คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 3
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง **สัปดาห์ที่** 3 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x+1)^{n+1}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{(-1)^n n(x+1)^n}\right| &= |x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}\\ &= \frac{1}{4}|x+1|<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|x+1|&<4\\ -4<x+1&<4\\ -5<x&<3\end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x=-5$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณี $x=3$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 4 ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-5,3)$ #

2. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{n+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{2n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(3x)^{2n}}\right| &= |3x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\\ &= |3x^2|<1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|3x|&<1\\ -1<3x&<1\\ -\frac{1}{3}<x&<\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ $x=\frac{1}{3}$ และ $x=-\frac{1}{3}$ จะได้ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ ให้ $a_n=\dfrac{1}{n+1}$ และ $b_n=\dfrac{1}{n}$ พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1>0$$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก ดังนั้น ลู่ออก $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

สรุปได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n+1}$ มีรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{3}$ และช่วงแห่งการลู่เข้า $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ #

3. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าอนุกรมกำลังมีศูนย์กลางอยู่ที่ $-\frac{1}{2}$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{5^{n+1} \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{5^n \cdot n^2}{(2x-1)^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}|2x-1| \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{5}|2x-1| < 1 \\
&= \frac{2}{5}\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้นรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{5}{2}$ และ

$$
\begin{aligned}
|2x-1| &< 5 \\
-5 < 2x-1 &< 5 \\
-4 < 2x &< 6 \\
-2 < x &< 3
\end{aligned}
$$

พิจารณา

กรณี $x = -2$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $(p = 2 < 1)$

กรณี $x = 3$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{5}{2}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-2, 3]$ #

4. จงหาโดเมนของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}x^2}{2^{2n}2^2(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{2^{2n}(n!)(n!)}{(-1)^n x^{2n}} \right| \\
&= x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)^2} \\
&= x^2 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ ลู่เข้าทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น โดเมนของ $J_0(x)$ คือ $\mathbb{R}$

5. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{2n+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n \\
&= \frac{1}{1-4x^2} && \text{เมื่อ } |4x^2| < 1 \\
&= \frac{1}{(1-2x)(1+2x)} && \text{เมื่อ } |2x| < 1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x}\right] && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}\, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x}\right] dx && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2} \\
\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\ln|1-2x| + \frac{1}{2}\ln|1+2x|\right] + C && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+1}}{2n+1} &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right| + C && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 0$ จะได้ $C = 0$ จากนั้นนำ x คูณทั้งสมการทำให้ได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{2n+1} = \frac{x}{4}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right| \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{2}$$

6. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n &= \frac{1}{1+3x} && \text{เมื่อ } |3x| < 1 \\
\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1+3x} && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{3} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n-1}(-3) &= \frac{-3}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{3} \\
(-3x)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n-1} &= \frac{(-3x)^2}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{3} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1} &= \frac{9x^2}{(1+3x)^2} && \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

7. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = \dfrac{x^4}{(1-2x^2)^2}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\frac{1}{1-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x^2)^n \qquad \text{เมื่อ } |2x^2| < 1$$

$$\frac{1}{1-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n} \qquad \text{เมื่อ } |x^2| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-2x^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n} \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4x}{(1-2x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n(2n)x^{2n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{x^4}{(1-2x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}nx^{2n+2} \qquad \text{เมื่อ } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad \text{เมื่อ } \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}nx^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}nx^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

$$\frac{2}{(2-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}n(n-1)x^{n-2} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$

$$\frac{x^3}{(2-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^{n+2}}x^{n+1} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 2$$