุด $(2,1,0)$, $(1,0,3)$ และ $(2,-1,4)$
   4.3 ผ่านเส้นตรง $x=y=z$ และ $x+1=\dfrac{y+3}{2}=2z$
5. จงหาจุดบนระนาบ $x+3y+z=1$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(-1,0,2)$
6. ถ้า $\vec{a} = \langle x,1,2\rangle$ ตั้งฉากกับ $\vec{b} = \langle -1,1,3\rangle$ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$
7. ให้ $A(1,2,3)$, $B(2,5,5)$ และ $C(0,1,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด B ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AC ที่จุด D จงหาพิกัดของจุด D
8. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติซึ่งตั้งฉากกัน โดยที่ $\|\vec{u}-2\vec{v}\| = 3$ และ $\|2\vec{u}+\vec{v}\| = 4$ จงหา $\|\vec{u}+\vec{v}\|$
9. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-1,2,3)$, $B(2,-1,3)$ และ $C(4,-1,2)$
10. จงตรวจสอบว่า $\vec{a} = \langle 1,2,3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4,5,6\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 7,8,9\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่
11. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2,1,-3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4,-1,0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1,4,-1\rangle$
12. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$
13. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ จงแสดงว่า $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$
14. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{4-y}{2} = z-2$
15. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,-1)$ และจุดตัดของเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y-1}{2} = z \qquad \text{และ} \qquad L_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z - 1$$

16. จงหาพิกัดบนเส้นตรง L ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด เมื่อ $L : \begin{cases} x &= 3 + 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + 2t \end{cases}$

17. ให้ $A(-2, 3, k)$ เป็นจุดบนระนาบ $M : \ 3x - 2y + 4z = 12$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับระนาบ M

18. จงหาจุดบนระนาบ $x - 2y + 3z = 4$ ที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2, 3, -2)$

19. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + y + z = 1$ และ $2x - y + z = 3$

20. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$

21. จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง $x = y = z$ และเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

22. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 4$

23. จงหามุมระหว่างระนาบ $z + 2y - z = 2$ และ $2x + y + z = 3$

24. กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, 0, t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle 0, \cos t, t \rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{G})'(0)$

25. จงหา $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \| \langle 5\tan t, 3, 4 \rangle \| dt$

26. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนคือ

$$\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t \cos t, t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

27. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, -3\cos t, 4 \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = \pi$$

28. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 5\cos t, 4\sin t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

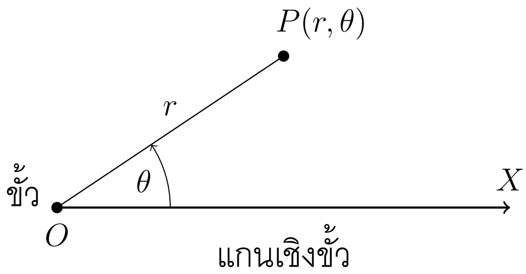
บทที่ 4

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

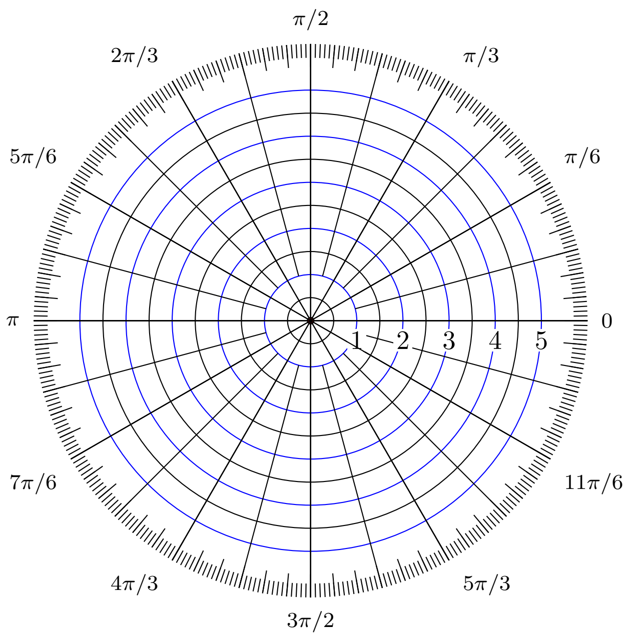
4.1 พิกัดเชิงขั้ว

บทนิยาม 4.1.1 ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ XY
ถ้า r เป็นระยะทางจาก O (จุดกำเนิด) ไปยังจุด P และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX เรียกจุด (r, θ) ว่า**พิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate)** ของจุด P

รูปที่ 4.1: แสดงความหมายพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)

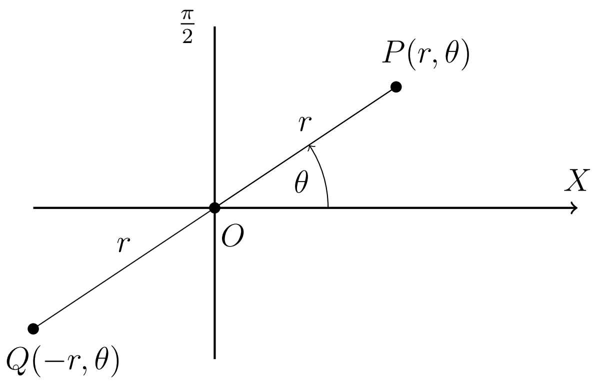


ตัวอย่าง 4.1.2 จงเขียนจุด $A(3, \frac{\pi}{4})$, $B(4, \frac{2\pi}{3})$, $C(5, -\pi)$ และ $D(3.5, -\frac{\pi}{6})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

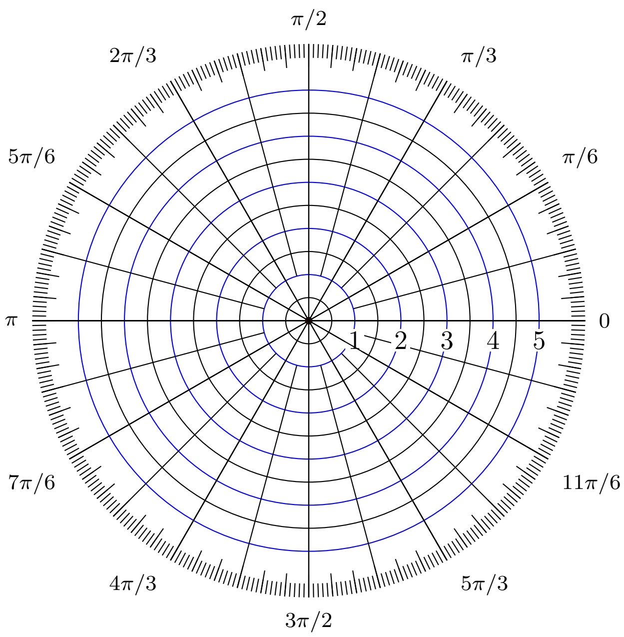


บทนิยาม 4.1.3 ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r,θ) เมื่อ $r > 0$ แล้ว $(-r,\theta)$ หมายถึงพิกัดของจุดปลายที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{OP}$ เป็นระยะ r

รูปที่ 4.2: แสดงพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) และ $(-r,\theta)$



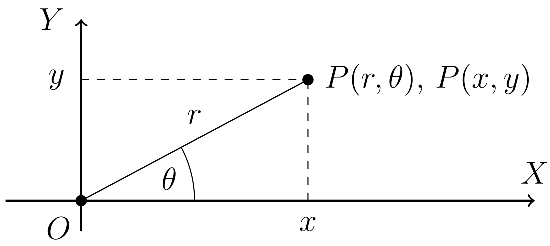
ตัวอย่าง 4.1.4 จงเขียนจุด $A(-3,\frac{\pi}{3})$, $B(-4,\frac{3\pi}{4})$ และ $C(-5,-\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y) ของจุด P ใด ๆ ที่ไม่ใช่จุดกำเนิด

รูปที่ 4.3: ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก



จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \text{และ} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \le \theta < 2\pi$

1. $P(2, 0)$

4. $S(-\sqrt{3}, -1)$

2. $Q(2, 2)$

5. $T(0, -3)$

3. $R(-2, 2\sqrt{3})$

6. $U(3, -3)$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉาก $(1,1)$ มาอย่างน้อย 3 จุด

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

1. $A(4, \frac{\pi}{3})$
2. $B(2, \frac{3\pi}{4})$
3. $C(5, \frac{3\pi}{2})$
4. $D(4, -\frac{4\pi}{3})$
5. $E(-2, \frac{\pi}{6})$
6. $F(-4, -\frac{3\pi}{4})$

สำหรับฟังก์ชันในระบบพิกัดฉาก $y = f(x)$ อาจแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = g(\theta) \qquad \text{หรือ} \qquad \theta = h(r)$$

โดยที่ $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x = 3$

2. $y = 5$

3. $y = x$

4. $y = x + 1$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x^2 + y^2 = 4$

2. $x^2 + y^2 = 2x$

3. $y = x^2$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = 3$

2. $r = 4\sin\theta$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

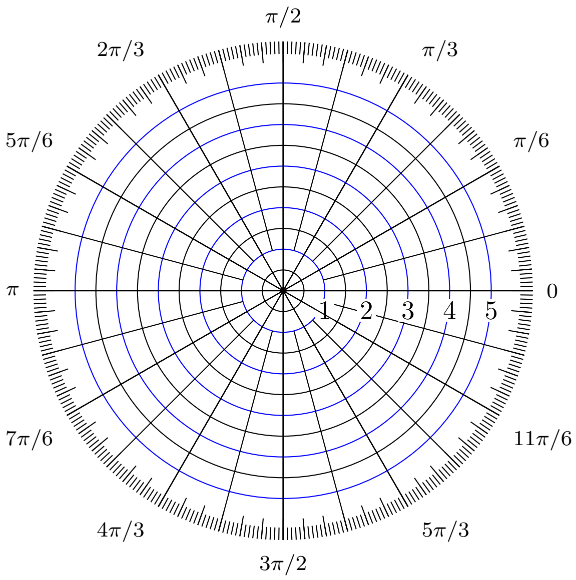
แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

   1.1 $(-1, 1)$
   1.2 $(-3, -3)$
   1.3 $(-1, \sqrt{3})$
   1.4 $(4\sqrt{3}, -1)$
   1.5 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$
   1.6 $(8, 4\sqrt{3})$

2. จงเขียนจุดในระบบพิกัดฉาก และหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

   2.1 $A(2, \frac{\pi}{4})$
   2.2 $B(-1, \frac{3\pi}{3})$
   2.3 $C(-3, \frac{5\pi}{6})$
   2.4 $D(4, -\frac{\pi}{4})$
   2.5 $E(-5, \frac{11\pi}{6})$
   2.6 $E(2.5, \frac{4\pi}{3})$



3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 3 จุด

   3.1 $(-1, 1)$
   3.2 $(-3, -\sqrt{3})$
   3.3 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   4.1 $x + y = 2$
   4.2 $y = x^2$
   4.3 $x^2 + y^2 = 2y$
   4.4 $x^2 + y^2 = 4$
   4.5 $x^2 + y^2 = 2x$
   4.6 $x^2 - y^2 = xy$
   4.7 $y^2 = 4x$
   4.8 $4x^2 + 9y^2 = 36$
   4.9 $x^2 - y^2 = 1$

5. จงเขียนสมการในระบบเชิงขั้วให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

   5.1 $r = 2$
   5.2 $r = 5\sin\theta$
   5.3 $r = 2\cos 2\theta$
   5.4 $r = 1 - \sin\theta$
   5.5 $r = \dfrac{1}{1 - \sin\theta}$
   5.6 $r = \tan\theta$
   5.7 $r = \tan\theta\csc\theta$
   5.8 $r = \sin 2\theta$
   5.9 $r = \sin\theta + \cos\theta$

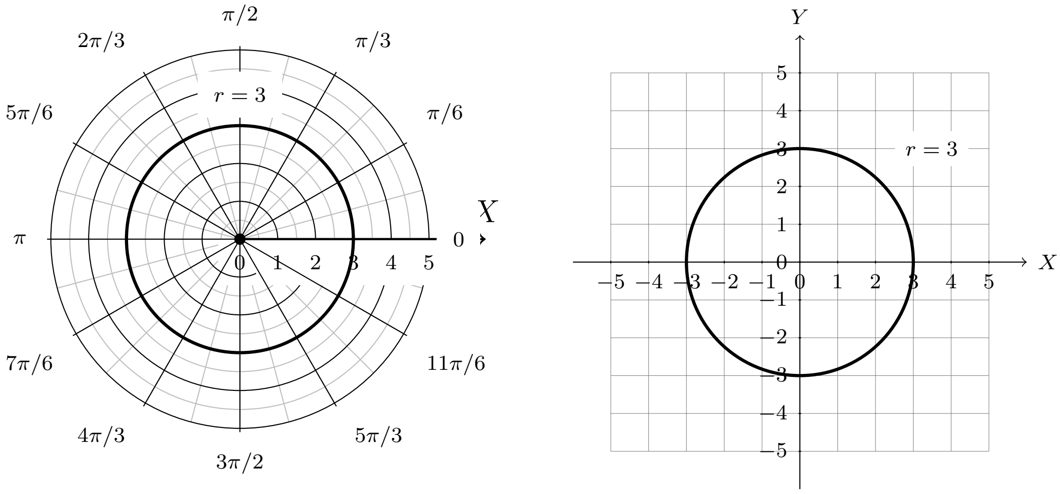
4.2 กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการ $r = f(\theta)$ หรือ $\theta = h(r)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว มีแนวคิดเหมือนกับการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดฉาก โดยการนำจุด (r, θ) ที่สอดคล้องสมการไปเขียนลงบนพิกัด ต่อไปตัวอย่างกราฟของระบบพิกัดฉากที่สำคัญ

1. สมการ $f(\theta) = k$

สมการ $r = f(\theta) = k$ เมื่อ $k \neq 0$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $|k|$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

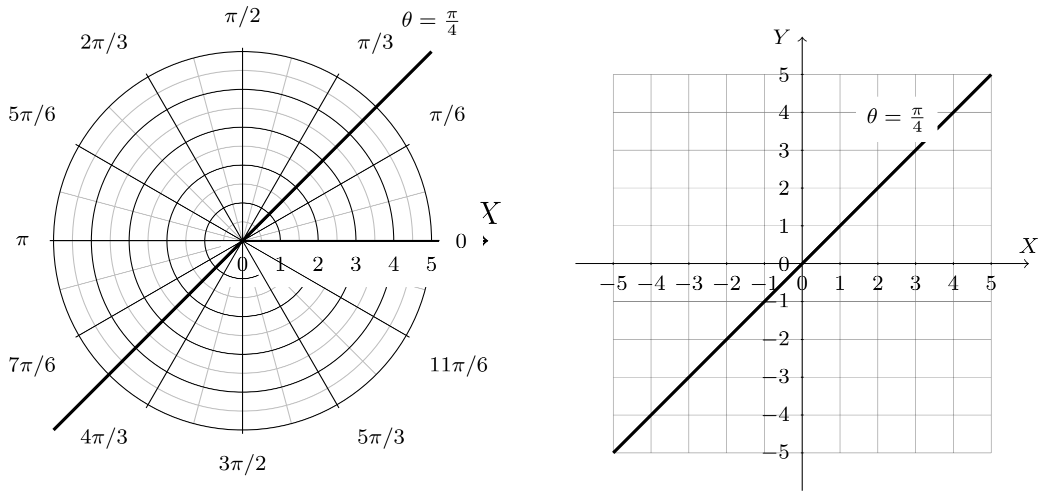
รูปที่ 4.4: ตัวอย่างกราฟของ $r = 3$ และ $r = -4$



2. สมการ $\theta = \theta_0$

สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกนเชิงขั้ว

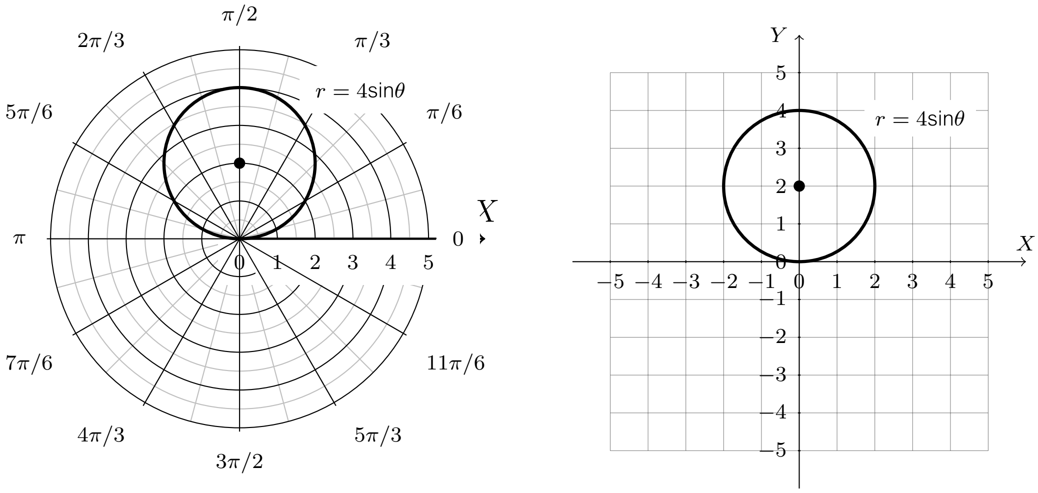
รูปที่ 4.5: ตัวอย่างกราฟของ $\theta = \frac{\pi}{4}$



