คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 14
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ สมการแม่นตรง และตัวประกอบปริพันธ์ **สัปดาห์ที่** 15 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' + 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า $(2y\sin x\cos x + y^2\sin x)dx + (\sin^2 x - 2y\cos x)dy = 0$
ให้ $M(x,y) = 2y\sin x\cos x + y^2\sin x$ และ $N(x,y) = \sin^2 x - 2y\cos x$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\sin x\cos x + 2y\sin x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + C(y) \\ &= \int 2y\sin x\cos x + y^2\sin x\,dx + C(y) \\ &= \int y\sin 2x + y^2\sin x\,dx + C(y) \\ &= -\frac{1}{2}y\cos 2x - y^2\cos x + C(y) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x,y) \\ -\frac{1}{2}\cos 2x - 2y\cos x + C'(y) &= \sin^2 x - 2y\cos x \\ -\frac{1}{2}\cos 2x - 2y\cos x + C'(y) &= \frac{1-\cos 2x}{2} - 2y\cos x \\ -\frac{1}{2}\cos 2x - 2y\cos x + C'(y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 2y\cos x \\ C'(y) &= \frac{1}{2} \\ C(y) &= \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$-\frac{1}{2}y\cos 2x - y^2\cos x + \frac{1}{2}y = C \quad \#$$

2. $\dfrac{\ln y}{x}dx + \left(\dfrac{\ln x}{y} + \sin y\right) dy = 0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = \dfrac{\ln y}{x}$ และ $N(x,y) = \dfrac{\ln x}{y} + \sin y$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{xy} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + C(y) \\ &= \int \frac{\ln y}{x}\,dx + C(y) \\ &= \ln y \cdot \ln x + C(y) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x,y) \\ \frac{\ln x}{y} + C'(y) &= \frac{\ln x}{y} + \sin y \\ C'(y) &= \sin y \\ C(y) &= -\cos y + c \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\ln y \cdot \ln x - \cos y = C \quad \#$$

3. $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $(1-xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$
ให้ $M(x,y) = 1 - xy$ และ $N(x,y) = xy - x^2$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$

พิจารณา

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x(y-x)}[-x-(y-2x)] = \frac{1}{x(y-x)}[-(y-x)] = -\frac{1}{x}$$

มีตัวประกอบปริพันธ์คือ $\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x^{-1}(1-xy)dx + x^{-1}(xy - x^2)dy &= 0 \\ x^{-1}dx - ydx - xdy + ydy &= 0 \\ x^{-1}dx - d(xy) + ydy &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = C \quad \#$$

4. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} \cdot y = \frac{\sin x}{x^3}$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มี $P(x) = \dfrac{3}{x}$ และ $Q(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}$

จะได้ว่า $\quad \mu = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\, dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(\int x^3 \cdot \frac{\sin x}{x^3}\, dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(\int \sin x\, dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(-\cos x + C\right) \qquad \# \end{aligned}$$

5. $y(1 + x^2y)dx - xdy = 0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x, y) = y + x^2y^2$ และ $N(x, y) = -x$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2x^2y \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

จะได้ว่า

$$g(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y(1+x^2y)}(-1 - (1 + 2x^2y)) = \frac{1}{y(1+x^2y)} \cdot (-2)(1 + x^2y) = -\frac{2}{y}$$

ดังนั้น

$$\mu = e^{\int g(y) dy} = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} y^{-2}y(1 + x^2y)dx - y^{-2}xdy &= 0 \\ y^{-1}dx + x^2dx - y^{-2}xdy &= 0 \\ (y^{-1}dx - y^{-2}xdy) + x^2dx &= 0 \\ d(y^{-1}x) + x^2dx &= 0 \\ y^{-1}x + \frac{x^3}{3} &= c \end{aligned}$$

ดังนั้น $y^{-1}x + \dfrac{x^3}{3} = c$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ $\qquad \#$

6. $2(y-3\sin x)\cos x dx+\sin x dy=0$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}2(y-3\sin x)\cos x+\sin x\frac{dy}{dx}&=0\\2y\cos x-6\sin x\cos x+\sin x\frac{dy}{dx}&=0\\\sin x\frac{dy}{dx}+(2\cos x)y&=6\sin x\cos x\\\frac{dy}{dx}+(2\cot x)y&=6\cos x\end{aligned}$$

