คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 4
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ อนุกรมเทย์เลอร์ ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง **สัปดาห์ที่** 4 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_4(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

รอบจุด 1 พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T_4(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & f(1) &= 15 \\ f'(x) &= 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2 & f'(1) &= 40 \\ f''(x) &= 60x^2 + 24x + 6 & f''(1) &= 90 \\ f'''(x) &= 120x + 24 & f'''(1) &= 144 \\ f^{(4)}(x) &= 120 & f^{(4)}(1) &= 120 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 15 + 40(x-1) + \frac{90}{2}(x-1)^2 + \frac{144}{6}(x-1)^3 + \frac{120}{24}(x-1)^4 \\ &= 15 + 40(x-1) + 45(x-1)^2 + 24(x-1)^3 + 5(x-1)^4 \end{aligned}$$

กระจายพจน์ในพหุนาม $T_4(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 15 + 40(x-1) + 45(x-1)^2 + 24(x-1)^3 + 5(x-1)^4 \\ &= 15 + 40x - 40 + 45x - 45(x^2 - 2x + 1) + 24(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &\quad + 5(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \\ &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x) = T_4(x)$

2. ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดผลาด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} & f'''(0) &= \frac{3}{8} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(x+1)^{-\frac{7}{2}} & f^{(4)}(0) &= -\frac{15}{16} \\ f^{(5)}(x) &= +\frac{105}{32}(x+1)^{-\frac{9}{2}} & f^{(5)}(0) &= \frac{105}{32} \\ f^{(6)}(x) &= -\frac{945}{64}(x+1)^{-\frac{11}{2}} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{8}x^5 \end{aligned}$$

ประมาณค่า $\sqrt{1.2}$ โดยแทน $x = 0.2$ ใน $T_5(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{1.2} &= f(0.2) \\ &\approx T_5(0.2) = 1 + \frac{1}{2}(0.2) - \frac{1}{8}(0.2)^2 + \frac{1}{16}(0.2)^3 - \frac{5}{128}(0.2)^4 + \frac{7}{256}(0.2)^5 \\ &= 1 + 0.1 - 0.005 + 0.0005 - 0.0000625 + 0.000000178571 \\ &= 1.09544625 \end{aligned}$$

ให้ $0 < c < 0.2$ และ

$$\begin{aligned} |R_5(0.2)| = \left|\frac{f^{(5)}(c)}{6!}(0.2)^6\right| &= \left|\frac{-945(c+1)^{-\frac{11}{2}}}{64 \cdot 6!}(0.2)^6\right| \\ &= \frac{945(0.2)^6}{64 \cdot 6!} \cdot \left|\frac{1}{(c+1)^{\frac{11}{2}}}\right| \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{gathered} 1 < c+1 < 1.2 \\ 1 < (c+1)^{\frac{11}{2}} < 1.2^{\frac{11}{2}} \\ \frac{1}{1.2^{\frac{11}{2}}} < \frac{1}{(c+1)^{\frac{11}{2}}} < 1 \end{gathered}$$

จะได้ว่า

$$|R_5(0.2)| = \frac{945(0.2)^6}{64 \cdot 6!} \cdot \left|\frac{1}{(c+1)^{\frac{11}{2}}}\right| < \frac{945(0.2)^6}{64 \cdot 6!} \cdot 1 = 0.0000013125$$

3. ให้ $f(x) = x\sin x$ จงประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x & g(0) &= 0 \\ g'(x) &= \cos x & g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= -\sin x & g''(0) &= 0 \\ g'''(x) &= -\cos x & g'''(0) &= -1 \\ g^{(4)}(x) &= \sin x & g^{(4)}(0) &= 0 \\ g^{(5)}(x) &= \cos x & g^{(5)}(0) &= 1 \\ g^{(6)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5 + R_5(x) \\ g(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5(x) \\ f(x) = x\sin x = xg(x) &= x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + xR_5(x) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &\approx \int_0^1 x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!\cdot 5}x^5 + \frac{1}{5!\cdot 7}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 5} + \frac{1}{5!\cdot 7} = 0.301190476 \end{aligned}$$

ให้ $0 < c < 1$ จะได้ว่า $R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6 = \frac{-\sin c}{6!}x^6$ ดังนั้นความผิดพลาดคือ

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 xR_5(x)\,dx\right| &\leq \int_0^1 |xR_5(x)|\,dx = \int_0^1 \left|x \cdot \frac{-\sin c}{6!}x^6\right|\,dx \\ &\leq \int_0^1 \left|\frac{1}{6!}x^7\right|\,dx & (|\sin c| \leq 1) \\ &= \frac{1}{6!}\int_0^1 x^7\,dx = \frac{1}{6!}\left[\frac{1}{8}x^8\right]_0^1 = \frac{1}{6!\cdot 8} = 0.000173611 \end{aligned}$$

4. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{2+x} \qquad \text{รอบจุด } 0$$

และหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งตรวจสอบว่าอนุกรมที่ได้เท่ากันหรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2+x} & f(0) &= \frac{1}{2} \\
f'(x) &= (-1)(2+x)^{-2} & f'(0) &= \frac{(-1)}{2^2} \\
f''(x) &= (-1)(-2)(2+x)^{-3} & f''(0) &= \frac{2!}{2^3} \\
f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)(2+x)^{-4} & f'''(0) &= \frac{(-1)3!}{2^4} \\
f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(-4)(2+x)^{-5} & f^{(4)}(0) &= \frac{4!}{2^5} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!(2+x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) &= \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n! \cdot 2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

หาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันนี้โดยใช้อนุกรมเรขาคณิต

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n & \text{เมื่อ } \left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n & \text{เมื่อ } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n & \text{เมื่อ } |x| < 2
\end{aligned}$$

การหาอนุกรมกำลังของ f จากทั้งสองวิธีเป็นอนุกรมเดียวกัน

5. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = x\ln(2-x)$ รอบจุด 1 โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } |x|<1$$

$$\ln(2-x) = \ln((1-x)+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-x)^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } |1-x|<1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } 0<x<1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{เมื่อ } 0<x<1$$

ให้ $0<x<1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
x\ln(2-x) &= (x-1+1)\ln(2-x) = (x-1)\ln(2-x) + \ln(2-x) \\
&= (x-1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(x-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(x-1)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(x-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(x-1)^n}{n} \\
&= -(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 - \frac{1}{4}(x-1)^5 - \cdots \\
&\quad -(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \cdots \\
&= -(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3 - \frac{7}{12}(x-1)^4 - \cdots
\end{aligned}$$

6. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sin^2 x$ รอบจุด 0 โดยใช้ตารางเทย์เลอร์

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{2} - 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \cdots \\
&= -\frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \cdots
\end{aligned}$$

7. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^{4n+3}}{(2n)!}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\
\cos(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}\\
\frac{d}{dx}\cos(x^2) &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!}\\
-2x\sin(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4nx^{4n-1}}{(2n)!}\\
-\frac{1}{2}x\sin(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{4n-1}}{(2n)!}\\
-x^4\frac{1}{2}x\sin(x^2) &= x^4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{4n-1}}{(2n)!}\\
-\frac{1}{2}x^5\sin(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{4n+3}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

8. จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์หาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

แนวคำตอบ จาก

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\cdots}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}+\frac{x^4}{7}-\cdots\right)\\
&= \frac{1}{3} \quad \#
\end{aligned}$$