3. สมการ $f(\theta) = 2k\sin\theta$ และ $f(\theta) = 2k\cos\theta$

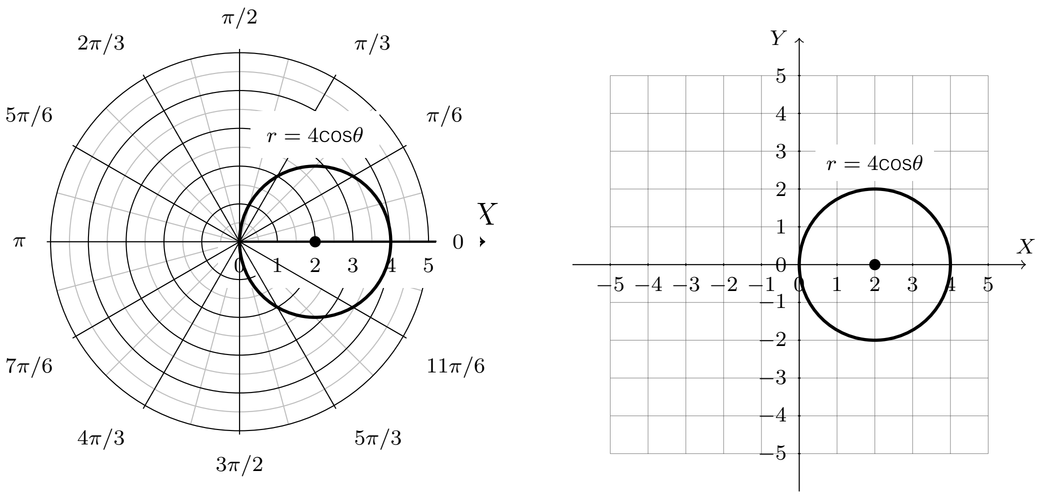
สมการ $r = f(\theta) = 2k\sin\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี $|k|$

รูปที่ 4.6: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin\theta$



สมการ $r = f(\theta) = 2k\cos\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, 0)$ รัศมี $|k|$

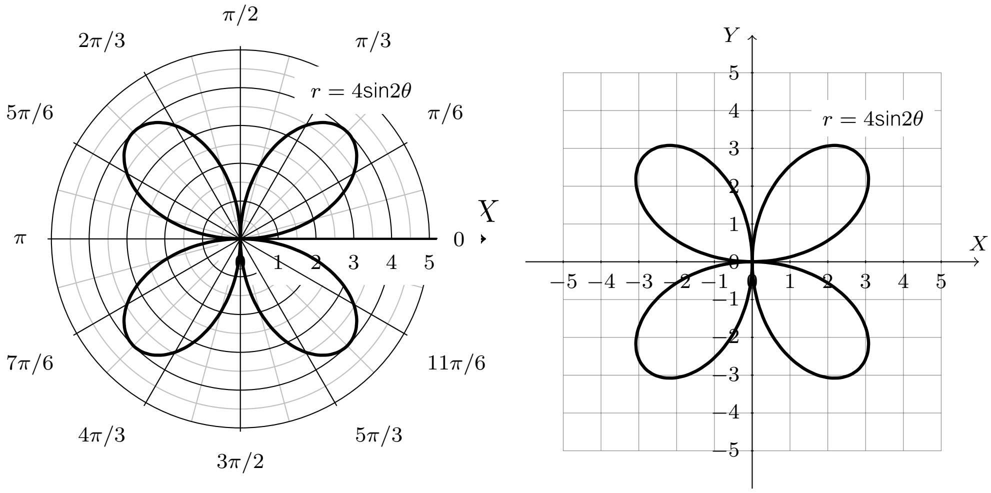
รูปที่ 4.7: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos\theta$



4. สมการ $f(\theta) = k\sin 2n\theta$ และ $f(\theta) = k\cos 2n\theta$

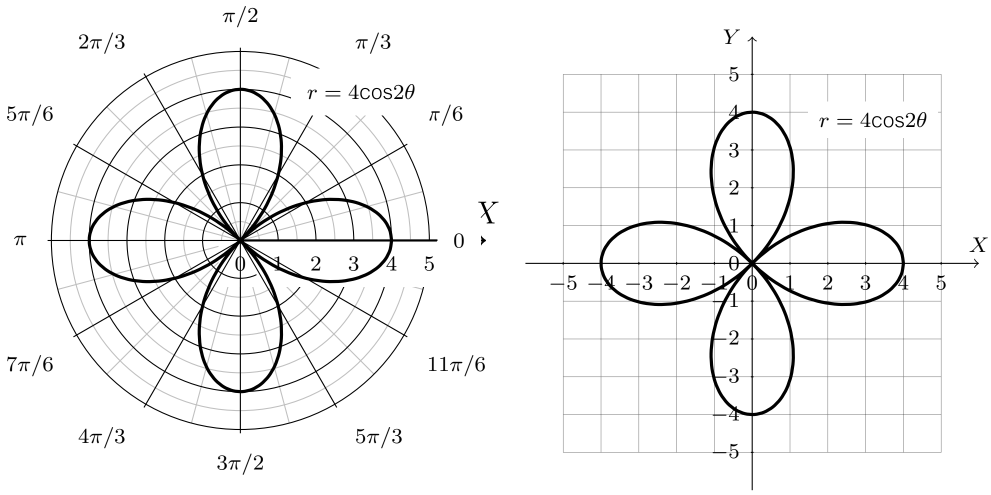
สมการ $r = f(\theta) = k\sin 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่แกนสมมาตรของแต่ละกลีบไม่อยู่บนแกน X และ Y

รูปที่ 4.8: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin 2\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน X และ Y

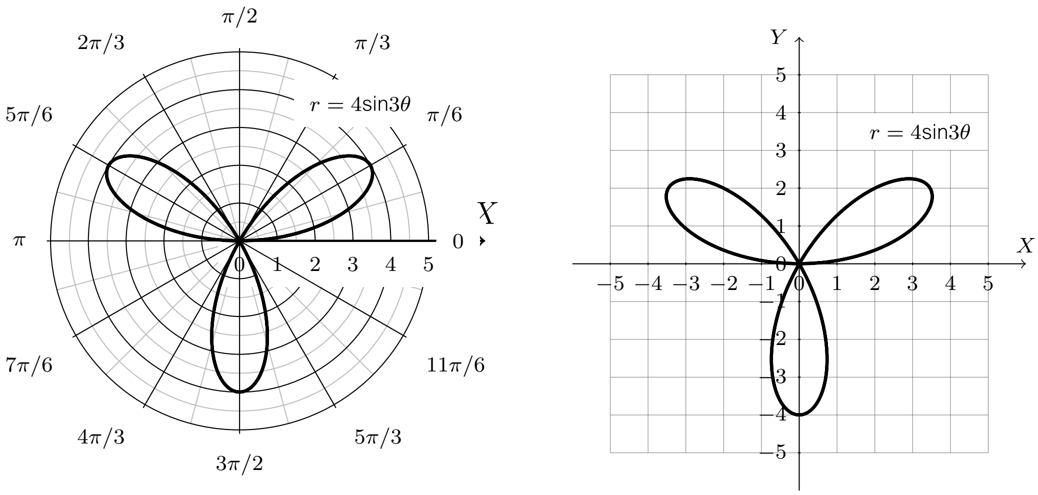
รูปที่ 4.9: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos 2\theta$



5. สมการ $f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ และ $f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$

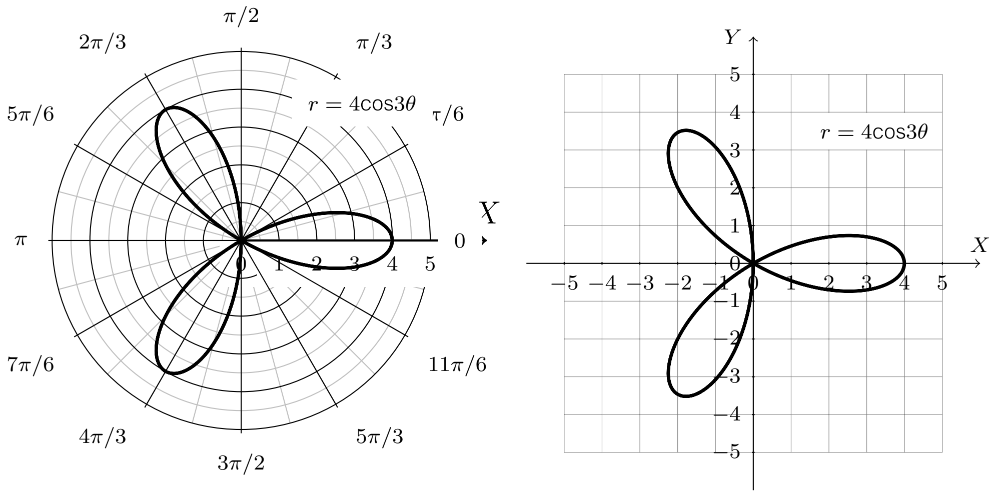
สมการ $r = f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน Y

รูปที่ 4.10: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin 3\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ้างกลีบอยู่บนแกน X

รูปที่ 4.11: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos 3\theta$



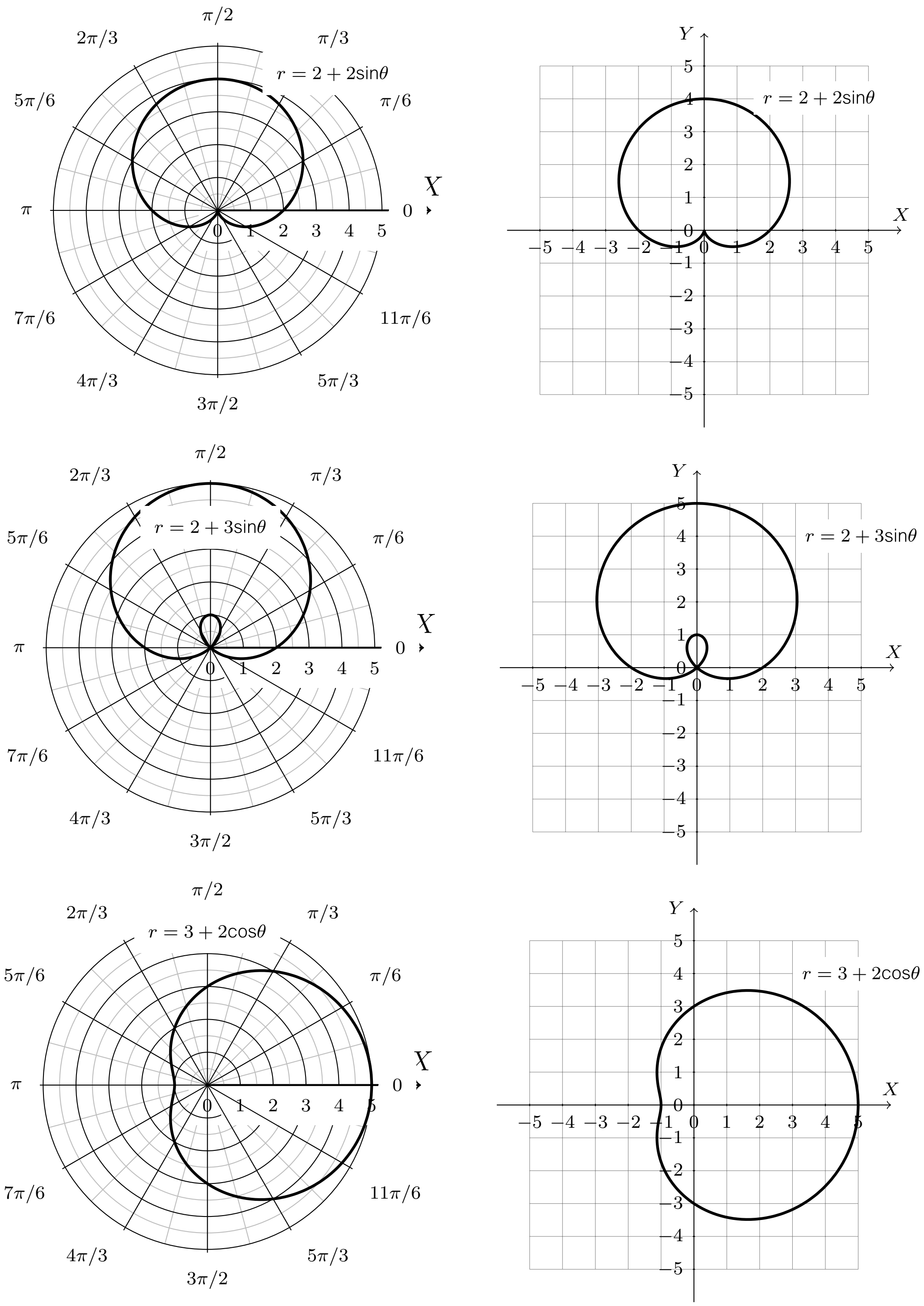
6. สมการ $f(\theta) = r = a + b\sin\theta$ และ $f(\theta) = r = a + b\cos\theta$

ถ้า $|a| = |b|$ แล้วกราฟนี้จะผ่านขั้ว และเรียกกราฟนี้ว่า **คาร์ดิออยด์** (cardioid)

ถ้า $|a| \neq |b|$ จะเรียกกราฟนี้ว่า **ลีมาซอง** (limacon)

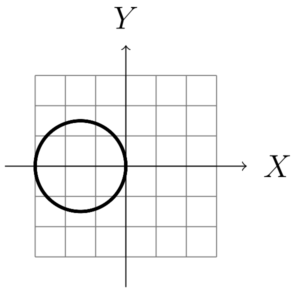
- ถ้า $|a| > |b|$ กราฟนี้จะไม่ผ่านขั้ว
- ถ้า $|a| < |b|$ กราฟนี้จะผ่านขั้ว และมีวงวน (loop) อยู่ภายใน

รูปที่ 4.12: ตัวอย่างกราฟคาร์ดิออยด์และลีมาซอง

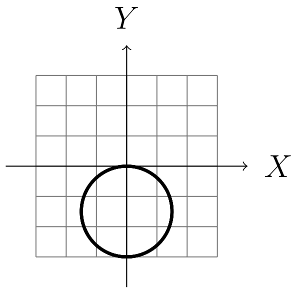


ตัวอย่าง 4.2.1 จงจับคู่ของสมการต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

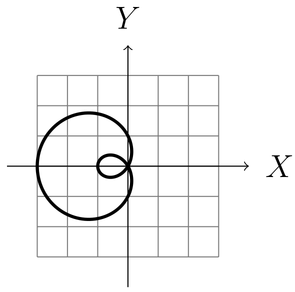
1. $r = -2$	4. $r = -3\cos 4\theta$	7. $r = 1 - 2\cos\theta$
2. $r = -3\cos\theta$	5. $r = 2\sin 5\theta$	8. $r = 3\cos 2\theta$
3. $r = 1 + \cos\theta$	6. $r = -3\sin\theta$	9. $\theta = \frac{3\pi}{4}$



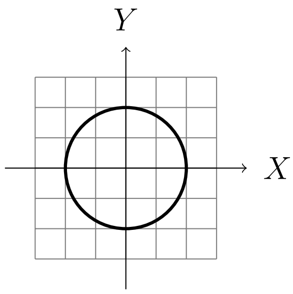
(ก)



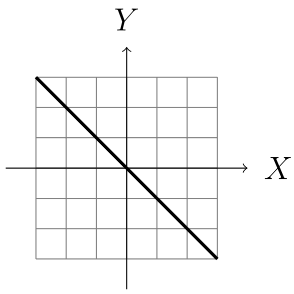
(ข)



