คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 2
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ การตรวจสอบอนุกรม **สัปดาห์ที่** 2 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงทดสอบว่าอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้**การทดสอบแบบปริพันธ์**

แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ เมื่อ $x \geq 2$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -(x(\ln x)^2)^{-2}(2\ln x + (\ln x)^2) = -\frac{2\ln x + (\ln x)^2}{(x(\ln x)^2)^2} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด แล้ว

$$\begin{aligned} t_n &= \int_2^n f(x)\,dx \\ &= \int_1^n \frac{2}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^n \\ &= -\frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2} \\ \lim_{n\to\infty} t_n &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

ข้อ 2- 5 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{n}{n^4+1}$ และ $b_n = \dfrac{1}{n^3}$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $(p = 3 > 1)$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+1} = 1 > 0$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2+1)}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$ และ $b_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n^2+1)}$$

ให้ $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2+1)}$ เมื่อ $x \geq 1$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x^2+1)} && (I.F. \frac{\infty}{\infty}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x} && (L'H) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x} = \infty
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n^2+1)} = \infty$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพีซึ่ง $p = 1$)

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\right| \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ให้ $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ เมื่อ $x \geq 1$ แล้ว $\ln f(x) = x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln f(x) &= \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) && (I.F.\infty\cdot 0)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} && (I.F.\frac{\infty}{\infty})\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} && (L'H)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x}\\
&= -1\\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อ 6-8 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

วิธีที่ 1 การเปรียบเทียบ และการทดสอบปริพันธ์
เนื่องจาก $\sqrt{n}+1 \le n+1$ เมื่อ $n \ge 1$ จะได้ว่า

$$0 < \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ เมื่อ $x \ge 1$ และ

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \qquad \text{เมื่อ } x \ge 1$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด และ

$$
\begin{aligned}
t_n &= \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{1}{x+1}\,dx\\
&= [\ln(x+1)]_1^n = \ln(n+1) - \ln 2\\
\lim_{n\to\infty} t_n &= \infty
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีที่ 2 การเปรียบเทียบลิมิต

ให้ $a_n\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ เลือก $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}\cdot\sqrt{n}=1>0$$

เนื่องจาก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก $(p=0.5<1)$ ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ เนื่องจาก $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ แล้ว $\sqrt{n+1}+1>\sqrt{n}+1$ จะได้ว่า

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}<\frac{1}{\sqrt{n}+1}=a_n \text{ เมื่อ } n\geq 1$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลด และ

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}=0$$

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4+n+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n^2}{n^4+n+1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+n+1}$$

เนื่องจาก $n+1>0$ ทุก ๆ $n\geq 1$ จะได้ว่า

$$0<\frac{n^2}{n^4+(n+1)}\leq\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$$

และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพีซึ่ง $p=2$)

สรุปได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^4+n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

แนวคำตอบ ให้ $a_n=\dfrac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-3)^n}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)}{(2n+3)(2n+2)}\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}\\&=0<1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า