คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 13
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ สมการแยกตัวแปรได้ และสมการเอกพันธุ์ **สัปดาห์ที่** 14 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{(1-ce^t)(1+ce^t)' - (1+ce^t)(1-ce^t)'}{(1-ce^t)^2}\\ &= \frac{(1-ce^t)(ce^t) - (1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2}\\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2}\\ &= \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}y^2-1 &= \left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\\ &= \frac{1+2ce^t+c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} - 1\\ &= \frac{1+2ce^t+c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2} - \frac{1-2ce^t+c^2e^{2t}}{(1-ce^t)^2}\\ &= \frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4ce^t}{(1-ce^t)^2}\right) = \frac{1}{2}(y^2-1)$$

นั่นคือ $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $3(4y^2+1)dx = y(x-1)dy$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1}dx &= \frac{y}{4y^2+1}dy\\ \int \frac{3}{x-1}dx &= \int \frac{y}{4y^2+1}dy\\ 3\ln|x-1| + C &= \frac{1}{8}\ln|4y^2+1|\\ 24\ln|x-1| + 8C &= \ln|4y^2+1|\\ e^{24\ln|x-1|}\cdot e^{8C} &= 4y^2+1\\ A(x-1)^{24} &= 4y^2+1 \qquad \text{เมื่อ } A = e^{8C}\end{aligned}$$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy + e^{x+y}dx = 0$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy &= -e^x \cdot e^y dx \\
\frac{1}{e^y(1-e^{-y})}dy &= -\frac{e^x}{1+e^x}dx \\
\int \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}dy &= -\int \frac{e^x}{1+e^x}dx \\
\ln|1-e^{-y}| &= -\ln|1+e^x| + C \\
|1-e^{-y}| &= e^{-\ln|1+e^x|} \cdot e^C \\
|1-e^{-y}| &= (1+e^x)^{-1}A \qquad \text{เมื่อ } A = e^C \\
|1-e^{-y}|(1+e^x) &= A \quad \#
\end{aligned}$$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\sqrt{x^2+1}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(\sqrt{3}) = 2$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}dy &= \frac{x}{y}dx \\
ydy &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
\int ydy &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

หาค่า C เมื่อ $x = \sqrt{3}$ และ $y = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(2)^2 &= \sqrt{4} + C \\
0 &= C
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y^2 = 2\sqrt{x^2+1} \quad \#$$

5. $xy' = x - y$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า $(y-x)dx + xdy = 0$
ให้ $M(x,y) = y - x$ และ $N(x,y) = x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda y - \lambda x = \lambda(y-x) = \lambda M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x = \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(y-x)dx + xdy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรีหนึ่ง
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (vx - x)dx + x(vdx + xdv) &= 0 \\ (vx - x)dx + vxdx + x^2 dv &= 0 \\ (2vx - x)dx + x^2 dv &= 0 \\ x(2v-1)dx &= -x^2 dv \\ \frac{1}{x}dx &= -\frac{1}{2v-1}dv \\ \int \frac{1}{x}dx &= -\int \frac{1}{2v-1}dv \\ \ln|x| &= -\frac{1}{2}\ln|2v-1| + C \\ \ln|x| &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2y}{x} - 1\right| + C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2y}{x} - 1\right| = C \quad \#$$

6. $(x^3+y^3)dx+2y^2xdy=0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y)=x^3+y^3$ และ $N(x,y)=2y^2x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}M(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x)^3+(\lambda y)^3=\lambda^3(x^3+y^3)=\lambda^3 M(x,y)\\N(\lambda x,\lambda y)&=2(\lambda y)^2(\lambda x)=\lambda^3(2y^2x)=\lambda^2 N(x,y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(x^3+y^3)dx+2y^2xdy=0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรีสาม
ให้ $y=vx$ จะได้ว่า $dy=vdx+xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}(x^3+(vx)^3)dx+2(vx)^2x(vdx+xdv)&=0\\(x^3+v^3x^3)dx+(2v^3x^3)dx+(2v^2x^4)dv&=0\\(x^3+3v^3x^3)dx+(2v^2x^4)dv&=0\\x^3(1+3v^3)dx&=-x^4(2v^2)dv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}dx&=-\int\frac{2v^2}{1+3v^3}dv\\\ln|x|&=-\frac{2}{9}\ln|1+3v^3|+C\\\ln|x|&=-\frac{2}{9}\ln\left|1+3\left(\frac{y}{x}\right)^3\right|+C\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\ln|x|+\frac{2}{9}\ln\left|1+3\left(\frac{y}{x}\right)^3\right|=C \quad \#$$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ เมื่อ $y(-1) = 0$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$
ให้ $M(x,y) = x+y$ และ $N(x,y) = y-x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda y - \lambda x = \lambda(y-x) = \lambda N(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรีหนึ่ง
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x+vx)dx + (vx-x)(vdx+xdv) &= 0 \\ (x+vx)dx + (v^2x - xv)dx + (vx^2 - x^2)dv &= 0 \\ (x+v^2x)dx + (vx^2-x^2)dv &= 0 \\ x(1+v^2)dx &= x^2(1-v)dv \\ \frac{1}{x}dx &= \frac{1-v}{1+v^2}dv \\ \int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2}dv \\ \ln|x| &= \arctan v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) + C \\ \ln|x| &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + C \end{aligned}$$

จาก $x = -1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\ln 1 = \arctan 0 - \frac{1}{2}\ln 1 + C \\ &\therefore C = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\ln|x| = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \qquad \#$$

8. $x^2y' = 2x^2 - 2xy + y^2 = 0$ เมื่อ $y(1) = 3$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า $(2x^2 - 2xy + y^2)dx + (-x^2)dy$
ให้ $M(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$ และ $N(x,y) = -x^2$ จะได้ว่า

$$M(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2(2x^2 - 2xy + y^2) = \lambda^2 M(x,y)$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x)^2 = \lambda^2(-x^2) = \lambda^2 N(x,y)$$

ดังนั้น $(2x^2 - 2xy + y^2)dx + (-x^2)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรีสอง
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(2x^2 - 2x(vx) + (vx)^2)dx + (-x^2)(vdx + xdv) &= 0 \\
(2x^2 - 2x^2v + v^2x^2)dx + (-x^2v)dx + (-x^3)dv &= 0 \\
(2x^2 - 3x^2v + v^2x^2)dx + (-x^3)dv &= 0 \\
x^2(2 - 3v + v^2)dx &= x^3 dv \\
\frac{1}{x}dx &= \frac{1}{2 - 3v + v^2}dv \\
\int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{1}{(v-2)(v-1)}dv \\
\ln|x| &= \int \frac{1}{v-2} - \frac{1}{v-1}dv \\
\ln|x| &= \ln|v-2| - \ln|v-1| + C \\
\ln|x| &= \ln\left|\frac{y}{x} - 2\right| - \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + C
\end{aligned}$$

จาก $x = 1$ และ $y = 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\ln|1| = \ln|3-2| - \ln|3-1| + C \\
&\therefore C = \ln 2
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{y}{x} - 2\right| - \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + \ln 2 \qquad \#$$