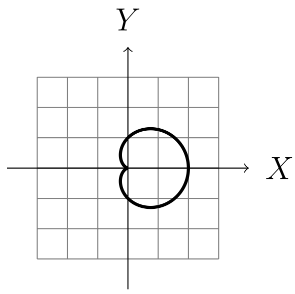
(ค)



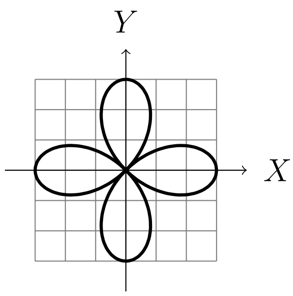
(ง)



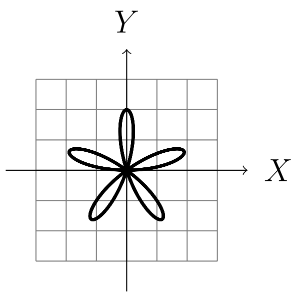
(จ)



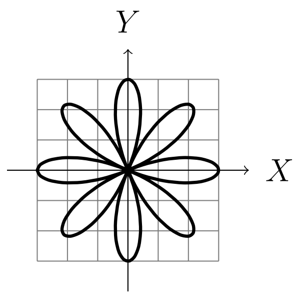
(ฉ)



(ช)



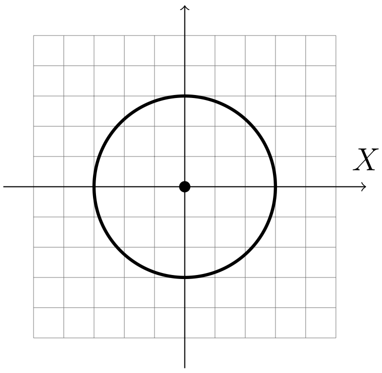
(ซ)



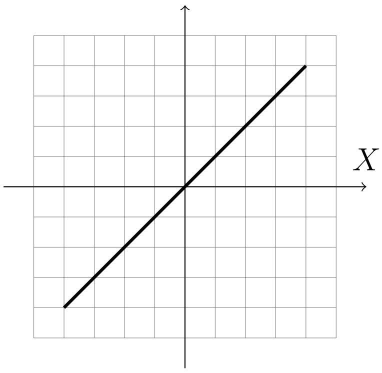
(ฌ)

ตัวอย่างกราฟเชิงขั้ว

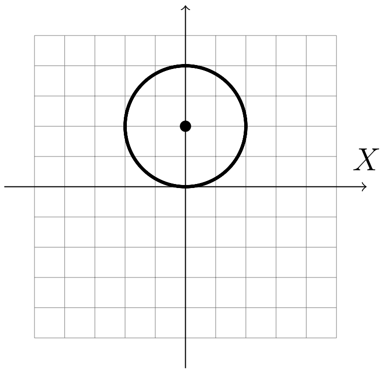
$r = 3$



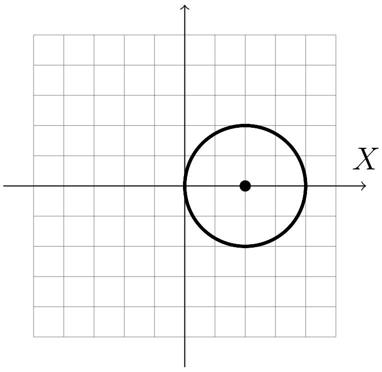
$\theta = \frac{\pi}{4}$



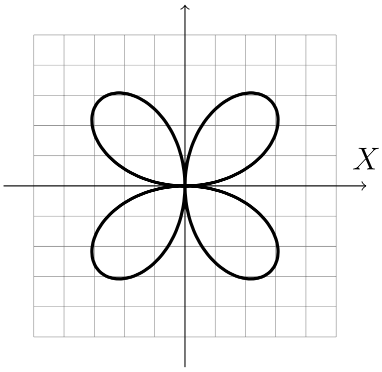
$r = 4\sin\theta$



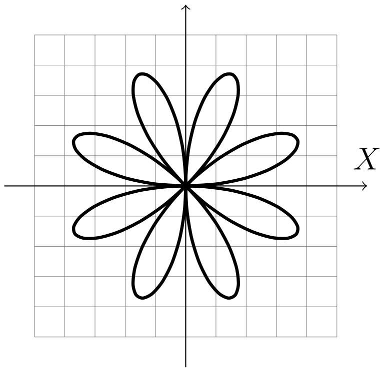
$r = 4\cos\theta$



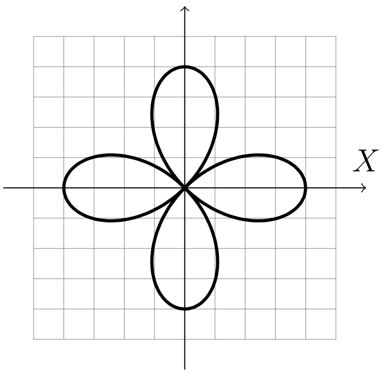
$r = 4\sin 2\theta$



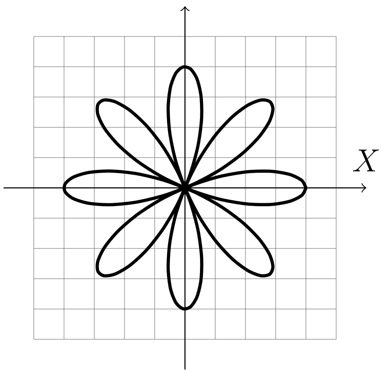
$r = 4\sin 4\theta$



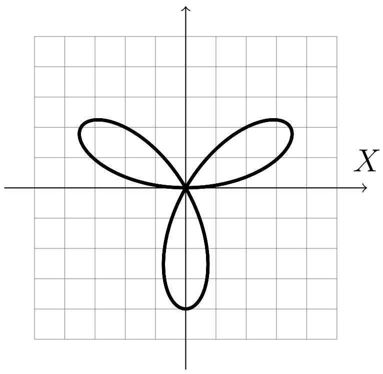
$r = 4\cos 2\theta$



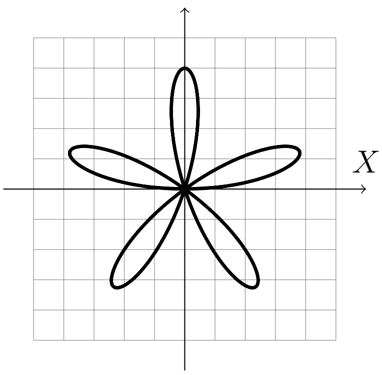
$r = 4\cos 4\theta$



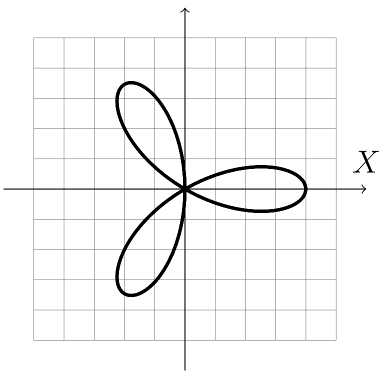
$r = 4\sin 3\theta$



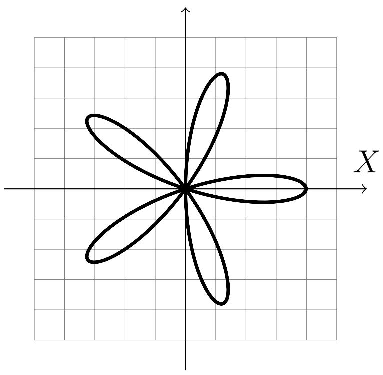
$r = 4\sin 5\theta$



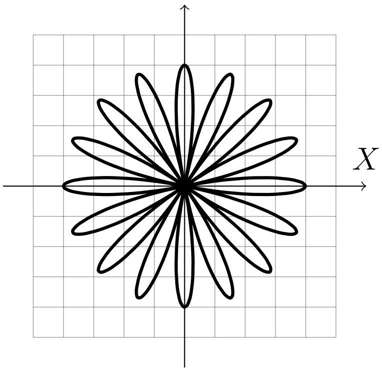
$r = 4\cos 3\theta$



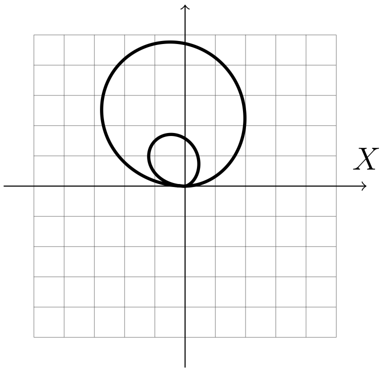
$r = 4\cos 5\theta$



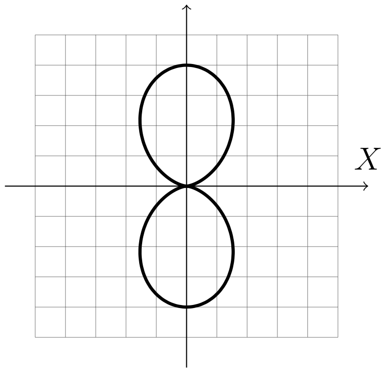
$r = 4\text{cos}8\theta$



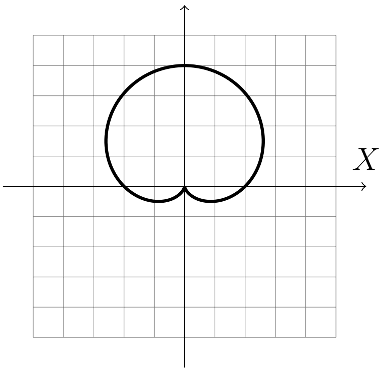
$r = \theta\text{sin}\theta$



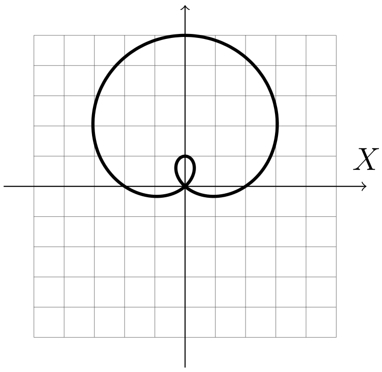
$r = 4\text{sin}^2\theta$



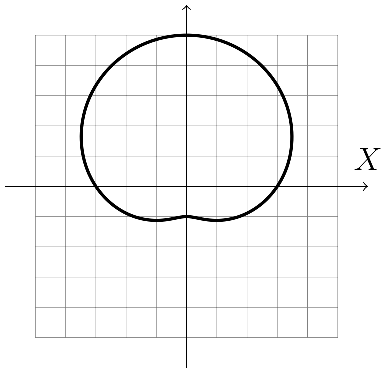
$r = 2 + 2\text{sin}\theta$



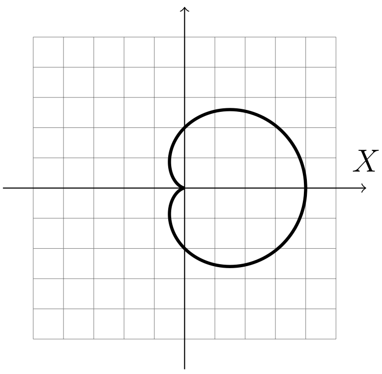
$r = 2 + 3\text{sin}\theta$



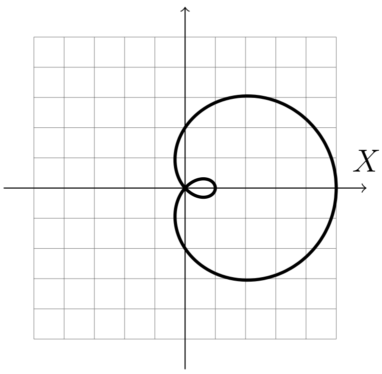
$r = 3 + 2\text{sin}\theta$



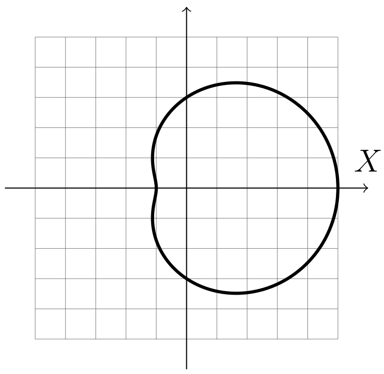
$r = 2 + 2\text{cos}\theta$



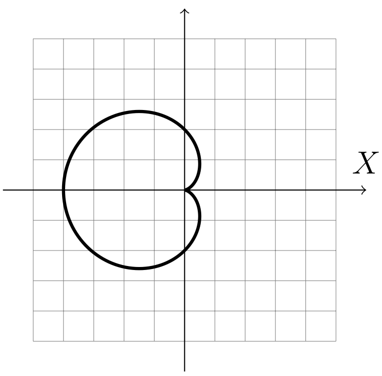
$r = 2 + 3\text{cos}\theta$



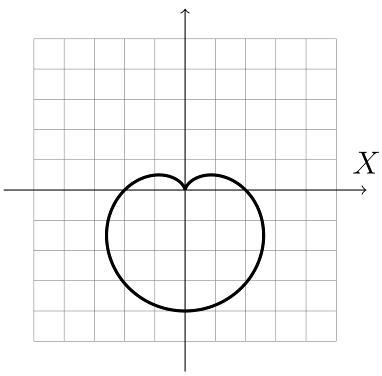
$r = 3 + 2\text{cos}\theta$



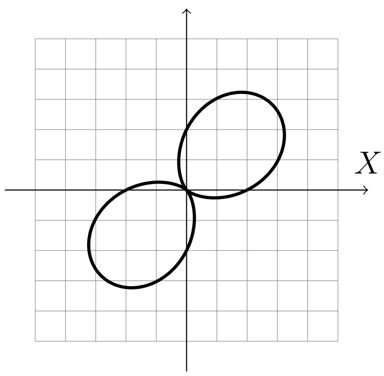
$r = 2 - 2\text{cos}\theta$



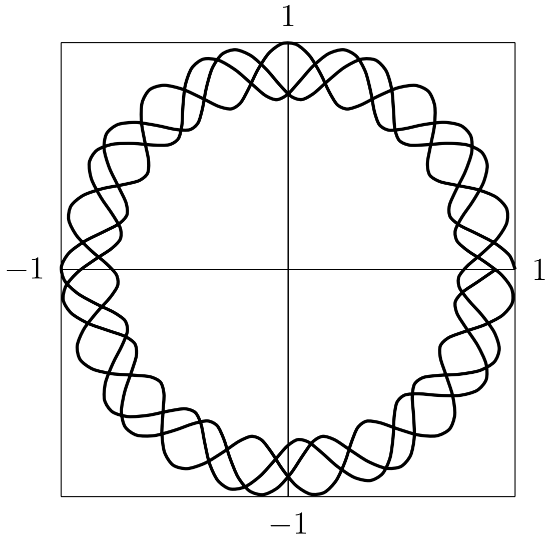
$r = 2 - 2\text{sin}\theta$



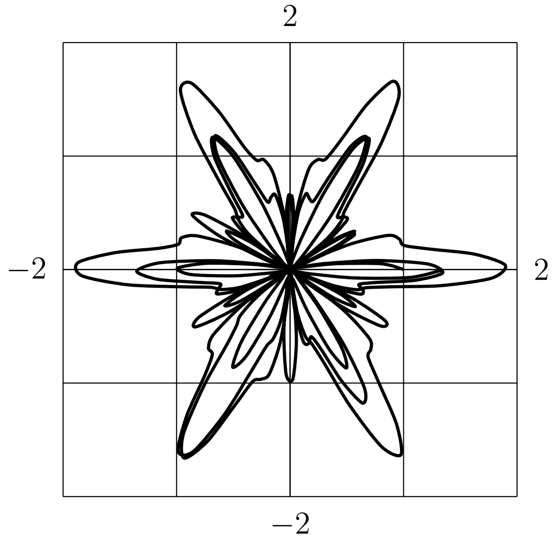
$r = 2 + 2\text{sin}2\theta$



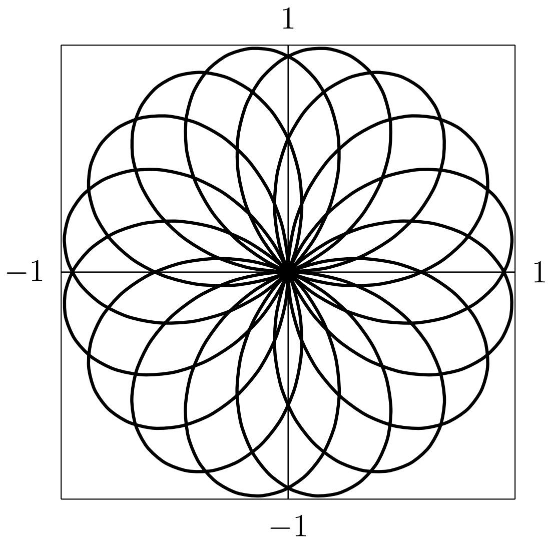
$r = \sin^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$