ให้ $P(x)=2\cot x$ และ $Q(x)=6\cos x$ จะได้ว่า

$$\mu=e^{\int 2\cot x dx}=e^{2\ln\sin x}=\sin^2 x$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{\sin^2 x}\left(\int\sin^2 x(6\cos x)dx+c\right)\\&=\csc^2 x\left(6\int\sin^2 x d\sin x+c\right)\\&=\csc^2 x\left(2\sin^3 x+c\right)\quad\#\end{aligned}$$

7. $(e^y+ye^x)dx+(e^x+xe^y)dy=0$ เมื่อ $y(1)=0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y)=e^y+ye^x$ และ $N(x,y)=e^x+xe^y$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^x+e^y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y)=C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int M(x,y)\,dx+C(y)\\&=\int e^y+ye^x\,dx+C(y)\\&=xe^y+ye^x+C(y)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}&=N(x,y)\\xe^y+e^x+C'(y)&=e^x+xe^y\\C'(y)&=0\\C(y)&=c\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $xe^y+ye^x=C$
จาก $x=1$ และ $y=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}1e^0+0e^1&=C\\1+0&=C\\\therefore C&=1\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$xe^y+ye^x=1\quad\#$$

8. $(y - e^x \sin x)dx + xdy = 0$ เมื่อ $y(0) = 0$

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = y - e^x \sin x$ และ $N(x,y) = x$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแม่นตรง จะได้ว่า $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยของสมการนี้ พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)\,dy + C(x) \\ &= \int x\,dy + C(x) \\ &= xy + C(x) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= M(x,y) \\ y + C'(x) &= y - e^x \sin x \\ C'(x) &= -e^x \sin x \\ C(x) &= -\int e^x \sin x\,dx = -\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $xy - \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) = C$

จาก $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 - \frac{e^0}{2}(\sin 0 - \cos 0) &= C \\ -\frac{1}{2}(0-1) &= C \\ \therefore C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$xy - \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) = \frac{1}{2} \quad \#$$

9. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ เมื่อ $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} \cos x \frac{dy}{dx} + y\sin x &= 1 \\ \frac{dy}{dx} + y\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{1}{\cos x} \\ \frac{dy}{dx} + (\tan x)y &= \sec x \end{aligned}$$

ให้ $P(x) = \tan x$ และ $Q(x) = \sec x$ จะได้ว่า

$$\mu = e^{\int \tan x dx} = e^{\int \ln \sec x} = \sec x$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sec x}\left(\int \sec x(\sec x)dx + c\right) \\ &= \cos x\left(\int \sec^2 x dx + c\right) \\ &= \cos x\left(\tan x + c\right) \end{aligned}$$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= \cos\frac{\pi}{4}\left(\tan\frac{\pi}{4} + c\right) \\ 0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + c) \\ c &= -1 \end{aligned}$$

ผลเฉลยของเฉพาะของสมการนี้คือ $y = \cos x(\tan x - 1)$ #

10. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$ เมื่อ $y(1) = 1$

แนวคำตอบ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}y^4$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการแบร์นูลลีโดยที่ $n = 4$ ให้ $z = y^{1-4} = y^{-3}$ จะได้ว่า

$$P(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{และ} \quad Q(x) = \frac{3}{x^2}$$

แล้ว

$$\mu = e^{\int(1-n)P(x)dx} = e^{\int \frac{6}{x}dx} = e^{6\ln x} = x^6$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\mu}\left(\int (1-n)\mu Q(x)\,dx + c\right) \\ y^{-3} &= \frac{1}{x^6}\left(\int (-3)x^6 \cdot \frac{3}{x^2}dx + c\right) = x^{-6}\left(\int -9x^4 dx + c\right) \\ &= x^{-6}\left(-\frac{9x^5}{5} + c\right) \end{aligned}$$

จาก $y(1) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 &= 1\left(-\frac{9}{5} + c\right) \\ c &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y^{-3} = x^{-6}\left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right) \quad \#$$