เฉลย Assignment 12
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว และสมการเชิงอนุพันธ์ **สัปดาห์ที่** 13 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

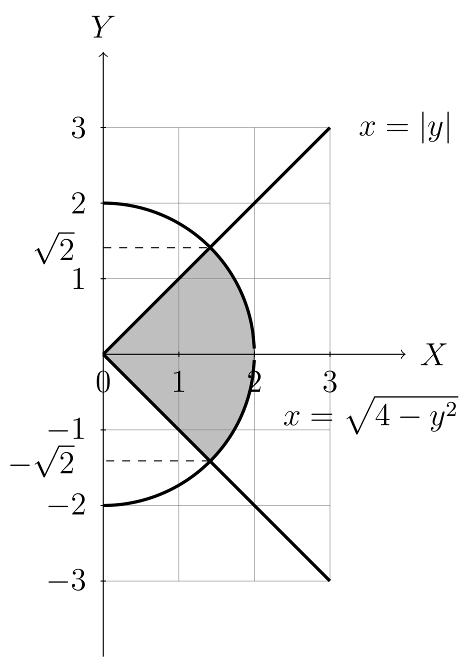
---

1. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

แนวคำตอบ พิจารณาอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=-\sqrt{2}$ ถึง $y=\sqrt{2}$ และ $x=|y|$ ถึง $x=\sqrt{4-y^2}$ จุดตัดกราฟ $x=|y|$ ถึง $x=\sqrt{4-y^2}$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} |y| &= \sqrt{4-y^2} \\ y^2 &= 4-y^2 \\ 2y^2 &= 4 \\ y &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

จุดตัดคือ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ และ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

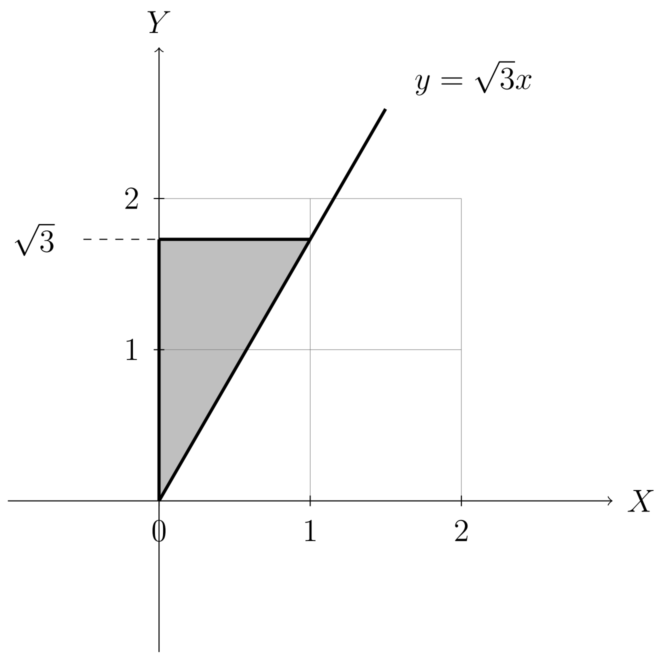


จากกราฟจะได้ว่า $0 \le r \le 2$ และ $-\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ ดังนั้น

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta \quad \#$$

2. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dydx$

แนวคำตอบ พิจารณาอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = 0$ ถึง $x = 1$ และ $y = \sqrt{3}x$ ถึง $y = \sqrt{3}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



หา r จาก $y = \sqrt{3}$ จะได้ว่า $r\sin\theta = \sqrt{3}$ นั่นคือ $r = \sqrt{3}\csc\theta$
หา θ จาก $y = \sqrt{3}x$

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= \sqrt{3}r\cos\theta \\ \tan\theta &= \sqrt{3} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ถึง $x = 0$ นั่นคือ $r\cos\theta = 0$ ดังนั้น $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $0 \le r \le \sqrt{3}\csc\theta$ และ $\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้น

