เฉลย Assignment 1
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ลำดับของจำนวนจริงและอนุกรม **สัปดาห์ที่** 1 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

ข้อ 1-4 จงตรวจสอบลำดับต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{n(2n+1)^3}{(2n^2-1)^2}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)^3}{(2n^2-1)^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n[n(2+\frac{1}{n})]^3}{[n^2(2-\frac{1}{n^2})]^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^3(2+\frac{1}{n})^3}{n^4(2-\frac{1}{n^2})^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{n})^3}{(2-\frac{1}{n^2})^2} = \frac{2^3}{2^2} = 2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\dfrac{n(2n+1)^3}{(2n^2-1)^2}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

2. $\left\{\dfrac{\sin(n^{-2})}{n^2}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-1 \le \sin(n^{-2}) \le 1$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$-\frac{1}{n^2} \le \frac{\sin(n^{-2})}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^{-2})}{n^2} = 0$ ดังนั้น $\left\{\dfrac{\sin(n^{-2})}{n^2}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

3. $\left\{\sqrt{n^2+n}-n+1\right\}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n+1 &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-(n-1))\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+(n-1)}{\sqrt{n^2+n}+(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+n}+(n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+n}+n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+n}+n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(3-\frac{1}{n})}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n(1-\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(3-\frac{1}{n})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n(1-\frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(3-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+(1-\frac{1}{n})} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{\sqrt{n^2+n}-n+1\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

4. $\left\{\dfrac{n\cos(n\pi)}{3n+1}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos(n\pi)=(-1)^n$ ทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\left\{\frac{n\cos(n\pi)}{3n+1}\right\} = \left\{\frac{n(-1)^n}{3n+1}\right\}$$

เลือกลำดับย่อย $n_k=2k+1$ จะได้ว่า

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(-1)^{2k+1}}{3(2k+1)+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{-2k-1}{6k+4} = -\frac{1}{3}$$

เลือกลำดับย่อย $n_k=2k$ จะได้ว่า

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k(-1)^{2k}}{3(2k)+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k}{6k+1} = \frac{1}{3}$$

ทำให้ได้ว่ามีลำดับย่อยสองลำดับที่มีลิมิตไม่เท่ากัน ดังนั้น $\left\{\dfrac{n\cos(n\pi)}{3n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก #

5. จงพิสูจน์โดยใช้ Telescoping Series สำหรับสูตร

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

บทพิสูจน์ . พิจารณา

$$(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) \\
(n+1)^3 - 1^3 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
(n+1)^3 - 1 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n \\
(n+1)^3 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
(n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
(n+1)\left[\frac{2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2}{2}\right] &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
(n+1)\left[\frac{2n^2 + n}{2}\right] &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \sum_{k=1}^{n} k^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\square$

6. จงหาผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - 2^{-n+1}\right]$

วิธีทำ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

เนื่องจาก $\displaystyle\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$ ให้ $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ จะได้ว่า $a_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)-1} =$

$\frac{1}{2n+1}$ ดังนั้น

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - 2^{-n+1}\right] = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \quad \#$$

7. จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1+2^{-n}}{3^n} + \frac{1}{n(n-2)}\right]$

วิธีทำ พิจารณา

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1+2^{-n}}{3^n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{2^{-n}}{3^n}\right) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{6^n}$$
$$= \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{216}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{180} = \frac{11}{180}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$ จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left[\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1+2^{-n}}{3^n} + \frac{1}{n(n-2)}\right] = \frac{11}{180} + \frac{3}{4} = \frac{73}{90} \quad \#$$

8. จงหาผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}((n+1)-n)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 \quad \#$$