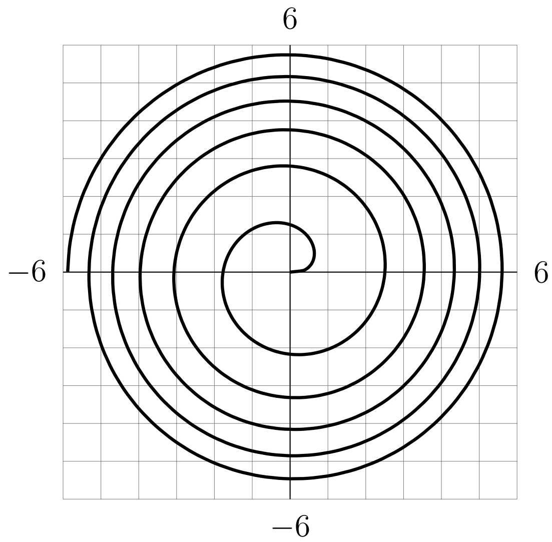
$r = \sin^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$



$r = \sin(\frac{8}{5}\theta)$



$r = \sqrt{\theta}$



แบบฝึกหัด 4.2

1. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

1.1 $r = 2$ 1.4 $r = 5\cos 2\theta$ 1.7 $r = 5\sin 6\theta$

1.2 $2\theta = \pi$ 1.5 $r = -3\sin 4\theta$ 1.8 $r = 6\cos 7\theta$

1.3 $4\theta = 3\pi$ 1.6 $r = 4\cos 3\theta$ 1.9 $r = -4\cos 5\theta$

2. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

2.1 $r = 1 - 3\cos\theta$ 2.3 $r = 1 + \cos\theta$ 2.5 $r = 3 + 3\cos\theta$

2.2 $r = 3 + 4\cos\theta$ 2.4 $r = 2 - 4\sin\theta$ 2.6 $r = -4 - 4\sin\theta$

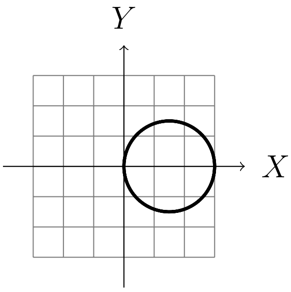
3. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 5 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

4. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 8 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

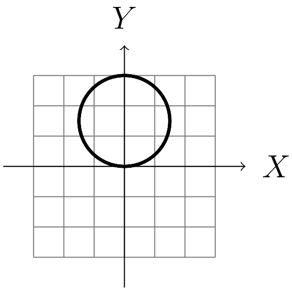
5. จงจับคู่สมการในระบบเชิงขั้วในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

5.1 $r = 3\sin 3\theta$ 5.3 $r = 2 + 2\cos\theta$ 5.5 $r = 3\cos 4\theta$

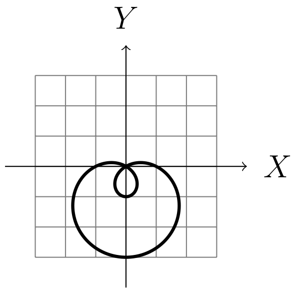
5.2 $r = 3\cos\theta$ 5.4 $r = 1 - 2\sin\theta$ 5.6 $r = 3\sin\theta$



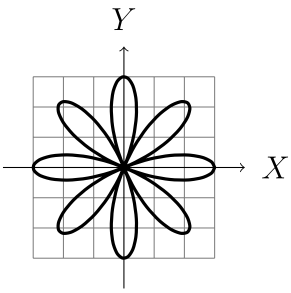
(ก)



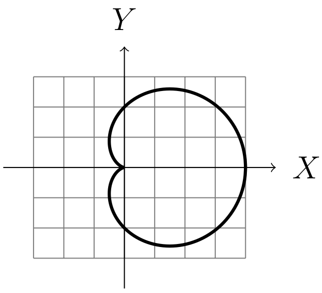
(ข)



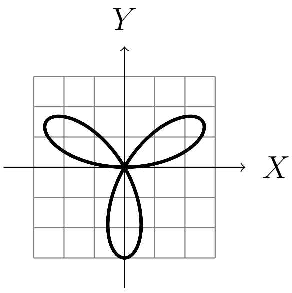
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

4.3 การหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ R เป็นพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน

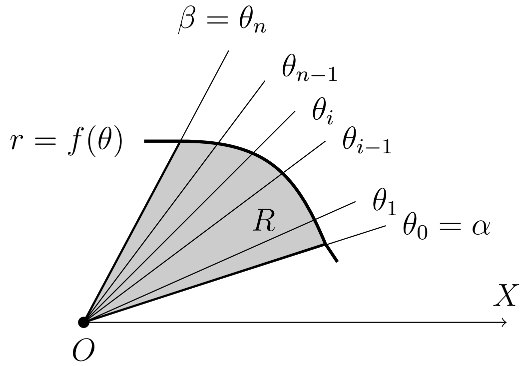
$$r = f(\theta) \text{ และเส้นตรง } \theta = \alpha \text{ และ } \theta = \beta$$

เมื่อ $r > 0$ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$

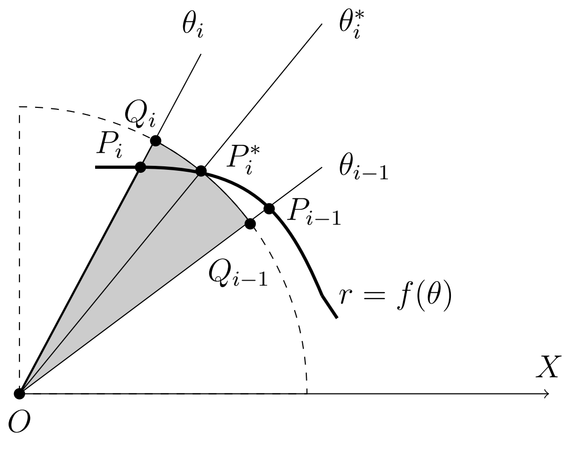
แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 4.13: การแบ่งพื้นที่ย่อย ๆ ของ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$ ให้
R_i เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$ ด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$
P_i เป็นจุด $(f(\theta_i), \theta_i)$ และ P_{i-1} เป็นจุด $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$
ให้ $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ และ P_i^* เป็นจุด $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$ แสดงดังรูป

รูปที่ 4.14: พื้นที่ของ R_i ที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$ และ $r = f(\theta)$



พิจารณาวงกลมรัศมี OP_i^* ตัดกับเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1} และเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i และให้ $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$R_i \approx \text{ พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

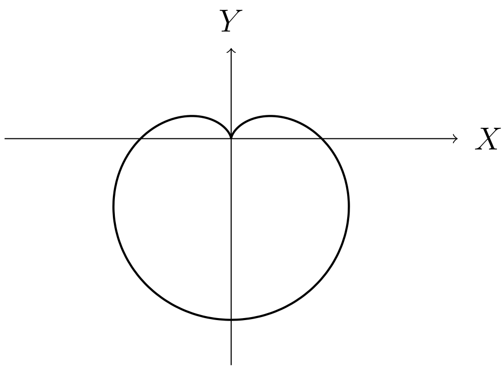
ดังนั้น

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

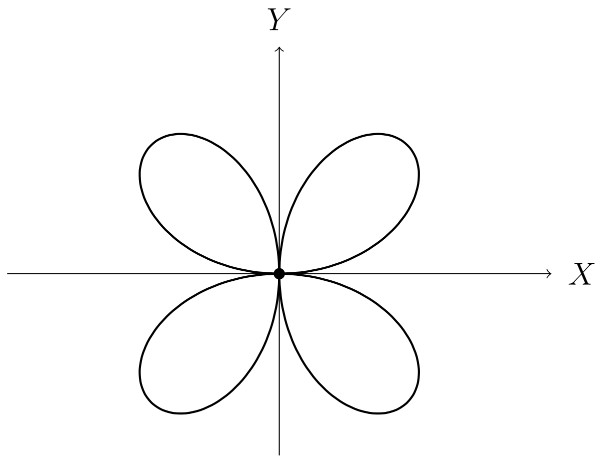
เมื่อแบ่ง n มาก ๆ และทำให้ $\Delta\theta_i$ มีค่าน้อย ๆ และ $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้ผลบวกของรีมันน์จะได้ว่า

$$\text{พื้นที่ } R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 2 - 2\sin\theta$



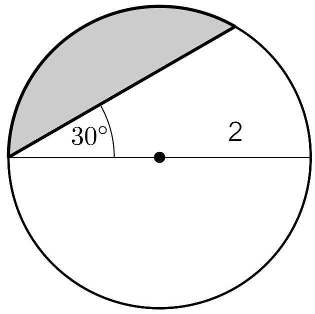
ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$



ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 + x - y = 0$$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาพื้นที่ (แรเงา) ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยคอร์ดและส่วนของวงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วย ดังรูปต่อไปนี้ โดย (1) ใช้ปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (2) ใช้เรขาคณิต



แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

   1.1 $r = 1 + \cos\theta$
   1.2 $r = 2\sin 2\theta$
   1.3 $r = \sin\theta + \cos\theta$
   1.4 $r = 2\cos 2\theta$
   1.5 $r = 3 - 2\cos\theta$
   1.6 $r = 2\sin 3\theta$
   1.7 $r = 4\cos^2\theta$
   1.8 $r = 4\cos 3\theta$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

   2.1 $r = 4 + 3\cos\theta$ บนช่วง $[0, \pi]$
   2.2 $r = 8\cos 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
   2.3 $r = 12\sin 3\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$
   2.4 $r = 2 + 2\cos\theta$ บนช่วง $[0, 2\pi]$
   2.5 $r = 3\sin\theta$ บนช่วง $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$
   2.6 $r = 2 - 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 6\sin\theta$ และ $r = 2 + 2\sin\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\sqrt{3}\cos\theta$
5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin 2\theta$ และ $r = 4\cos\theta$
6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r = \sqrt{3}$
7. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 2x$ และ $x^2 + y^2 = 2y$
8. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq \sqrt{3}$
9. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $y \geq 4$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a-1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a

2. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a+1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a

3. จงเขียนสมการ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

4. จงเขียนสมการ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta + 1} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta - 1} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

5. จงเขียนสมการ $r = \sin\theta\sin2\theta$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

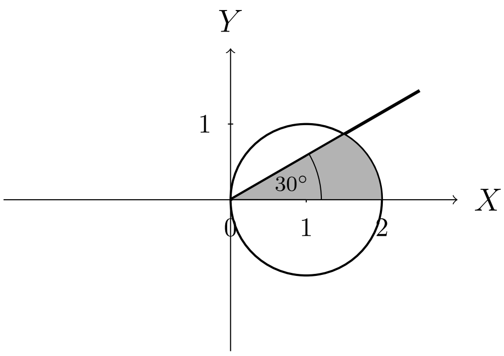
6. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = 1 + 2\cos\theta$ และ $r = 1 - 2\sin\theta$

7. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = \sin3\theta$ และ $r = \sin5\theta$

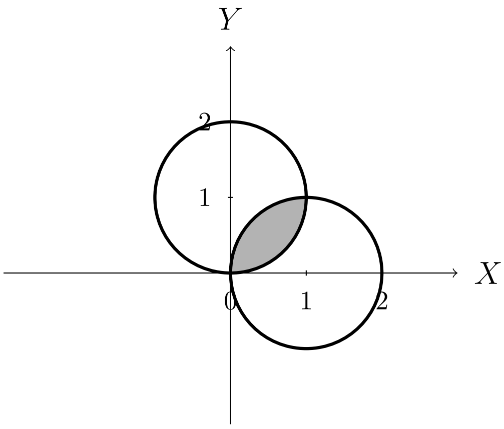
8. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{4}]$

9. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 2 - \sin\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{3}]$

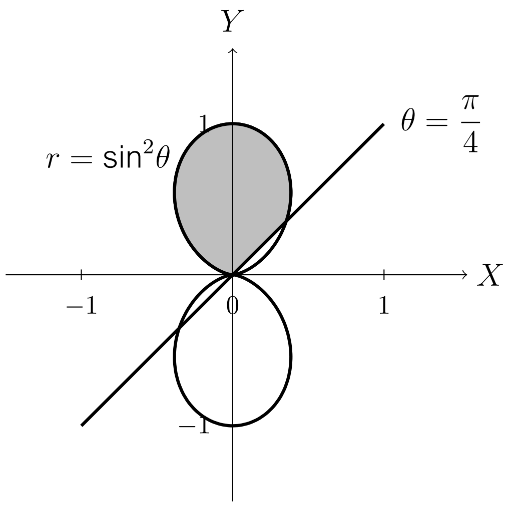
10. จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว



10.1



10.2



10.3

11. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2 + y^2 - x - y = 0$ และ $x^2 + y^2 + x - y = 0$

12. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2 + \sin\theta$ และ $r = 2 + \sqrt{3}\cos\theta$

13. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 3\theta$ และ $r = 2\sin\theta$

บทที่ 5

ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ปัญหาที่มักพบโดยทั่วไปมักเกี่ยวข้องกับหลายตัวแปรเช่น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A = wl$ เมื่อ w คือความกว้าง และ l คือความยาว กล่าวได้ว่า A ขึ้นกับตัวแปรสองตัวคือ w และ l เขียนแทนด้วย

$$A(w, l) = wl$$

ทำนองเดียวกันปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า $V = wlh$ เมื่อ w คือความกว้าง l คือความยาว และ h คือความสูง นั่นคือ V ขึ้นกับตัวแปรสามตัวคือ w, l และ h เขียนแทนด้วย

$$V(w, l, h) = wlh$$

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันลักษณะดังกล่าวและศึกษาลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้

5.1 ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^n$ เมื่อ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n พจน์)
เรียก f ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร** (real value function of n variables)
โดยเรียก D ว่า **โดเมน** (domain) ของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ระบุโดเมนให้ถือว่าเป็นโดเมนใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ และในหัวข้อนี้เราจะศึกษาในกรณี $n = 2$ โดยเรียกฟังก์ชัน f ว่า**ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร** (real value function of two variables) เขียนแทนด้วย $z = f(x, y)$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \ell\text{n}(1 - x^2 - y^2)$

1. จงหา k ซึ่งทำให้ $f(0, k) + f(k, 0) = f(0, 0)$

2. จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมน

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y - 1}}$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

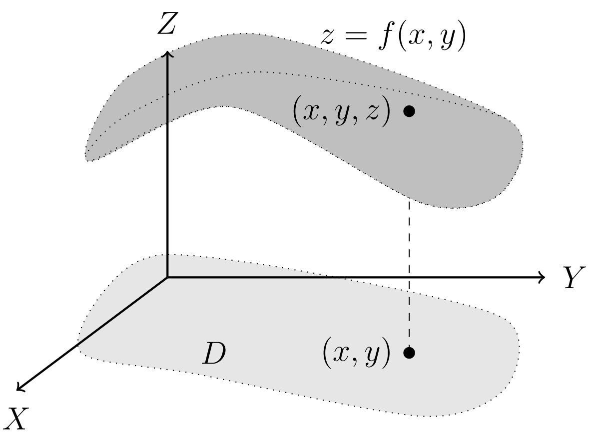
กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ กราฟของ f คือ

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \text{ เมื่อ } (x, y) \in D\}$$

เมื่อลงจุด (x, y, z) สำหรับทุกจุด $(x, y) \in D$ จะได้กราฟของในลักษณะพื้นผิว หรืออาจเรียก S ว่า**พื้นผิว** (surface) ของ $z = f(x, y)$

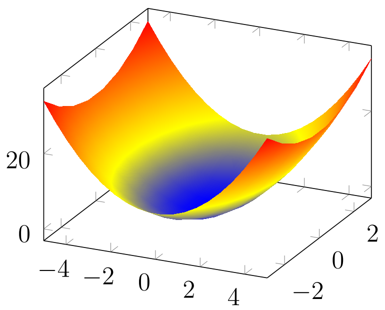
รูปที่ 5.1: แสดงความสัมพันธ์พื้นผิวกับโดเมน