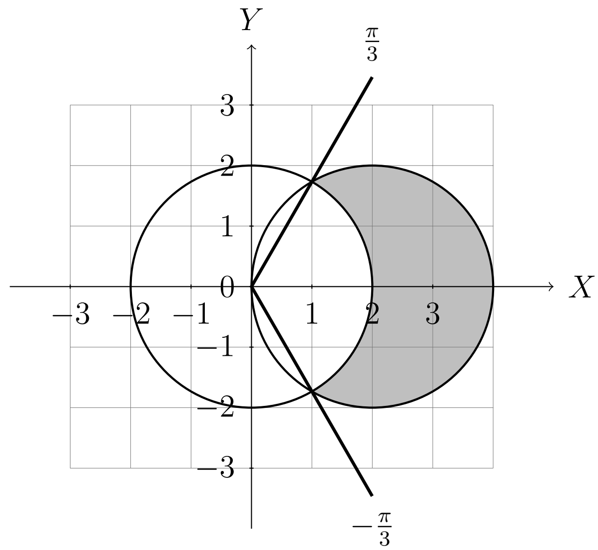
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}} f(x,y)\,dydx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta \quad \#$$

3. จงหา $\iint_S f(x,y)dA$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
และ S คืออาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$

แนวคำตอบ วาดกราฟของ S ซึ่งคืออาณาบริเวณภายในวงกลม $(x-2)^2+y^2=4$ และภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$ หาจุดตัดของกราฟทั้งสองคือ

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4x \\ 4 &= 4x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

จุดตัดคือ $(1,\sqrt{3})$ และ $(1,-\sqrt{3})$

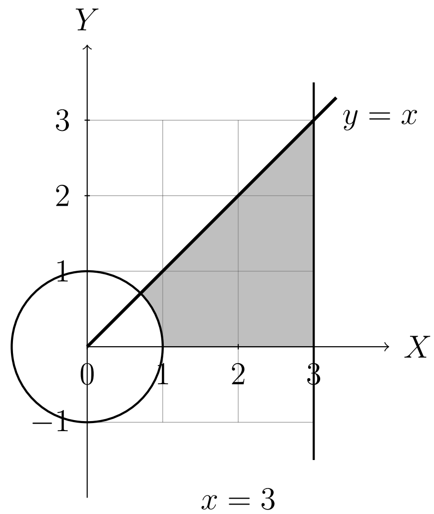


หา r จาก $x^2+y^2=4x$ จะได้ว่า $r^2 = 4r\cos\theta$ นั่นคือ $r = 4\cos\theta$
ดังนั้น $1 \le r \le 4\cos\theta$ และ $-\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y)dA &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{2}^{4\cos\theta} \frac{1}{r}\cdot r\,drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [r]_2^{4\cos\theta}\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos\theta - 2\,d\theta \\ &= [4\sin\theta - 2\theta]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right] - \left[-2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right] \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \quad \# \end{aligned}$$

4. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=0$ และ $x=3$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

แนวคำตอบ วาดกราฟแสดงอาณาบริเวณได้ดังนี้



หา r จาก $x=3$ จะได้ว่า $r\cos\theta=3$ นั่นคือ $r=3\sec\theta$ ดังนั้น

$$1\le r\le 3\sec\theta \qquad \text{และ} \qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S 1dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{3\sec\theta} 1\cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^{3\sec\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\cdot 9\sec^2\theta-\frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= \left[\frac{9}{2}\tan\theta-\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{9}{2}-\frac{\pi}{8} \qquad \#
\end{aligned}$$

5. จงเขียนปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

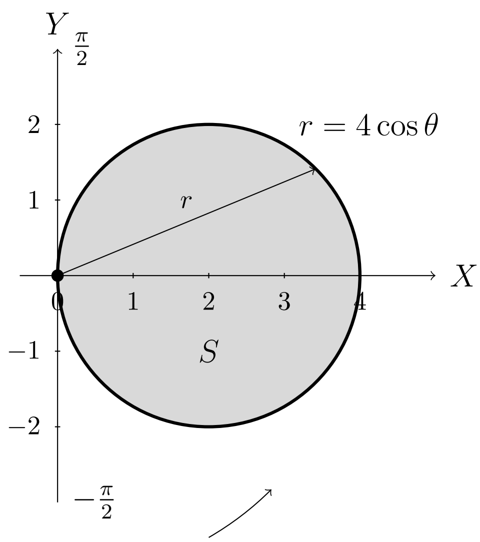
แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นจะได้เมนในระบบพิกัดฉากคือ

$$S = \left\{(x,y) : -2 \leq y \leq 2 \text{ และ } 2-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 2+\sqrt{4-y^2}\right\}$$

