เฉลย Assignment 11
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนสี่เหลี่ยมผืนผ้า และโดเมนปกติ **สัปดาห์ที่** 12 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sin^2(xy)dxdy$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sin^2(xy)dxdy &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\left[\frac{1-\cos(2xy)}{2}\right]dxdy \\
&= \int_0^2\left[\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}\sin(2xy)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}dy \\
&= \int_0^2\left[\frac{\pi}{8}y-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]dy \\
&= \left[\frac{\pi}{16}y^2+\frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right]_0^2 \\
&= \left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\pi}\right]-\frac{1}{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi} \quad \#
\end{aligned}$$

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 y^2e^{yx}dydx$

แนวคำตอบ

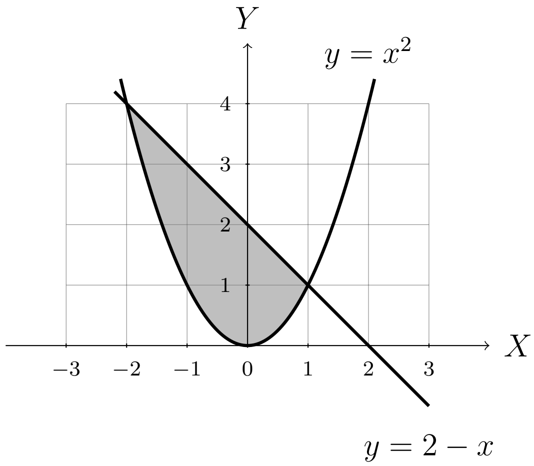
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1\int_0^1 y^2e^{yx}dydx &= \int_0^1\int_{-1}^1 y^2e^{yx}dxdy \\
&= \int_0^1 \left[ye^{xy}\right]_{x=-1}^{x=1}dy \\
&= \int_0^1 \left[ye^y-ye^{-y}\right]dy \\
&= \left[(ye^y-e^y)-(-ye^{-y}-e^{-y})\right]_0^1 \\
&= (0+2e^{-1})-0=\frac{2}{e} \quad \#
\end{aligned}$$

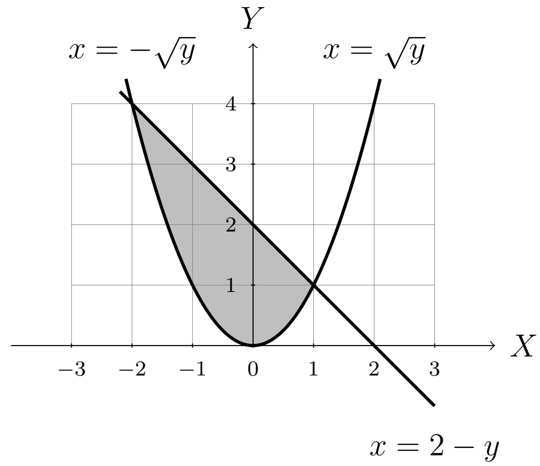
3. จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^1\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx$

แนวคำตอบ พิจารณาอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x=-2$ ถึง $x=1$ และ $y=x^2$ ถึง $y=2-x$ จุดตัดกราฟ $y=x^2$ ถึง $y=2-x$ หาได้จาก

$$\begin{aligned}
x^2 &= 2-x \\
x^2+x-2 &= 0 \\
(x+2)(x-1) &= 0 \\
x &= -2,1
\end{aligned}$$

จุดตัดคือ $(-2,4)$ และ $(1,1)$





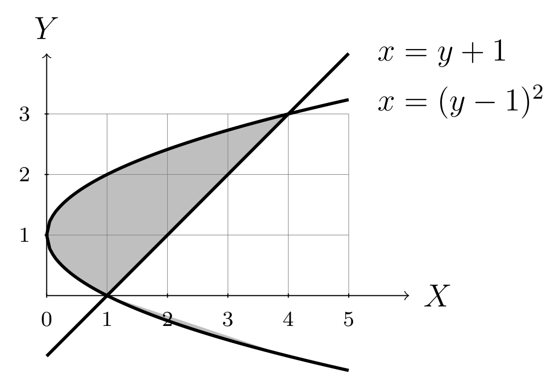
$$\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dydx = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dxdy \quad \#$$

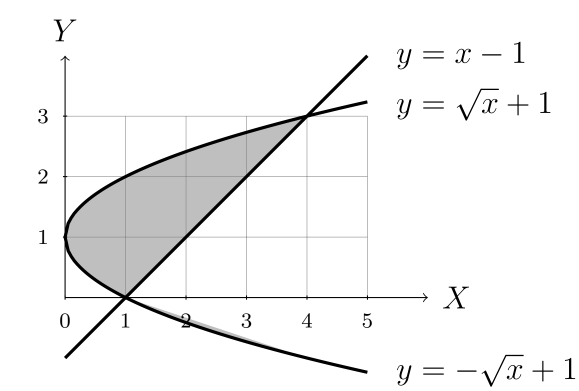
4. จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)dxdy$

