



คณิตศาสตร์

## Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ    ลิมิตและอนุกรมของจำนวนจริง                   คะแนนเต็ม   10 คะแนน  
เวลา       วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 17:00-17:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566  
ผู้สอน    ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา  
ชื่อ-สกุล ..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

1. (5 คะแนน) จงหาลิมิตของลำดับ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(2n+1)^2 + 1}$

2. (5 คะแนน) จงหาผลบวกของอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{3}{3^n} \right]$



คณิตศาสตร์

## เฉลย Quiz 1 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ    ลิมิตและอนุกรมของจำนวนจริง                   คะแนนเต็ม   10 คะแนน  
 เวลา       วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2566 เวลา 17:00-17:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2566  
 ผู้สอน    ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. (5 คะแนน) จงหาลิมิตของลำดับ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(2n+1)^2 + 1}$

**แนวคำตอบ** จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(2n+1)^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{(4n^2 + 4n + 1) + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2}{4n^2 + 4n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 + \frac{2}{n^2})}{n^2(4 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{2 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{1}{2} \quad \# \end{aligned}$$

2. (5 คะแนน) จงหาผลบวกของอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{3}{3^n} \right]$

**แนวคำตอบ** พิจารณาอนุกรมเทเลสโคป

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

และอนุกรมเรขาคณิต  $r = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{3^n} \right] = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad \#$$



คณะวิทยาศาสตร์

## Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ    อนุกรมกำลังและพหุนามเทย์เลอร์                    คะแนนเต็ม    10 คะแนน  
เวลา      ศุกร์ที่ 18 สิงหาคม 2566 เวลา 13:00-13:00 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566  
ผู้สอน    ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา  
ชื่อ-สกุล ..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

1. (5 คะแนน) จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่ออกของอนุกรม 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot (-3)^n}$$

2. (5 คะแนน) ให้  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  จงประมาณค่าของ  $\sqrt[3]{1.1}$  โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ  $f$  (ตอบในรูปทศนิยม 6 ตำแหน่ง)



คณะวิทยาศาสตร์

## เฉลย Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ   อนุกรมกำลังและพหุนามเทย์เลอร์   คะแนนเต็ม   10 คะแนน  
เวลา   ศุกร์ที่ 18 สิงหาคม 2566 เวลา 13:00-13:00 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566  
ผู้สอน   ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. (5 คะแนน) จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot (-3)^n}$

**แนวคำตอบ** จะเห็นว่าอนุกรมกำลังมีศูนย์กลางอยู่ที่ 1 แล้ว

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot (-3)^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot (-3)^n}{(x-1)^n} \right| &= \frac{1}{3} |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{3} |x-1| \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} |x-1| < 1 \\ &= |x-1| < 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 และ

$$\begin{aligned} |x-1| &< 3 \\ -3 < x-1 &< 3 \\ -2 < x &< 4 \end{aligned}$$

พิจารณา

กรณี  $x = -2$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot (-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะว่าเป็นอนุกรมพีที่  $p = 1$

กรณี  $x = 4$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot (-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยการใช้การทดสอบอนุกรมสลับ

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ  $(-2, 4]$  #

2. (5 คะแนน) ให้  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  จงประมาณค่าของ  $\sqrt[3]{1.1}$  โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ  $f$  (ตอบในรูปทศนิยม 6 ตำแหน่ง)

**แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[3]{x+1} &\longrightarrow f(0) &= 1 \\f'(x) &= \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} &\longrightarrow f'(0) &= \frac{1}{3} \\f''(x) &= -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} &\longrightarrow f''(0) &= -\frac{2}{9} \\f'''(x) &= \frac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}} &\longrightarrow f'''(0) &= \frac{10}{27} \\f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}(x+1)^{-\frac{11}{3}} &\longrightarrow f^{(4)}(0) &= -\frac{80}{81}\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}T_4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9 \cdot 2!}x^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}x^3 - \frac{80}{81 \cdot 4!}x^4 \\&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4\end{aligned}$$

ประมาณค่า  $\sqrt[3]{1.1}$  โดยแทน  $x = 0.1$  ใน  $T_4(x)$  จะได้

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1.1} &= f(0.1) \approx T_4(0.1) \\&= 1 + \frac{1}{3}(0.1) - \frac{1}{9}(0.1)^2 + \frac{5}{81}(0.1)^3 - \frac{10}{243}(0.1)^4 \\&= 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900} + \frac{5}{81000} - \frac{1}{243000} \\&= \frac{243000 + 8100 - 270 + 15 - 1}{243000} = \frac{250844}{243000} \\&= 1.032280 \quad \# \end{aligned}$$



คณะวิทยาศาสตร์

### Quiz 3 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ พิกัดเชิงขั้วและอนุพันธ์ย่อย คะแนนเต็ม 10 คะแนน  
เวลา พุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 17:00-17:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566  
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา  
ชื่อ-สกุล ..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

1. (5 คะแนน) จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว  $(r, \theta)$  ต่อไปนี้ ให้เป็นระบบพิกัดฉาก  $(x, y)$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = r \sec \theta$$

