เฉลย Assignment 10
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ กฎลูกโซ่ อนุพันธ์อันดับสูง และการประมาณค่าเชิงเส้น **สัปดาห์ที่** 11 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $z = e^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= e^{xy}y\cdot\cos\theta + e^{xy}x\cdot\sin\theta \\
&= e^{xy}(y\cos\theta + x\sin\theta) \qquad \# \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= e^{xy}y\cdot r(-\sin\theta) + e^{xy}x\cdot r\cos\theta \\
&= re^{xy}(x\cos\theta - y\sin\theta) \qquad \#
\end{aligned}$$

2. ให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

   แนวคำตอบ ให้ $u = x^2 - y^2$ แล้ว $z = f(u)$ จะได้ว่า

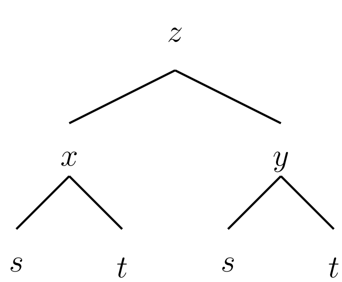
$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot(-2y) \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot(2x) \\
\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} &= x\frac{dz}{du}\cdot(-2y) + y\frac{dz}{du}\cdot(2x) \\
&= (-2xy + 2xy)\frac{dz}{du} = 0
\end{aligned}$$

3. ให้ $z = f(x, y)$ และ $x = s\sqrt{t}$ และ $y = s^2 + t^2$

$$\text{จงหา} \quad \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{เมื่อ} \quad (s,t) = (1,1)$$

   โดยที่ $f_x(1,2) = 2$ และ $f_y(1,2) = 1$

   แนวคำตอบ พิจารณาแผนภาพ



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_x(x,y)\cdot\frac{s}{2\sqrt{t}} + f_y(x,y)\cdot 2t$$

เนื่องจาก $s=t=1$ จะได้ว่า $x=1$ และ $y=2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}(1,1) &= f_x(1,2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1}} + f_y(1,2)\cdot 2(1)\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 2\\ &= 3 \quad \#\end{aligned}$$

4. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{y^2}+ye^{x^2}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= e^{y^2}+ye^{x^2}2x = e^{y^2}+2xye^{x^2}\\ f_{xx}(x,y) &= 0+2xy\cdot e^{x^2}2x+2y\cdot e^{x^2} = 2ye^{x^2}(2x^2+1)\\ f_{xy}(x,y) &= e^{y^2}2y+2xe^{x^2}\cdot 1 = 2ye^{y^2}+2xe^{x^2}\\ f_y(x,y) &= xe^{y^2}2y+e^{x^2} = 2xye^{y^2}+e^{x^2}\\ f_{yy}(x,y) &= 2xy\cdot e^{y^2}2y+2x\cdot e^{y^2}+0 = 2xe^{y^2}(2y^2+1)\\ f_{yx}(x,y) &= 2ye^{y^2}+e^{x^2}2x = 2ye^{y^2}+2xe^{x^2}\end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x,y) = y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\\ f_{xx}(x,y) &= -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\\ f_{xy}(x,y) &= -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot x(-y^{-2})\\ &= \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\\ f_y(x,y) &= 1\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)+y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot x(-y^{-2})\\ &= \sin\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\\ f_{yy}(x,y) &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot x(-y^{-2})-x(-y^{-2})\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot x(-y^{-2})\right)\\ &= -\frac{x^2}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\\ f_{yx}(x,y) &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

6. ให้ $u = \sin(xy)$ จงแสดงว่า

$$xu_{xx} + yu_{yx} - u_x + 2xy^2u = 0$$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u &= \sin(xy) \\ u_x &= y\cos(xy) \\ u_{xx} &= -y^2\sin(xy) \\ u_y &= x\cos(xy) \\ u_{yx} &= \cos(xy) - xy\sin(xy) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} xu_{xx} + yu_{yx} - u_x + 2xy^2u &= x(-y^2\sin(xy)) + y(\cos(xy) - xy\sin(xy)) - y\cos(xy) + 2xy^2\sin(xy) \\ &= -xy^2\sin(xy) + y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) - y\cos(xy) + 2xy^2\sin(xy) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $1.001e^{0.009}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x,y) = xe^y$ จะได้ว่า $f_x(x,y) = e^y$ และ $f_y(x,y) = xe^y$
กำหนดให้ $x = 1$, $y = 0$ $dx = 0.001$ และ $dy = 0.009$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1.001e^{0.009} &= f(1.001, 0.009) \\ &= f(1 + 0.001, 0 + 0.009) \\ &\approx f(1,0) + f_x(1,0)\cdot 0.001 + f_y(1,0)\cdot 0.009 \\ &= 1 + 1\cdot 0.001 + 1\cdot 0.009 \\ &= 1.010 \quad \# \end{aligned}$$

8. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $(0.98)^{1.005}$

แนวคำตอบ ให้ $f(x,y) = x^y$ จะได้ว่า $f_x(x,y) = yx^{y-1}$ และ $f_y(x,y) = x^y\ln x$
กำหนดให้ $x = 1$, $y = 1$ $dx = -0.02$ และ $dy = 0.005$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (0.98)^{1.005} &= f(0.98, 1.005) \\ &= f(1 - 0.02, 1 + 0.005) \\ &\approx f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(-0.02) + f_y(1,1)\cdot 0.005 \\ &= 1 + 1(-0.02) + 0\cdot 0.005 \\ &= 0.98 \quad \# \end{aligned}$$