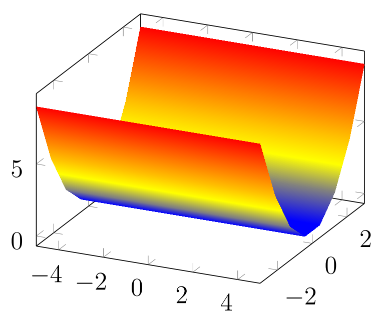
ต่อไปเป็นกราฟตัวอย่างของพื้นผิว

รูปที่ 5.2: ตัวอย่างกราฟพื้นผิว

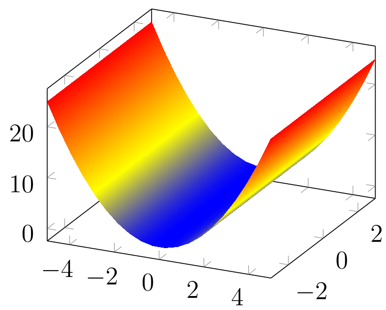
1. $z = x^2 + y^2$



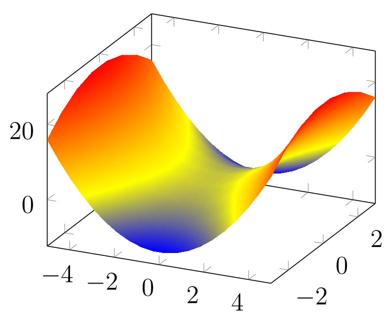
2. $z = y^2$



3. $z = x^2$



4. $z = x^2 - y^2$



แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าของฟังก์ชันที่จุดต่อไปนี้

    1.1 $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ ที่จุด $(0,1)$

    1.2 $f(x,y) = x + y + xy$ ที่จุด $(1,2)$

    1.3 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ที่จุด $(1,-2,2)$

    1.4 $f(x,y,z) = x^2y^2 - x^4 + 4zx^2$ ที่จุด $(a+b, a-b, ab)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ จงหา a ที่ทำให้ $f(0,a) + f(a,0) = f(3,4)$

3. จงหาโดเมนของ f พร้อมเขียนกราฟแสดงโดเมน

    3.1 $f(x,y) = \ell\text{n}(1 - x^2 + y^2)$

    3.2 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

    3.3 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y}$

    3.4 $f(x,y) = \dfrac{1}{y-x^2}$

    3.5 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

    3.6 $f(x,y) = \sqrt{1-x} + \ell\text{n}y$

4. จงหาโดเมนพร้อมร่างกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

    4.1 $f(x,y) = x - 2y$

    4.2 $f(x,y) = 3 - x^2$

    4.3 $f(x,y) = 1 + y^2$

    4.4 $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

    4.5 $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

    4.6 $f(x,y) = 1 - x^2 - 9y^2$

    4.7 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

    4.8 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^2}$

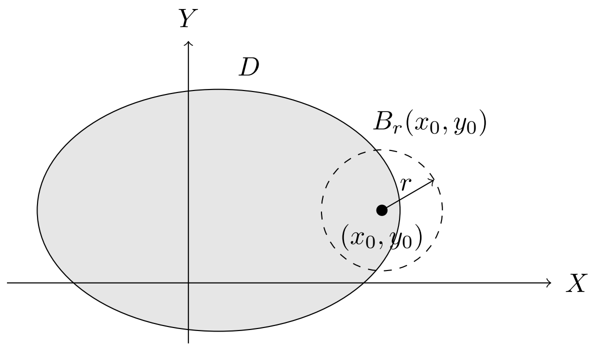
5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $D \subset \mathbb{R}^2$ เราจะกล่าวว่า $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ใน D ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $r > 0$

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap D \neq \varnothing$$

เมื่อ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$ เรียกว่า **แผ่นกลมเปิด** (open ball) ที่มีศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) รัศมี r แสดงดังรูป

รูปที่ 5.3: แสดงจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

ทฤษฎีบท 5.2.4 ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ $\mathbb{R}^2$ และให้ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$

การหาลิมิตโดยใช้บทนิยามอาจทำได้โดยยาก เราจึงมักจะใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตซึ่งคล้ายคลึงกับลิมิตของฟังกชันตัวแปรเดียวดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ แต่ข้อละการพิสูจน์ไว้หรือผู้อ่านอาจพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

ทฤษฎีบท 5.2.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และให้ L, M เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = LM$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (x^2y - y - 4x + 1)$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-5)} x\sqrt{x^2 - y}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-1)} |x + y - 1|$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x + y}{x - y}$

สำหรับ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ อยู่ในรูป ซึ่งเรียกว่ารูปแบบไม่กำหนด $I.F.\frac{0}{0}$ เราอาจจะใช้วิธีเช่นเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+3xy+2y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} \dfrac{x^2y+y^2-3x^2-3y}{xy-3x-y+3}$

ทฤษฎีบท 5.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ_0 ซึ่ง

$$|f(x,y)| < M \quad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_0$$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$

จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.9 จงใช้โดยทฤษฎีบท 5.2.8 แสดงว่า $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}$

ตัวอย่าง 5.2.11 จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ทฤษฎีบท 5.2.12 (ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeez Theorem))
ให้ $f, g, h : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ $r > 0$ โดยที่

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) \quad \text{ทุก ๆ } (x,y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

ตัวอย่าง 5.2.13 ให้ $f : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$$

จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

ตัวอย่าง 5.2.14 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

ลิมิตตามเส้นโค้ง

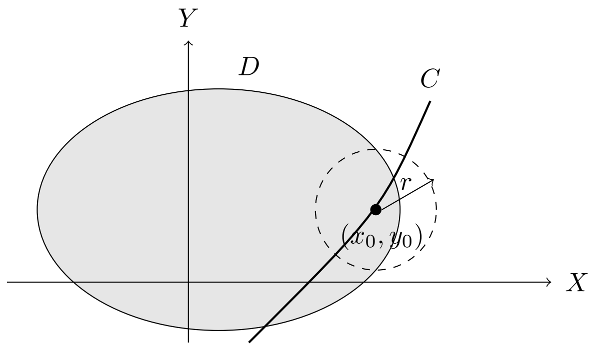
บทนิยาม 5.2.15 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ให้ C เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in C \cap D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

รูปที่ 5.4: เส้นโค้ง C ใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



จากบทนิยามดังกล่าวทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะใช้เพื่อแสดงว่าลิมิตไม่มีค่าโดยอาศัยการหาลิมิตตามเส้นโค้ง ซึ่งบทพิสูจน์จะขอละไว้ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 5.2.16 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D จะได้ว่า
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L \text{ ทุก ๆ เส้นโค้ง } C \text{ ใน } \mathbb{R}^2 \text{ ที่ผ่านจุด } (x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 5.2.17 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.18 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^4}$ ไม่มีค่า

ความต่อเนื่อง

บทนิยาม 5.2.19 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่อง**ที่จุด (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

และกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต $S \subset D$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 5.2.20 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

ตัวอย่าง 5.2.21 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(xy+x^2)$

1.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

1.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2y-xy^2}$

1.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

1.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$

1.6 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^6}$

1.7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^4}{x^6+y^6}$

1.8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$

1.9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

1.10 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x-y^2}{xy-y}$

1.11 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{xy-2x}{xy-6-2x+3y}$

1.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$

1.13 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$

1.14 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x}{x^2+|xy|+y^2}$

1.15 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3+3xy-x^2y-3y^2}{x^4+xy^2-x^3y-y^3}$

1.16 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{x^3-8y^3}{x^2-xy-2y^2}$

2. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนจุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{1-xy}$ ที่จุด $(1,1)$

2.2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(1,1)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(1,1)\end{cases}$ ที่จุด $(1,1)$

2.3 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ที่จุด $(0,0)$

3. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

4. จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

4.1 $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

4.2 $f(x,y)=\dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$

4.3 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-4}}$

4.4 $f(x,y)=e^{xy}\cos(xy^2+1)$

4.5 $f(x,y)=5x^2y\,\ell\mathrm{n}|1-x^2-y^2|$

4.6 $f(x,y)=\arcsin(xy)$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.3.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ โดยที่ $z = f(x, y)$ และ $(x_0, y_0) \in D$
อนุพันธ์ย่อย (partial deivatives) **ของ** f **เทียบกับ** x ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f **เทียบกับ** y ที่จุด (a, b) คือ

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f คือ f_x และ f_y

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \qquad \text{และ} \qquad f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ย่อย

$$f_x(x, y) = f_x = f_1 = D_1 f = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$f_y(x, y) = f_y = f_2 = D_2 f = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 y$ จงหาค่าของ $f_x(1, 0)$ และ $f_y(1, 0)$ โดยใช้บทนิยาม

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $f(x,y) = xy + x^2$ จงหาค่าของ $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

จากบทนิยามและตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรเมื่อเทียบตัวแปร x จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั่นคือไม่ขึ้นกับ y ถ้าอนุพันธ์ย่อยเมื่อเทียบตัวแปร y จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั่นคือไม่ขึ้นกับ x ดังนั้นเราสามารถนำสูตรต่าง ๆ ในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้ได้

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{2x+y^2}{x+y}$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2y}\sin^2(5y)$

ตัวอย่าง 5.3.7 กำหนดให้ $f(x,y) = yx + x^2 + y^2 + 2x + 7y$ จงหา (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ตัวอย่าง 5.3.8 กำหนดให้ $u(x,t) = \cos x \sin t$ จงหา (x,t) ที่ทำให้ $u_x + u_t = 0$

การหาอนุพันธ์ได้

บทนิยาม 5.3.9 ให้ $f : D \to \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้าทุก ๆ $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}$ สำหรับบาง $\delta > 0$ ซึ่ง

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

โดยที่

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

และ f หาอนุพันธ์ได้บน $S \subseteq D$ ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน S

ทฤษฎีบท 5.3.10 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

f ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

ทฤษฎีบท 5.3.11 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยบน $B_r(x_0, y_0) \subseteq D$ สำหรับบาง $r > 0$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 5.3.12 จงแสดงว่า $f(x, y) = xy^2 + x^2y + x + y$ มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x,y) = 3xy - 5x^4y^4$

1.2 $f(x,y) = \sqrt[3]{1-\sin^2(xy)}$

1.3 $f(x,y) = \ell\text{n}(\cos\sqrt{x+y})$

1.4 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

1.5 $f(x,y) = y^2 + x^2\tan(xy)$

1.6 $f(x,y) = 5e^{x^2y^2} + e^x\sin(x+y^2)$

1.7 $f(x,y) = e^x(\cos xy + \sin xy)$

1.8 $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1,1)$ และ $D_2f(1,1)$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}$ จงหาค่าของ $f_1(2,1)$ และ $f_2(2,1)$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$ จงหาค่าของ $f_x(1,0)$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ จงหาค่าของ $f_x(0,0)$

6. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

7. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

8. กำหนดให้ $f(x,y) = 2yx + x^2 + y^2 + 2x + 10y$ จงหา (x,y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

9. จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุดที่กำหนด

9.1 $f(x,y) = x^2 + y$ ที่จุด $(0,1)$

9.2 $f(x,y) = xy^2$ ที่จุด $(1,0)$

9.3 $f(x,y) = x^2 + y^2$ ที่จุด $(1,1)$

9.4 $f(x,y) = 2x^2 - 4y$ ที่จุด $(2,-3)$

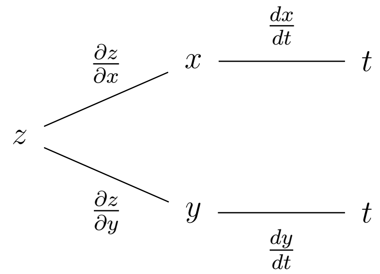
5.4 กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทฤษฎีบท 5.4.1 (กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร (Chain rule for one independent variable)) ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(t), y(t))$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.5: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร



ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \quad x = x(t) = \cos t \quad \text{และ} \quad y = y(t) = \sin t$$

จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้

$$z = f(x,y) = \ell\text{n}(2x^2 + xy), \quad x = x(t) = \sqrt{t} \quad \text{และ} \quad y = y(t) = 3t - 1$$

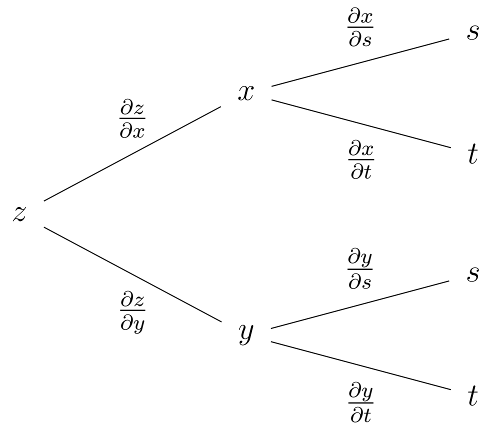
จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

ทฤษฎีบท 5.4.4 (กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร (Chain rule for two independent variables))
ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(s, t), y = y(s, t)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(s, t), y(s, t))$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.6: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร



ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2, \quad x = x(s, t) = 3s + 2t \quad \text{และ} \quad y = y(s, t) = 4s - t$$

จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้

$$u = f(x,y) = s^2 - t^2, \quad s = s(x,y) = x + y\ell\text{n}x \quad \text{และ} \quad t = t(x,y) = y + x\ell\text{n}y$$

จงหา $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ เมื่อ $(x,y) = (1,1)$

ตัวอย่าง 5.4.7 กำหนดให้ $z = f(u-v, v-u)$ จงแสดงว่า $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2e^y$, $x = 2\text{sin}t$ และ $y = t^4$

   1.2 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = \text{arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = \ell\text{n}t$ และ $y = \text{cos}t^2$

   1.3 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2y^3 + x\text{sin}y + tx$, $x = t + \dfrac{1}{t}$ และ $y = \sqrt{t}$

   1.4 $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ เมื่อ $z = 3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y$, $x = 2s - 3t$ และ $y = st + s^2$

   1.5 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = r\text{cos}^2t$ และ $y = r^2\text{sin}t$

   1.6 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $z = xye^{xy}$, $x = r\text{cos}\theta$ และ $y = r\text{sin}\theta$

2. กำหนดให้ $z = f(x, y) = 3x^4 - 2x^2y + y$, $x = x(s, t) = s^2 + t^2$ และ $y = y(s, t) = st$
   จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$

3. กำหนดให้ $z = \sqrt{5 + x - 2xy^4}$ เมื่อ $x = t^2$ และ $y = t - 1$
   จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

4. กำหนดให้ $z = xye^{xy}$ เมื่อ $x = r\text{cos}\theta$ และ $y = r\text{sin}\theta$
   จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $(x, y) = (1, \frac{\pi}{2})$

5. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

6. ให้ $u = f(x, y)$ เมื่อ $x = r\text{cos}\theta$ และ $y = r\text{sin}\theta$ จงแสดงว่า

   6.1 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \text{cos}\theta - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\text{sin}\theta}{r}$

   6.2 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r} \cdot \text{sin}\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\text{cos}\theta}{r}$

7. จากบทพิสูจน์ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{t \to t_0} \frac{E(x(t), y(t))}{t - t_0} = 0$$

5.5 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 5.5.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะเรียก $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ว่า**อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง** (fisrt-order partial derivative) และนิยาม**อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง** (second-order partial derivative) ดังนี้

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, f_{11} หรือ $D_{11}f$
2. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, f_{xy}, f_{12} หรือ $D_{12}f$
3. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx}, f_{21} หรือ $D_{21}f$
4. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy}, f_{22} หรือ $D_{22}f$

อนุพันธ์ย่อยอันดับอื่น ๆ นิยามทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x, y) = ye^{xy} + xy^2$

ตัวอย่าง 5.5.3 กำหนดให้ $f(x, y) = x\sin(xy)$ จงหา f_{yxx}

ตัวอย่าง 5.5.4 กำหนดให้ $u = ye^{-x} + \sin(2x + 3y)$ จงหา $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$

ตัวอย่าง 5.5.5 จงแสดงว่า $u(x,t) = e^{-k\omega^2 t}\cos(\omega x)$ เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

เมื่อ k, ω เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 5.5.6 กำหนดให้

$$z = f(x, y), \quad x = x(r, \theta) = r\cos\theta \quad \text{และ} \quad y = y(r, \theta) = r\sin\theta$$

จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}$

ทฤษฎีบท 5.5.7 (ทฤษฎีบทไคล์รอท (Clairaut's Theorem))
ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยที่ f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 5.5.8 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
จงหาค่าของ $f_{xy}(0,0)$ และ $f_{yx}(0,0)$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + 5y^6 + 3$

   1.2 $f(x,y) = \ell\text{n}(x^2 - 5y)$

   1.3 $f(x,y) = xe^y + ye^x$

   1.4 $f(x,y) = \sin(\cos(2x+3y))$

   1.5 $f(x,y) = e^{xy} + y\sqrt{x}$

   1.6 $f(x,y) = \sin(3x-2y) + \cos(2x-3y)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (2x+y)^5$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3e^{-5y}$ จงหา $f_{xyy}(0,1)$, $f_{xxx}(0,1)$ และ $f_{yyxx}(0,1)$