แนวคำตอบ พิจารณาอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=1$ ถึง $y=3$ และ $x=(y-1)^2$ ถึง $x=y+1$
จุดตัดกราฟ $x=(y-1)^2$ ถึง $x=y+1$ หาได้จาก

$$\begin{aligned}(y-1)^2 &= y+1\\ y^2-2y+1 &= y+1\\ y^2-3y &= 0\\ y(y-3) &= 0\\ y &= 0,3\end{aligned}$$

จุดตัดคือ $(1,0)$ และ $(4,3)$





$$\int_{0}^{3}\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{x}+1}^{\sqrt{x}+1} f(x,y)dydx + \int_{1}^{4}\int_{x-1}^{\sqrt{x}+1} f(x,y)dydx \quad \#$$

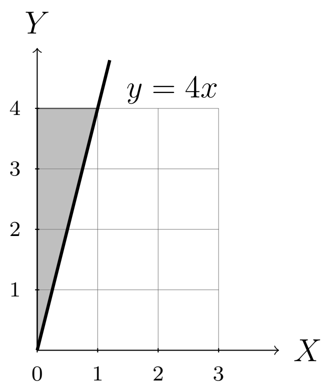
5. จงหาค่า $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{x^2}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx$

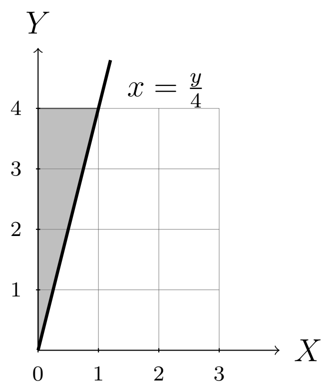
แนวคำตอบ

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{x^2}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=x^2}dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx \\
&= [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -(-1)-0 \\
&= 1 \quad \#
\end{aligned}
$$

6. จงหาค่า $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{4x}^{4}e^{-y^2}dydx$

แนวคำตอบ เนื่องจากไม่สามารถหาปริพันธ์ฟังก์ชันในลำดับดังกล่าวได้ จึงเปลี่ยนลำดับปริพันธ์ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x=0$ ถึง $x=1$ และ $y=4x$ ถึง $y=4$





$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{1}\int_{4x}^{4}e^{-y^2}dydx &= \int_{0}^{4}\int_{0}^{\frac{y}{4}}e^{-y^2}dxdy \\
&= \int_{0}^{4}\left[xe^{-y^2}\right]_{x=0}^{x=\frac{y}{4}}dy \\
&= \int_{0}^{4}\frac{y}{4}e^{-y^2}dy \\
&= \left[-\frac{1}{8}e^{-y^2}\right]_{0}^{4} \\
&= -\frac{1}{8}e^{-16}+\frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}
$$

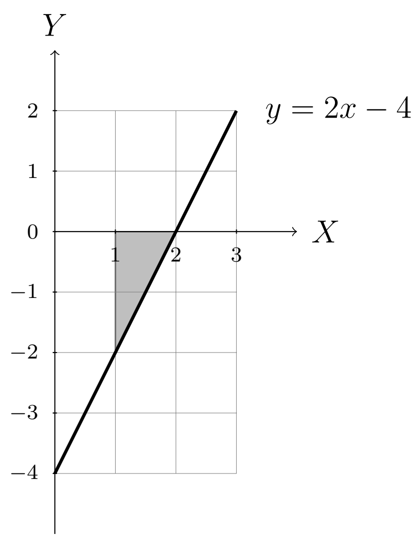
7. จงหาค่า $\displaystyle\int_1^3 \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2} dydx$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2} dydx &= \int_1^3 \int_0^x \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dydx \\
&= \int_1^3 \left[\frac{1}{x^2} \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{4} dx \\
&= \left[\frac{\pi}{4} \ln x \right]_1^3 \\
&= \frac{\pi}{4} \ln 3 \quad \#
\end{aligned}$$

8. จงหา $\displaystyle\iint\limits_S f$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{2y-1}{x+1}$ และ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x-4$, $y = 0$ และ $x = 1$

แนวคำตอบ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x-4$, $y = 0$ และ $x = 1$ เขียนกราฟได้ดังนี้



$$\begin{aligned}
\iint\limits_S f &= \int_1^2 \int_{2x-4}^0 \frac{2y-1}{x+1} \, dydx \\
&= \int_1^2 \left[\frac{y^2-y}{x+1} \right]_{y=2x-4}^{y=0} dx \\
&= \int_1^2 -\frac{(2x-4)^2-(2x-4)}{x+1} dx \\
&= \int_1^2 -\frac{4x^2-18x+20}{x+1} dx \\
&= \int_1^2 -4x+22-\frac{42}{x+1} dx \\
&= \left[-2x^2+22x-42\ln(x+1) \right]_1^2 \\
&= [-8+44-42\ln 3] - [-2+22-42\ln 2] \\
&= 16-42\ln 3+42\ln 2 \quad \#
\end{aligned}$$