พิจารณากราฟของ $x = 2-\sqrt{4-y^2}$ หรือ $(x-2)^2+y^2 = 4$ เมื่อ $-2 \leq y \leq 2$
ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ กราฟวงกลมนี้ $(x-2)^2+y^2=4$ เปลี่ยนเป็นระบบเชิงขั้วได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2-4x+4+y^2+y^2 &= 4 \\ (x^2+y^2) &= 4x \\ r^2 &= 4r\cos\theta \\ r &= 4\cos\theta \end{aligned}$$

เขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



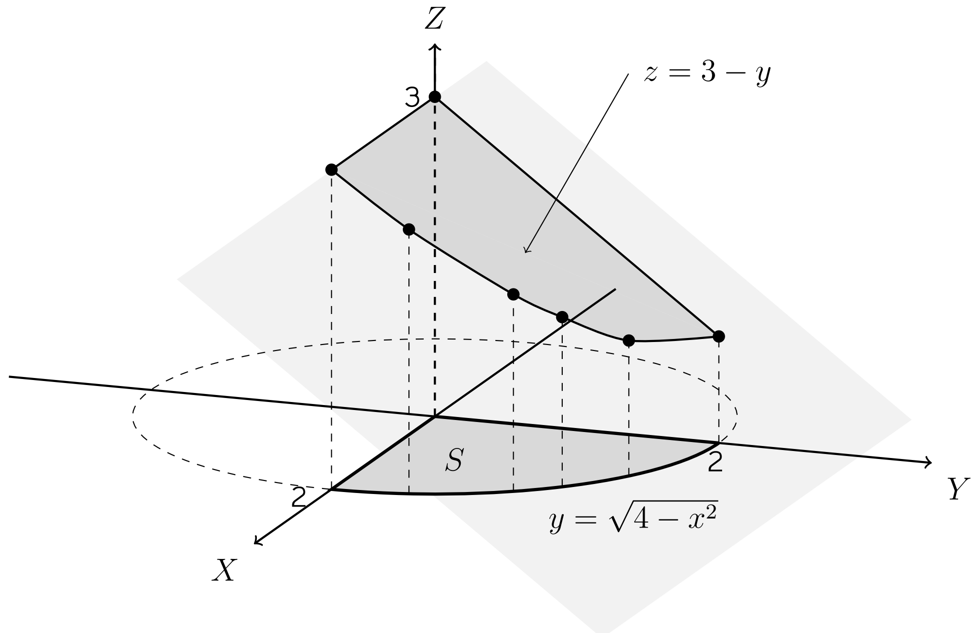
จากรูปได้เมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \leq r \leq 4\csc\theta\}$$

ดังนั้น

$$\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{4\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

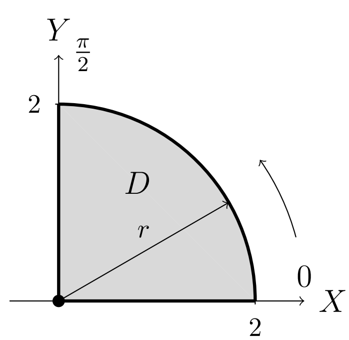
6. จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2+y^2=4$ และระนาบ $y+z=3$ โดยใช้การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว



แนวคำตอบ พื้นผิว $f(x,y)=z=3-y$ โดยมีโดเมน

$$S=\{(x,y):0\le x\le 2 \text{ และ } 0\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$$

แสดงได้ดังรูป



จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นผิวคือ $f(x,y)=z=3-y$ โดยมีโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$S=\{(x,y):0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \text{ และ } 0\le r\le 2\}$$

ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x,y) = 3 - y$ บน S เท่ากับ

$$\begin{aligned}
\iint_S f\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (3 - r\sin\theta)\,rdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 3r - r^2\sin\theta\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(6 - \frac{8}{3}\sin\theta\right) - 0\right] d\theta \\
&= \left[6\theta + \frac{8}{3}\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= [3\pi + 0] - \left[0 + \frac{8}{3}\right] \\
&= 3\pi - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$