5. ให้ $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$ และ $y = re^{-s}$ จงหา $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

6. ให้ $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2+y^2)z$ จงแสดงว่า $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$

7. ให้ $z = \ell\text{n}(a^2x^2 + b^2y^2)$ จงแสดงว่า $b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

8. ให้ $u = xe^y + ye^x$ จงแสดงว่า $u_{yx} = u_{yxx} + u_{xyy}$

9. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องเงื่อนไข $u_{xx} + u_{yy} = 0$

   9.1 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   9.2 $u(x,y) = ye^{-xy} + e^y$

   9.3 $u(x,y) = \ell\text{n}(x^2+y^2) + e^x\sin y$

   9.4 $u(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

   9.5 $u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$

5.6 การประมาณค่าเชิงเส้น

สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

เมื่อค่าผิดพลาด $E(x, y)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะประมาณค่าของฟังก์ชันสองตัวแปรในลักษณะเดียวกับหนึ่งตัวแปร

บทนิยาม 5.6.1 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของ f ที่จุด (x, y) เขียนแทนด้วย $df(x, y)$ และกำหนดโดย

$$df(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

หรืออาจจะเขียน $\Delta x = dx$ และ $\Delta y = dy$

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 \sin xy$ จงหา $df(x, y)$

เราจะประมาณค่า $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \approx df(x, y)$ เมื่อ dx, dy มีค่าน้อย ๆ เราจะได้สูตร **การประมาณค่าเชิงเส้น** (Linear approximation) ดังนี้

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.3 จงใช้ค่าอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2}$

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวม $df(x,y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy}$
   1.2 $f(x,y) = e^x \cos xy$
   1.3 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
   1.4 $f(x,y) = x^3 \sin x \ln y$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

   2.1 $\sqrt{(3.01)^2+(3.97)^2}$
   2.2 $(1.002)e^{0.001}$
   2.3 $\frac{1}{\sqrt[3]{(0.003)^3+(7.979)^3}}$
   2.4 $(0.99)^{3.001}$
   2.5 $2.01\sin 32^\circ$
   2.6 $0.88\sqrt{1.11}$

3. จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ 5.003 เซนติเมตร และสูง 9.997 เซนติเมตร

4. ทรงกระบอกใบหนึ่งรัศมีฐานเป็น 5.026 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 24.003 เซนติเมตร จงคำนวณปริมาตรโดยประมาณของทรงกระบอกนี้

5. กรวยกลมใบหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีจาก 3 ฟุต และสูง 4 ฟุต ไปเป็นรัศมี 2.9 ฟุต และสูง 4.3 ฟุต จงหาค่าส่วนการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยใบนี้โดยใช้ค่าอนุพันธ์รวม

6. ในการคำนวณปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งวัดความกว้าง ความยาว และความสูงได้ 10 13 และ 16 นิ้วตามลำดับ ถ้าวัดความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 นิ้ว จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟประกอบ

 1.1 $f(x,y) = \dfrac{\ell\text{n}(x^2-y^2+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

 1.2 $f(x,y) = \text{arcsin}(x+y) + \sqrt{x^2-y^2}$

 1.3 $f(x,y) = \dfrac{1}{xy} + \sqrt{1-x^2-y^2}$

 1.4 $f(x,y) = \ell\text{n}(2+x^2+y^2) + \dfrac{1}{x}\sqrt{4-x^2-y^2}$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3}{x^2+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{x+y} & \text{เมื่อ } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x+y = 0 \end{cases}$

 จงหาค่าของ $D_1f(0,y)$ เมื่อ $y \neq 0$ และ $D_2f(x,0)$ เมื่อ $x \neq 0$

7. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(1,1)$ และ $f_y(1,1)$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

8. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{-\text{sin}(xy)}$

9. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{\ell\text{n}x}$

10. ให้ $z = e^{xy}$, $x = r\text{cos}\theta$ และ $y = r\text{sin}\theta$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

11. ให้ $z = f(x^2-y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

12. ให้ $z = f(x,y)$ และ $x = s\sqrt{t}$ และ $y = s^2 + t^2$

$$\text{จงหา} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{เมื่อ} \quad (s,t) = (1,1)$$

โดยที่ $f_x(1,2) = 2$ และ $f_y(1,2) = 1$

13. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{y^2} + ye^{x^2}$

14. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

15. ให้ $u = \sin(xy)$ จงแสดงว่า

$$xu_{xx} + yu_{yx} - u_x + 2xy^2u = 0$$

16. จงแสดงว่า $u(x,y,t) = 5\sin(3\pi x)\sin(4\pi y)\cos(10\pi t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$4u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy})$$

17. จงแสดงว่า $u(x,y,t) = 2\sin(\frac{x}{3})\sin(\frac{y}{4})e^{\frac{-25t}{16}}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$u_t = 9(u_{xx} + u_{yy})$$

18. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $1.001e^{0.009}$

19. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $(0.98)^{1.005}$

บทที่ 6

ปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

เราอาจเคยศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ในบทนี้เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^2$ โดยเริ่มต้นจากโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และขยายแนวคิดไปยังโดเมนทั่วไป โดยบางปัญหาอาจเปลี่ยนไปอยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วดังจะกล่าวต่อไปนี้

6.1 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ และ } c \le y \le d\}$$

พิจารณาการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ โดยที่

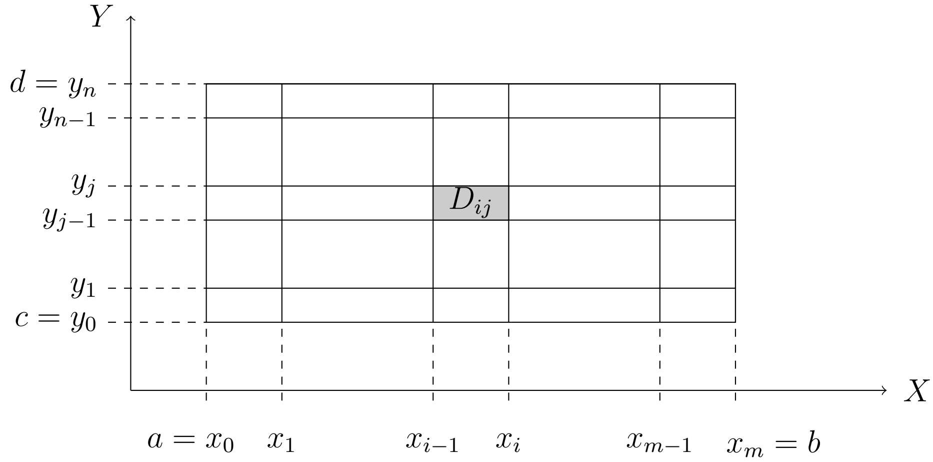
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = b$$

แบ่ง $[c,d]$ ออกเป็น n ช่วง ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยของรูป ij เมื่อ $i = 1, 2, ..., m$ และ $j = 1, 2, ..., n$

รูปที่ 6.1: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ และ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ให้ $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ แล้ว

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Reimann sum) ของ f บน D
ถ้าเราแบ่ง Δx_i และ Δy_i มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ และ

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = L$$

แล้วจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บน D
และเรียกค่าลิมิต L ว่า**ปริพันธ์สองชั้น** (double integral) ของ f บน D ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\iint_D f \qquad \text{หรือ} \qquad \iint_D f\,dA \qquad \text{หรือ} \qquad \iint_D f\,dxdy$$

เราสรุปได้ว่า

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x,y) = xy$ และ $D = [0,1] \times [0,2]$ จงหา $\displaystyle\iint_D f\,dA$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าการคำนวนค่าปริพันธ์สองชั้นผ่านลิมิตของผลบวกรีมันน์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงพิจารณา เหมือนกับการอินทิเกรตในหนึ่งตัวแปรดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1.2 (การหาปริพันธ์สองชั้น (Iterated integration))
การหาปริพันธ์สองชั้น $f(x,y)$ บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D=[a,b]\times[c,d]$ คือ

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

หรือ

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $f(x,y)=xy$ จงหา $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dydx$ และ $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_2^4\int_0^3(3x^2-2xy+3y^2+2)\,dydx$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \frac{x+y}{y}\ dxdy$

จากบทนิยามของการหาปริพันธ์สองชั้นถ้า $f(x,y) = g(x)h(y)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx &= \int_a^b \left[\int_c^d g(x)h(y)\,dy\right] dx = \int_a^b g(x)\left[\int_c^d h(y)\,dy\right] dx \\ &= \left[\int_a^b g(x)dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \left[\int_c^d h(y)dy\right]\left[\int_a^b g(x)\,dx\right]$$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{1}^{3} x(yx^2+y)\,dxdy$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$

ฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ ที่หาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ มีความสัมพันธ์กับบทนิยาม 6.1.2 โดยใช้ทฤษฎีบทฟูบินีซึ่งจะละการพิสูจน์ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 6.1.8 (ทฤษฎีบทฟูบินี (Fubini's Theorem))
ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a,b]\times[c,d]$ ถ้า f ต่อเนื่องบน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D และ

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\iint\limits_D x\sin(xy)\,dA$ เมื่อ $D=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

แบบฝึกหัด 6.1

1. กำหนดให้ $f(x,y)=x^2y$ และ $D=[0,1]\times[0,1]$ จงหา $\iint\limits_D f\,dA$ โดยใช้ผลบวกรีมันน์

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^3 (3-x+4y)\,dydx$

2.2 $\displaystyle\int_1^2\int_2^3 (x^2y+xy^2)\,dxdy$

2.3 $\displaystyle\int_0^1\int_1^6 \frac{1}{x+y}\,dxdy$

2.4 $\displaystyle\int_{-2}^2\int_3^8 \,dxdy$

2.5 $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 y\sin x\,dydx$

2.6 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^y\cos x\,dxdy$

2.7 $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 \frac{1}{x(y+1)}\,dxdy$

2.8 $\displaystyle\int_0^1\int_1^3 \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$

2.9 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^2 y\cos(xy)\,dxdy$

2.10 $\displaystyle\int_0^{\ell n2}\int_0^{\ell n3} e^{x+y}\sin x\,dxdy$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

3.1 $\displaystyle\iint\limits_D (3x^2-y)dA$ $\qquad D=[0,2]\times[0,3]$

3.2 $\displaystyle\iint\limits_D y\,dA$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,-3\le x\le 3,\ -2\le y\le 5\}$

3.3 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{(xy+1)^2}dA$ $\qquad D=[0,1]\times[0,1]$

3.4 $\displaystyle\iint\limits_D x\sqrt{1-x^2}dA$ $\qquad D=$ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x=0, x=1, y=2$ และ $y=3$

3.5 $\displaystyle\iint\limits_D x\cos(xy)\cos^2(\pi x)dA$ $\qquad D=[0,\tfrac{1}{2}]\times[0,\pi]$

3.6 $\displaystyle\iint\limits_D xe^{xy}dA$ $\qquad D=[0,1]\times[0,\ell n5]$

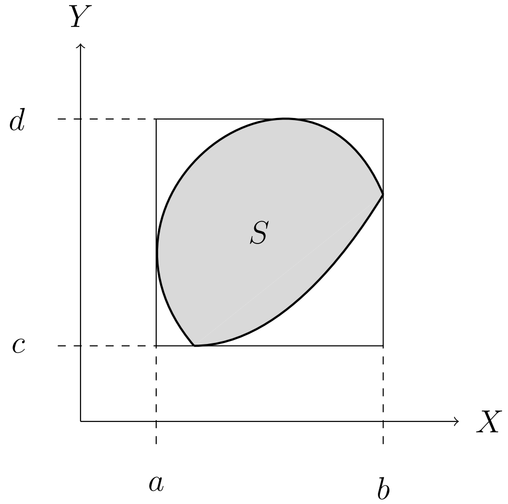
4. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 (x+1)^{2565}(xy+y)^{100}\,dydx$

5. จงหาปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 \frac{1}{y^2+x^2}\,dxdy$

6.2 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $S \subset D = [a, b] \times [c, d]$

รูปที่ 6.2: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปร



ให้ $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}$$

ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x,y) = 4xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_S f$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_S y$ เมื่อ $S = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$ และ $\sin x \le y \le \cos x\}$

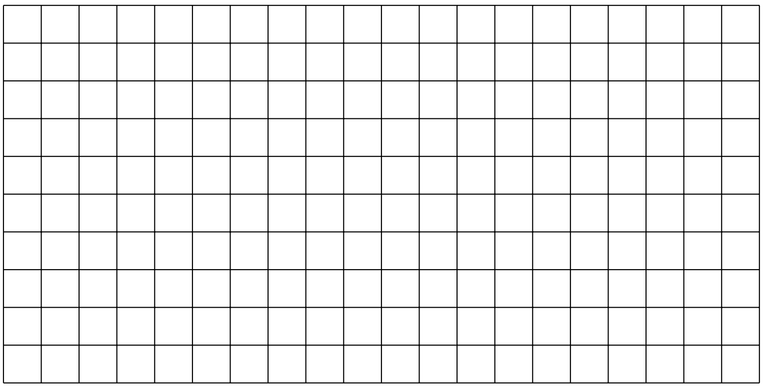
ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นของ $f(x,y) = x^2 + y^2$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x|$ และ $y = 2$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_S xy^2\,dA$

เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$

ตัวอย่าง 6.2.5 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{1+y^2}^{5} f(x,y)\,dxdy$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_2^6 \int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx$



ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dxdy$

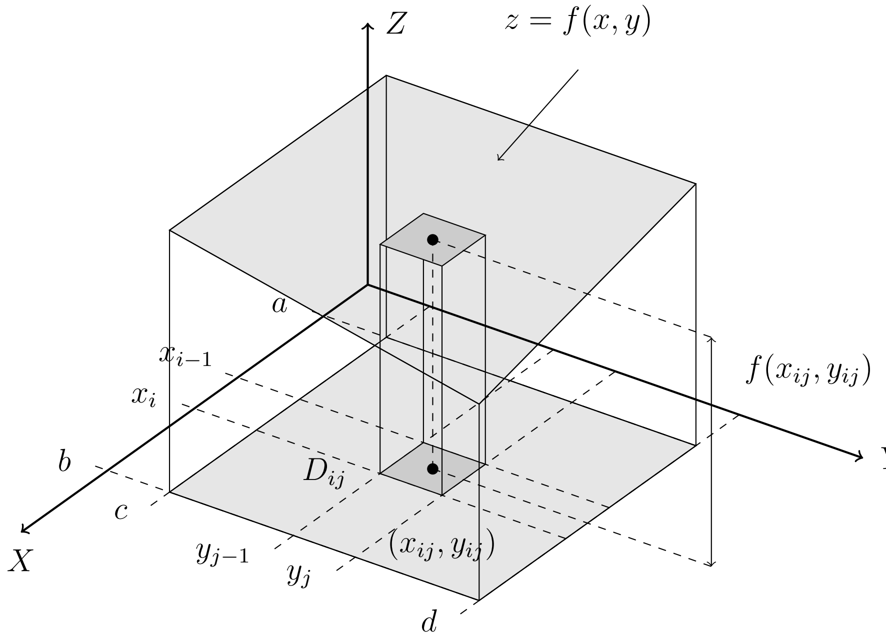
บทประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y) \geq 0$ ทุก $(x,y) \in S$ ซึ่งอินทิเกรตได้บน S จากนิยามของการหาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ จะมีความหมายคล้ายคลึงกับปริพันธ์ในฟังก์ชันตัวแปรเดียวนั่นคือ

$$\iint_S f\,dA = \text{ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว } z = f(x,y) \text{ บน } S$$

จากรูป 6.1 เราจะแสดงตัวอย่างของปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x,y)$ บน $D = [a,b] \times [c,d]$ ซึ่งเป็นโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปต่อไปนี้

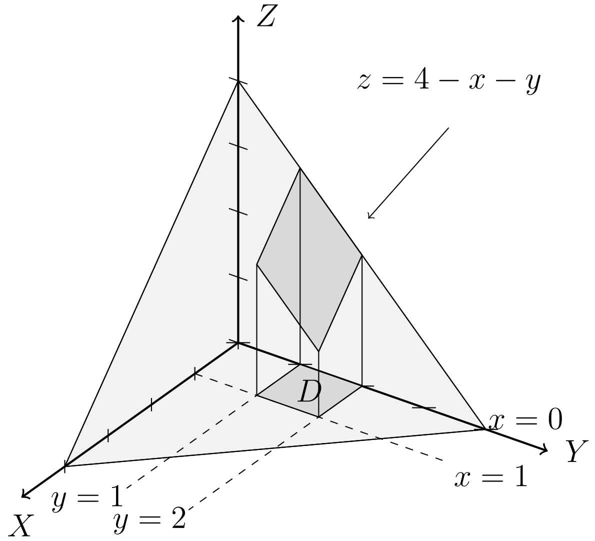
รูปที่ 6.3: ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x,y)$ บน $D = [a,b] \times [c,d]$