2. (5 คะแนน) จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 3xy + y^2$$



## เฉลย Quiz 3 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ พิกัดเชิงขั้วและอนุพันธ์ย่อย คะแนนเต็ม 10 คะแนน  
 เวลา พุธที่ 20 กันยายน 2566 เวลา 17:00-17:30 (สัปดาห์ที่ 11) ปีการศึกษา 1/2566  
 ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา  
 ชื่อ-สกุล ..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

1. (5 คะแนน) จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว  $(r, \theta)$  ต่อไปนี้ ให้เป็นระบบพิกัดฉาก  $(x, y)$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = r \sec \theta$$

**แนวคำตอบ** ให้  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  และ  $x^2 + y^2 = r^2$  จะได้ว่า  
วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} r^2(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= r^2 \cdot r \sec \theta \\ [r(\sin \theta + \cos \theta)]^2 &= r^3 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ [r \sin \theta + r \cos \theta]^2 &= r^3 \cdot \frac{r}{r \cos \theta} \\ (y + x)^2 &= r^4 \cdot \frac{1}{x} \\ x(y + x)^2 &= (r^2)^2 \\ x(y + x)^2 &= (x^2 + y^2)^2 \quad \# \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= r \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= r \cdot \frac{r}{r \cos \theta} \\ r^2(1 + 2 \sin \theta \cos \theta) &= r^2 \cdot \frac{r^2}{x} \\ r^2 + 2(r \sin \theta)(r \cos \theta) &= (r^2)^2 \cdot \frac{1}{x} \\ (x^2 + y^2) + 2yx &= (x^2 + y^2)^2 \cdot \frac{1}{x} \\ x[(x^2 + y^2) + 2yx] &= (x^2 + y^2)^2 \\ x[(x + y)^2] &= (x^2 + y^2)^2 \\ x(x + y)^2 &= (x^2 + y^2)^2 \quad \# \end{aligned}$$

2. (5 คะแนน) จงใช้บทนิยามหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 3xy + y^2$$

**แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)y + y^2] - [3xy + y^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xy + 3hy + y^2 - 3xy - y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3y = 3y \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3x(y+h) + (y+h)^2] - [3xy + y^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xy + 3xh + y^2 + 2yh + h^2 - 3xy - y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh + 2yh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x + 2y + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 2y + h) = 3x + 2y \quad \# \end{aligned}$$





คณะวิทยาศาสตร์

## Quiz 4 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ กฏลูกโซ่และปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนสี่เหลี่ยมผืนผ้า คะแนนเต็ม 10 คะแนน  
เวลา ศุกร์ที่ 6 ตุลาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566  
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา  
ชื่อ-สกุล ..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

---

1. (5 คะแนน) กำหนดให้

$$z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = \cos(r\theta) \quad \text{และ} \quad y = \sin(r\theta)$$

จงหา  $\frac{\partial z}{\partial r}$  ตอบในรูป  $r, \theta$

2. (5 คะแนน) จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2(x-y) \, dx \, dy$$



คณิตศาสตร์

## เฉลย Quiz 4 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ กฏลูกโซ่และปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนสี่เหลี่ยมผืนผ้า คะแนนเต็ม 10 คะแนน  
 เวลา ศุกร์ที่ 6 ตุลาคม 2566 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 13) ปีการศึกษา 1/2566  
 ผู้สอน ผศ.ดร.ธนชัย จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. (5 คะแนน) กำหนดให้

$$z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = \cos(r\theta) \quad \text{และ} \quad y = \sin(r\theta)$$

จงหา  $\frac{\partial z}{\partial r}$  ตอบในรูป  $r, \theta$

**แนวคำตอบ** จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{(x-y) \frac{\partial}{\partial x}(x+y) - (x+y) \frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2} \cdot (-\theta \sin(r\theta)) + \frac{(x-y) \frac{\partial}{\partial y}(x+y) - (x+y) \frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2} \cdot (\theta \cos(r\theta)) \\ &= \frac{(x-y) \cdot 1 - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} \cdot (-\theta \sin(r\theta)) + \frac{(x-y) \cdot 1 - (x+y)(-1)}{(x-y)^2} \cdot (\theta \cos(r\theta)) \\ &= \frac{2y\theta \sin(r\theta)}{(x-y)^2} + \frac{2x\theta \cos(r\theta)}{(x-y)^2} = \frac{2y\theta \sin(r\theta) + 2x\theta \cos(r\theta)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2 \sin(r\theta) \cdot \theta \sin(r\theta) + 2 \cos(r\theta) \cdot \theta \cos(r\theta)}{(\cos(r\theta) - \sin(r\theta))^2} = \frac{2\theta[\sin^2(r\theta) + \cos^2(r\theta)]}{(\cos(r\theta) - \sin(r\theta))^2} \\ &= \frac{2\theta}{(\cos(r\theta) - \sin(r\theta))^2} \quad \# \end{aligned}$$

2. (5 คะแนน) จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2(x-y) \, dx \, dy$$

**แนวคำตอบ** จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x+y)^2(x-y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2)(x-y) \, dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3) \, dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^3y}{3} - \frac{x^2y^2}{2} - xy^3 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} - y^3 \right] dy \\ &= \left[ \frac{1}{4}y + \frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = 0 \quad \# \end{aligned}$$