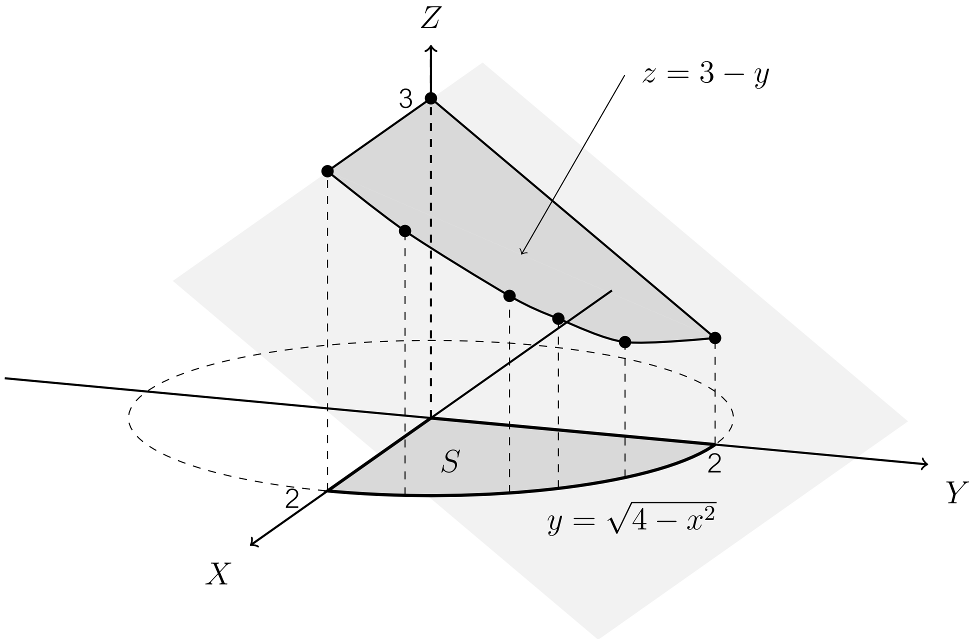
สำหรับกรณี $f(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$\iint_S dA = \text{พื้นที่อาณาบริเวณของ } S$$

ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วย ระนาบ $x+y+z=4$ และปิดล้อมด้วยระนาบ $x=0$, $x=1$, $y=1$ และ $y=2$



ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$



ตัวอย่าง 6.2.10 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการห่ปริพันธ์

1.1 $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx$

1.2 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^y} f(x,y)\,dxdy$

1.3 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2-4}^{0} f(x,y)\,dxdy$

1.4 $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)\,dxdy$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dxdy$

2.2 $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{x}^{2x} \frac{1}{(x+y)^3}\,dydx$

2.3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} xye^{x^2}\,dxdy$

2.4 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x-y|\,dydx$

2.5 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} x\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

2.6 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dydx$

2.7 $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{x} \frac{2}{x^2+y^2}\,dydx$

2.8 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6)\,dydx$

2.9 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{4x}^{x} e^{-y^2}\,dydx$

2.10 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2(\cos x)\,dxdy$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

3.1 $f(x,y)=\cos(x+y)$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=x$, $x=\pi$ และแกน X

3.2 $f(x,y)=xy^2$ S คืออาณาบริเวณเหนือเส้นตรง $y=1-x$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=1$

3.3 $f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x+1}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=2x-4$, $y=0$ และ $x=1$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

4.1 ระนาบ $x+2y+3z=6$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

4.2 พื้นผิว $z=1-x^2-y^2$ เหนือระนาบ XY

5. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

5.1 $y^2+x=0$ และ $y=x+2$

5.2 $y=x^2$ และ $y=\sqrt{x}$

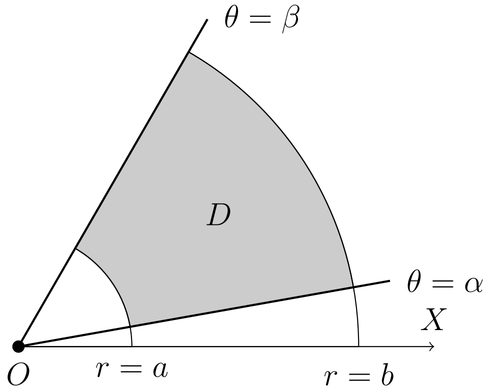
5.3 $xy=16$, $y=x$, $y=0$ และ $x=8$

6.3 ปริพันธ์สองชั้นบนระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$D = \{(r,\theta) \,:\, a \le r \le b \text{ และ } \alpha \le \theta \le \beta\}$$

รูปที่ 6.4: โดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D จะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ คือ แบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, ..., r_m$ โดยที่

$$a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_m = b$$

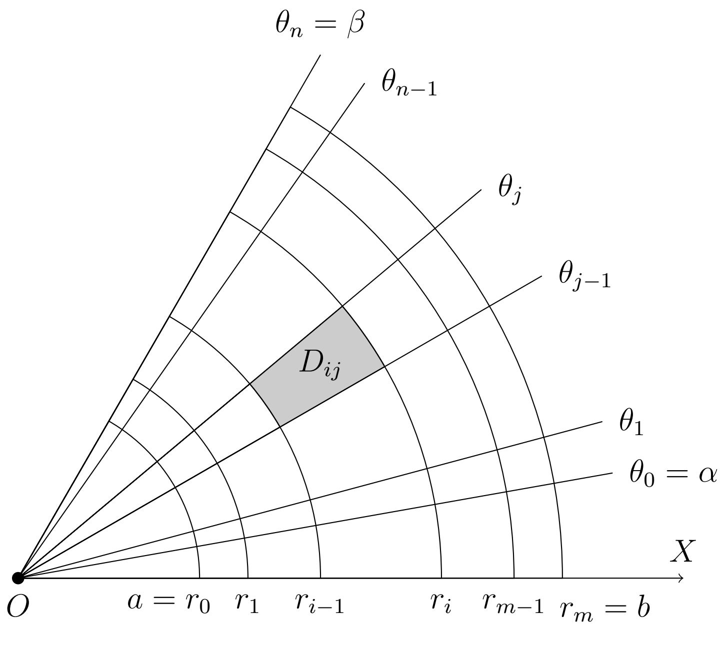
แบ่ง $[\alpha,\beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$

สำหรับ $i = 1,2,3,...,m$ และ $j = 1,2,3,...,n$ ให้

$$D_{ij} = \{(r,\theta) \,:\, r_{i-1} \le r \le r_i \text{ และ } \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$$

รูปที่ 6.5: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



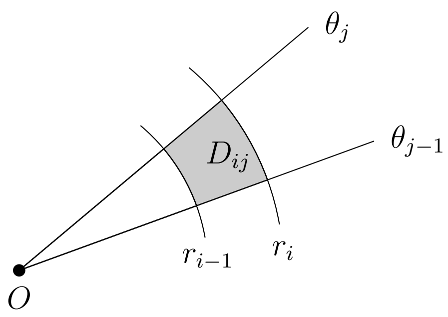
ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใน D_{ij} ดังนั้น

$$x_{ij} = r_{ij}\text{cos}\theta_{ij} \quad \text{และ} \quad y_{ij} = r_{ij}\text{sin}\theta_{ij} \qquad \text{เมื่อ} \quad r_{i-1} \le r_{ij} \le r_i \text{ และ } \theta_{j-1} \le \theta_{ij} \le \theta_j$$

และ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij} ดังนั้นผลบวกรีมันน์คือ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$

รูปที่ 6.6: พื้นที่ย่อยที่เกิดจากการแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



$$\begin{aligned}
\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \qquad (\text{ เลือก } r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง })
\end{aligned}$$

ดั้นนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij}\text{cos}\theta_{ij}, r_{ij}\text{sin}\theta_{ij})r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D ดังนั้น

$$\iint\limits_D f = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\text{cos}\theta, r\text{sin}\theta)r\, drd\theta$$

สรุปได้ว่า

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\text{cos}\theta, r\text{sin}\theta)r\, drd\theta$$

หรือ

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\text{cos}\theta, r\text{sin}\theta)r\, d\theta dr$$

ตัวอย่าง 6.3.1 กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(r\text{cos}\theta, r\text{sin}\theta)r\,drd\theta$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2+y^2=1$ และ $x^2+y^2=4$ จงหา

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dA$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dA$ เมื่อ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=4$ และ เส้นตรง $y=0$ และ $y=x$

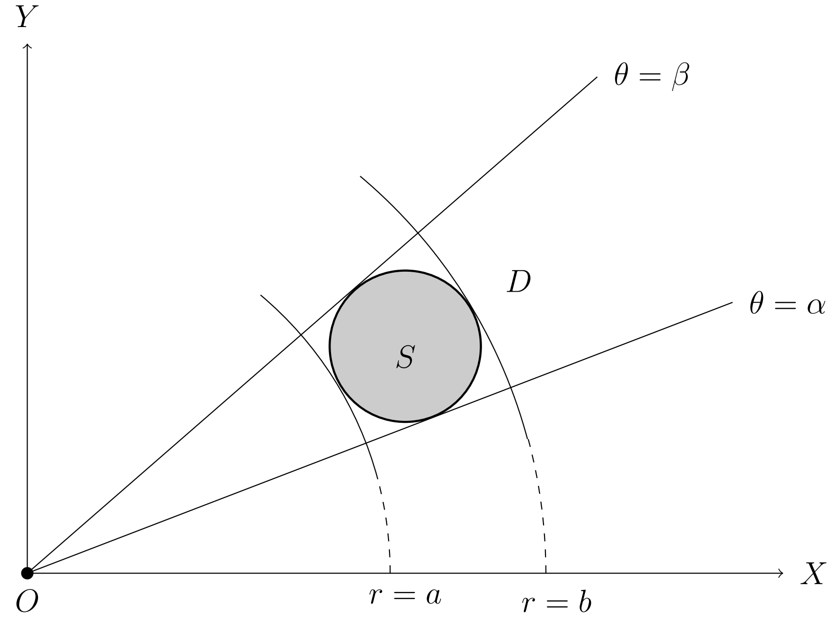
ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dxdy$

การปริพันธ์บนโดเมนทั่วไป S เมื่อ $f : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ เราจะหาค่าของ $\iint\limits_S f$ โดยการสร้างรูป

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ล้อมรอบ S แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 6.7: การสร้างรูป D ล้อมรอบโดเมนทั่วไป S ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

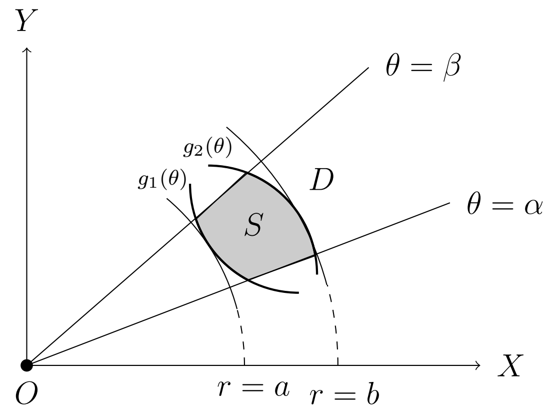
ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint\limits_S f(x,y)\, dA = \iint\limits_D \tilde{f}(x,y)\, dA$$

การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยพิจารณาโดเมนได้ 2 ชนิด ตามลำดับการหาปริพันธ์

ชนิดที่ 1 $drd\theta$ (Type I) $S = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta$ และ $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$

รูปที่ 6.8: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 1 $drd\theta$

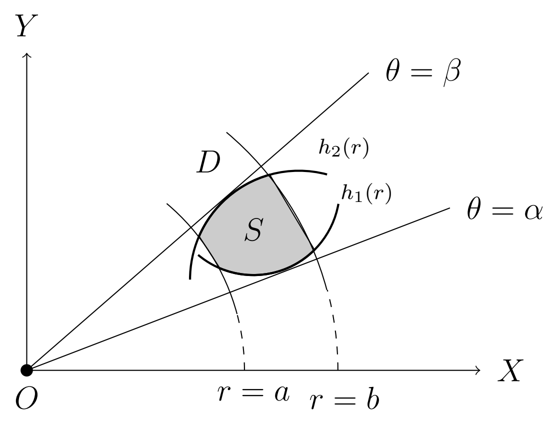


$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le r < g_1(\theta) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \le b \end{cases}$$

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta$$

ชนิดที่ 2 $d\theta dr$ (Type II) $S = \{(r,\theta) : a \le r \le b$ และ $h_1(r) \le \theta \le h_2(r)\}$

รูปที่ 6.9: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 2 $d\theta dr$



$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } \alpha \le \theta < h_1(r) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } h_1(r) \le \theta \le h_2(r) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(\theta) < \theta \le \beta \end{cases}$$

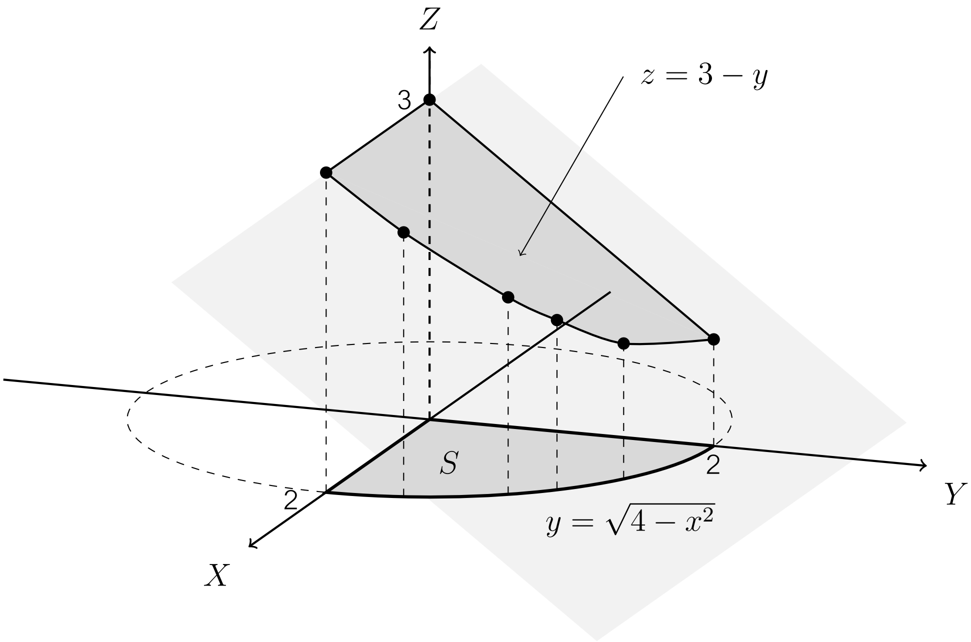
$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, d\theta dr$$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงเขียนปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 f(x,y)\,dydx$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 6.3.6 จงเขียนปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 6.3.7 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx$

ตัวอย่าง 6.3.8 จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$ โดยใช้การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ตัวอย่าง 6.3.9 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว แสดงว่าพื้นที่วงกลมรัศมี R เท่ากับ πR^2

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

   1.1 $\int_0^3 \int_0^x f(x,y)\,dydx$

   1.2 $\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.3 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

   1.4 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.5 $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dydx$

2. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดฉากพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

   2.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2\,drd\theta$

   2.2 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} r\cos\theta\,drd\theta$

   2.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sec\theta} r^2\sin 2\theta\,drd\theta$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\iint\limits_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

   3.1 $f(x,y)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$

   3.2 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ S คืออาณาบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และอยู่ภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$

   3.3 $f(x,y)=x+y$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$, $y=\sqrt{3}x$ และ $y=0$

   3.4 $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $y=\sqrt{2x-x^2}$ และแกน X

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=1$ และเส้นตรง $x=3$, $y=x$ และ $y=0$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4$ เมื่อ $y\geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=1$ และวงกลม $x^2+y^2=2y$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sin^2(xy)dxdy$

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 y^2e^{yx}dydx$

3. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^1\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx$

4. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^3\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)dxdy$

5. จงหาค่า $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx$

6. จงหาค่า $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^4 e^{-y^2}dydx$

7. จงหาค่า $\displaystyle\int_1^3\int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}dydx$

8. จงหา $\displaystyle\iint_S f$ เมื่อ $f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x+1}$ และ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=2x-4$, $y=0$ และ $x=1$

9. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

10. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dydx$

11. จงหา $\displaystyle\iint_S f(x,y)dA$ เมื่อ $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
    และ S คืออาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$

12. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=0$ และ $x=3$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

13. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=4x$ และเส้นโค้ง $y=\sqrt{2x}$ กับแกน X

14. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z=1-x^2-y^2$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2+y^2=x$

15. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z=4+x+2y$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2+y^2=1$

16. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = 4y$ และส่วนบนปิดด้วย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งล้อมรอบด้วยด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และส่วนบนปิดด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

18. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นที่ผิว $z = 4x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$

19. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วย

$$\text{ระนาบ } x = 0, z = 0, x = 5, z - y = 0 \text{ และ } z = 6 - 2y$$

20. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

    20.1 ระนาบ $x + y + z = 3$, $y = x$, $x + y = 2$, $x = 0$ และ $z = 0$ โดยที่ $x + y \geq 2$

    20.2 พื้นผิว $4x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = y + 3$ และอยู่เหนือระนาบ XY

    20.3 พื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และ $x^2 + y^2 = 4$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

21. จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$ และระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \leq 1$

22. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

    22.1 $y = 2|x|$ และ $y = x + 1$

    22.2 $y^2 = 9 - x$ และ $y^2 = 9 - 9x$

    22.3 $y = x^2 + x$ และ $y = 3 - x^2$

บทที่ 7

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

7.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า**สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt}=kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE)

ตัวอย่าง 7.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}=e^x$		
$\frac{d^3x}{dt^3}-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{d^2x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sin x$		

บทนิยาม 7.1.3 **อันดับ** (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี** (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\dfrac{dy}{dx} = x^3$		
$y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$		
$xu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$	3	3
$xy^2 = y' + \sqrt{1+y'}$		

บทนิยาม 7.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation)

ตัวอย่าง 7.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 3x^2$		
$y\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = \tan x$		
$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		
$xy^2 = y' + yy''$		
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{หรือ} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

บทนิยาม 7.1.7 ฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ เรียกว่า **ผลเฉลย** (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicite function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicite function) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงเรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนเรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ตัวอย่าง 7.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2 - 1)$

ตัวอย่าง 7.1.10 จงแสดงว่า $y = x - \dfrac{1}{x}$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' + y = 2x$

ตัวอย่าง 7.1.11 จงแสดงว่า $y = \sin x \cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

ตัวอย่าง 7.1.12 จงแสดงว่า $x^2y - xy^2 = c$ สอดคล้องสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

   1.2 $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$

   1.3 $e^x \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$

   1.4 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 + x\dfrac{d^2y}{dx^2} = \ell n x$

   1.5 $(x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$

   1.6 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   2.1 $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$

   2.2 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

   2.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

   2.4 $y = 4 + \dfrac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

7.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 7.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \qquad \text{หรือ} \qquad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย สมการแบบแยกตัวแปรได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $3(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(\ell\text{n}\, y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(3) = 1$

2. $4\sin^2 x\, dy + \sec^2 y\, dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

   1.2 $(y^4 + y)y' = \sin x - \cos x$

   1.3 $x^3\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2y^2}$ เมื่อ $x > 0$

   1.4 $3(4y^2 + 1)\,dx = y(x-1)\,dy$

   1.5 $\dfrac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy + e^{x+y}\,dx = 0$

   1.6 $(x^2y + x^2)\,dx = (xy^2 - y^2)\,dy$

   1.7 $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$

   1.8 $(x^2y^2\sec x\tan x + xy^2\sec x)\,dx + xy^3\,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx} = \sin^2 y$ เมื่อ $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

   2.2 $\sqrt{x^2+1}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ เมื่อ $y(\sqrt{3}) = 2$

   2.3 $dy = \dfrac{9e^x}{ey^2 + y^2e^2}\,dx$ เมื่อ $y(1) = 3$

   2.4 $x\,dy = \dfrac{y}{x - x^3}\,dx$ เมื่อ $y(2) = -2$

7.3 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 7.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่า**ฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n** (homogeneous function of degree n) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก } \lambda$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

1. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy}$

3. $f(x, y) = \dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

4. $f(x, y) = x^2\sin(xy)$

บทนิยาม 7.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์** (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์ก็ต่อเมื่อ $F(x,y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x,y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x,y)=F(\lambda x,\lambda y)$ ให้ $\lambda=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x>0$ และ $\lambda=-\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x<0$ จะได้ว่า

$$F(x,y)=F(\lambda x,\lambda y)=F\left(1,\frac{y}{x}\right)=G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx}=G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v=\dfrac{y}{x}$ แล้ว $y=vx$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v+x\frac{dv}{dx}=G(v)$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(y^2-x^2)\,dx+xy\,dy=0$$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x\frac{dy}{dx} - y = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

ตัวอย่าง 7.3.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xyy' = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 0$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

   1.2 $x\,dy - \left(x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\right)\,dx = 0$

   1.3 $(x^2y + y^3)\,dx + x^3\,dy = 0$

   1.4 $2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

   1.5 $xy' = x + y$

   1.6 $x\left(1 + \ell\text{n}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)y' = y$

   1.7 $2x\,dy - 2y\,dx = \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx$ เมื่อ $x > 0$

   1.8 $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y)\,dy$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$ เมื่อ $y(-1) = 0$

   2.2 $x^2y\,dx - (x^3 - y^3)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 1$

   2.3 $14xyy' = 6x^2 - 7y^2$ เมื่อ $y(-2) = 1$

   2.4 $x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2$ เมื่อ $y(1) = \dfrac{3}{2}$

7.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง** (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

ทุก ๆ (x,y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ ดังนั้น $dF(x,y)=0$ นั้นคือ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ $F(x,y)=c$

จากสมบัติค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \\ \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

จะได้ว่า $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$
ในทำนองเดียวกัน

$$F(x,y)=\int N(x,y)\,dy+C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x})\,dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4)\,dy = 0$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x+y^2}{xy^2}dy - \frac{y-4}{x^2}dx = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(-1) = 1$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$

   1.2 $(2x - 5y)\,dy = (6x - 2y)\,dx$

   1.3 $x(x\cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy\cos(x^2y) = y^2$

   1.4 $(\sin xy + xy + \cos xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2\cos xy = 0$

   1.5 $\dfrac{3xy+1}{y}dx + \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$

   1.6 $\pi y + (\pi x + \arcsin y)\dfrac{dy}{dx} = \sin x$

   1.7 $\dfrac{\ell\text{n}y}{x}\,dx + (\dfrac{\ell\text{n}x}{y} + \sin y)\,dy = 0$

   1.8 $(2xye^{x^2} + \sin y)\,dx + (x^2e^{x^2y} + x\cos y - y)\,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $(3x^2y + 2xy)\,dx + (x^3 + x^2 + 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 2$

   2.2 $(e^y + ye^x)\,dx - (e^x + xe^y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 0$

   2.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0) = -2$

   2.4 $\ell\text{n}(1 + y^2) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2xy}{1+y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2) = \sqrt{e-1}$

7.5 ตัวประกอบปริพันธ์

ในกรณีที่ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x,y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x,y)(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ นี้ว่า**ตัวประกอบปริพันธ์** (integrating factor) ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$
$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$N\frac{d}{dx}\ln|\mu| = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\frac{d}{dx}\ln|\mu| = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy}\ln|\mu| = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$ สรุปได้ว่า

1. สำหรับ $f(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$
2. สำหรับ $g(y) = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

2. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y(1 + x^2y)dx - xdy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = -1$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2xy\,dx + (x^3 + 2xy)\,dy = 0$

   1.2 $(4xy - 3x - 3x^2)\,dy - (2xy - y^2 + y)\,dx = 0$

   1.3 $(xy + y - 1)\,dx + x^3\,x\,dy = 0$

   1.4 $y(x + y^3)\,dx + x(y^3 - x)\,dy = 0$

   1.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

   1.6 $(1 + x\sin y)y' + \cos y = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

   2.2 $(x^2 + y)\,dx + (x^2\cos y - x)\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

   2.3 $1 + (x\tan y - 2\sec y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

7.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 7.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$
ดังนั้น $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ดังนั้น $\quad \mu = e^{\int P(x)\,dx}$

$$\begin{aligned} \mu\frac{dy}{dx} + \mu P(x)y &= \mu Q(x) \\ \frac{d}{dx}(\mu y) &= \mu Q(x) \\ \mu y &= \int \mu Q(x)\,dx + C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\quad \dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(y\cot x - \sec^2 x)\,dx + dy = 0$

ตัวอย่าง 7.6.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งบางสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น เราอาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม เช่นสมการต่อไปนี้จะเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli's equation)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = y^{1-n}$ จะสมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

จะได้ $\mu = e^{\int (1-n)P(x)\,dx}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $z = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$ หรือ

$$y^{1-n} = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

ตัวอย่าง 7.6.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 2$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + y\text{cot}x = 5e^{\text{cos}x}$

   1.2 $x^2y' + 3xy + 2x^5 = 0$

   1.3 $(2y-4)\,dx + dy = 0$

   1.4 $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{\text{sin}x}{x^2}$

   1.5 $y' - y = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

   1.6 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\ell\text{n}x} = x^2$

   1.7 $(3xy - 4y - 3x)\,dx + (x^2 - 3x + 2)\,dy = 0$

   1.8 $2(y - 3\text{sin}x)\text{cos}x\,dx + \text{sin}x\,dy = 0$

   1.9 $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

   1.10 $(y + xy^2)\,dx - \,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $(x-1)^3\dfrac{dy}{dx} + 4(x-1)^2y = x+1$ เมื่อ $y(3) = \dfrac{1}{2}$

   2.2 $(y - e^x\text{sin}x)\,dx + dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

   2.3 $(\text{cos}x)y' + y = 1$ เมื่อ $y(\frac{\pi}{4}) = 2$

   2.4 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3y}{x^4+1} = x^7$ เมื่อ $y(0) = 1$

   2.5 $xy' + y = y^2x^2e^x$ เมื่อ $y(1) = e$

   2.6 $x\dfrac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3$ เมื่อ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 $y = cx + \sqrt{1-c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1-(y')^2} = y$

1.2 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

1.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\frac{dy}{dx}$

1.4 $y = 4 + \frac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $3(4y^2+1)dx = y(x-1)dy$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy + e^{x+y}dx = 0$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\sqrt{x^2+1}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(\sqrt{3}) = 2$$

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

5.1 $xy' = x - y$

5.2 $(x^3+y^3)dx + 2y^2xdy = 0$

5.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' + 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$

5.4 $\frac{\ell n y}{x}dx + \left(\frac{\ell n x}{y} + \sin y\right)dy = 0$

5.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

5.6 $x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$

5.7 $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 3e^{2\cos x}$

5.8 $x^2y' + 3xy + 2x^5 = 0$

5.9 $(2y-4)\,dx + dy = 0$

5.10 $y(1+x^2y)dx - xdy = 0$

5.11 $(y - \sin x)\cos x dx + \sin x dy = 0$

5.12 $\frac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy + e^{x+y}\,dx = 0$

5.13 $(x^2y + x^2)\,dx = (xy^2 - y^2)\,dy$

5.14 $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$

5.15 $(x^2y^2\sec x\tan x + xy^2\sec x)\,dx + xy^3\,dy = 0$

5.16 $\dfrac{3xy+1}{y}dx + \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$

5.17 $\pi y + (\pi x + \text{arcsin}y)\dfrac{dy}{dx} = \text{sin}x$

5.18 $\dfrac{\ell\text{n}y}{x}\,dx + (\dfrac{\ell\text{n}x}{y} + \text{sin}y)\,dy = 0$

5.19 $(2xye^{x^2} + \text{sin}y)\,dx + (x^2e^{x^2y} + x\text{cos}y - y)\,dy = 0$

6. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

6.1 $(e^y + ye^x)dx + (e^x + xe^y)dy = 0$	เมื่อ $y(1) = 0$
6.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$	เมื่อ $y(-1) = 0$
6.3 $(y - e^x\text{sin}x)dx + xdy = 0$	เมื่อ $y(0) = 0$
6.4 $x^2y' = 2x^2 - 2xy + y^2$	เมื่อ $y(1) = 3$
6.5 $(y - e^x\text{sin}x)dx + dy = 0$	เมื่อ $y(0) = -1$
6.6 $\text{cos}x\dfrac{dy}{dx} + y\text{sin}x = 1$	เมื่อ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
6.7 $\text{sin}x\dfrac{dy}{dx} + y\text{cos}x = \text{sec}^2x$	เมื่อ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
6.8 $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$	เมื่อ $y(1) = 1$
6.9 $\ell\text{n}(1+y^2) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2xy}{1+y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}$	เมื่อ $y(2) = \sqrt{e-1}$
6.10 $y(1+x^2y)\,dx - x\,dy = 0$	เมื่อ $y(1) = -1$
6.11 $(x^2+y)\,dx + (x^2\text{cos}y - x)\,dy = 0$	เมื่อ $y(2) = 0$
6.12 $1 + (x\text{tan}y - 2\text{sec}y)y' = 0$	เมื่อ $y(-1) = \pi$
6.13 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3y}{x^4+1} = x^7$	เมื่อ $y(0) = 1$
6.14 $xy' + y = y^2x^2e^x$	เมื่อ $y(1) = e$
6.15 $x\dfrac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3$	เมื่อ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

7. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

8. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2(x-1) \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 1$$

9. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(\text{sin}^2x - 2y\text{cos}x)y' - 2y\text{sin}x\text{cos}x + y^2\text{sin}x = 0$$

เมื่อ $y(0) = -2$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Canada. Nelson Education, Ltd.

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
30. $\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
31. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
32. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\dfrac{d}{dx}C = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}x = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{na}$
11. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{d}{dx}\log_a|x| = \dfrac{1}{x\ell\text{na}}$
13. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
14. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
15. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
16. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
17. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
18. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
19. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsin}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\dfrac{d}{dx}\text{arccos}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\dfrac{d}{dx}\text{arctan}x = \dfrac{1}{1+x^2}$
22. $\dfrac{d}{dx}\text{arccot}x = -\dfrac{1}{1+x^2}$
23. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec}x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + udv$
7. $df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x}dx = \ell\text{n}|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C$
10. $\int \text{sin}x dx = -\text{cos}x + c$
11. $\int \text{cos}x dx = \text{sin}x + C$
12. $\int \text{sec}^2 x dx = \text{tan}x + C$
13. $\int \text{sec}x\text{tan}x dx = \text{sec}x + C$
14. $\int \text{csc}^2 x dx = -\text{cot}x + C$
15. $\int \text{csc}x\text{cot}x dx = -\text{csc}x + C$
16. $\int \text{tan}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x| + C$
17. $\int \text{sec}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x| + C$
18. $\int \text{cot}x dx = \ell\text{n}|\text{sin}x| + C$
19. $\int \text{csc}x dx = \ell\text{n}|\text{csc}x - \text{cot}x| + C$

20. $\int e^{ax}\text{sin}bxdx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{sin}bx - \text{b}\text{cos}bx) + C$

21. $\int e^{ax}\text{cos}bxdx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{cos}bx + b\text{sin}bx) + C$

22. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsin}x + C$

23. $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \text{arctan}x + C$

24. $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}x + C$

25. $\int \ell\text{n}xdx = x\ell\text{n}x - x + C$

26. $\int \text{cos}axdx = \dfrac{1}{a}\text{sin}ax + C$

27. $\int \text{sin}axdx = -\dfrac{1}{a}\text{cos}ax + C$

28. $\int \text{arcsin}xdx = x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$

29. $\int \text{arccos}xdx = x\text{arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$

30. $\int \text{arctan}xdx = x\text{arctan}x - \dfrac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

31. $\int \text{arccot}xdx = x\text{arccot}x + \dfrac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

32. $\int \text{arcsec}xdx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

33. $\int \text{arccsc}xdx = x\text{arccsc}x + \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Canada. Nelson Education, Ltd.

ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตรจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียติรนิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2^{nd} class honours),Chulalongkorn University, 2006

Email: thanatyod.ja@ssru.ac.th Office: 1145
Facebook: www.facebook.com/Jampawai Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารคำสอนรายวิชาแคลคูลัส ๑. (2565).สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
2. E-book: ความน่าจะเป็นและสถิติ. (2565). www.mebmarket.com
3. E-book: หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู. (2565). www.mebmarket.com
4. E-book: ทฤษฎีจำนวน. (2565). www.mebmarket.com
5. E-book: พีชคณิตนามธรรม. (2565). www.mebmarket.com
6. หนังสือ: ความจริงที่ต้องพิสูจน์. (2560). ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา