คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 5
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ **สัปดาห์ที่** 5 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ถ้า $\vec{a} = \langle x, 1, 2\rangle$ ตั้งฉากกับ $\vec{b} = \langle -1, 1, 3\rangle$ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0 \\ -x+1+6 &= 0 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ คือ $\vec{a}\times\vec{b}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \langle 1, -23, 8\rangle \qquad \# \end{aligned}$$

2. ให้ $A(1,2,3)$, $B(2,5,5)$ และ $C(0,1,2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด B ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AC ที่จุด D จงหาพิกัดของจุด D

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \langle 1, 3, 2\rangle \\ \overrightarrow{AC} &= \langle -1, -1, -1\rangle \end{aligned}$$

เนื่องจาก ลากเส้นตรงจากจุด B ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AC ที่จุด D ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \text{Proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{-6}{3}\langle -1, -1, -1\rangle = \langle 2, 2, 2\rangle \end{aligned}$$

ให้ $D = (a, b, c)$ จะได้ว่า $\overrightarrow{AD} = \langle a-1, b-2, c-3\rangle$ ดังนั้น

$$\langle a-1, b-2, c-3\rangle = \langle 2, 2, 2\rangle$$

นั่นคือ $a = 3, b = 4, c = 5$ ดังนั้น $D = (3, 4, 5)$

3. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติซึ่งตั้งฉากกัน โดยที่ $\|\vec{u}-2\vec{v}\|=3$ และ $\|2\vec{u}+\vec{v}\|=4$ จงหา $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
3^2 &= \|\vec{u}-2\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v}) \\
9 &= \|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 \\
9 &= \|\vec{u}\|^2 + 4\|\vec{v}\|^2 && \text{........(1)} \\
4^2 &= \|2\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (2\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) \\
16 &= 4\|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
16 &= 4\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 && \text{........(2)} \\
(1)+(2): \quad 25 &= 5\|\vec{u}\|^2 + 5\|\vec{v}\|^2 \\
5 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 = 5$$

ดังนั้น $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{5}$ #

4. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-1,2,3)$, $B(2,-1,3)$ และ $C(4,-1,2)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \langle 3,-3,0\rangle$ และ $\overrightarrow{AC} = \langle 5,-3,-1\rangle$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \langle 3,3,6\rangle
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{พื้นที่ของสามเหลี่ยม}\, ABC &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+6^2} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{6} \quad \text{ตารางหน่วย} \quad \#
\end{aligned}$$

5. จงตรวจสอบว่า $\vec{a} = \langle 1,2,3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4,5,6\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 7,8,9\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน #

6. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1\rangle$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4\end{vmatrix} \\ &= 2(1) - 1(-4) - 3(15) = -39\end{aligned}$$

ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$, $\vec{b}$, และ $\vec{c}$ คือ $|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}| = |-39| = 39$ ลูกบาศก์หน่วย #

7. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

แนวคำตอบ เลือก $\vec{a} = \langle 1, 0, 1\rangle, \vec{b} = \langle 1, 1, 1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 0, 1, 0\rangle$ จะได้ว่า

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} = \langle -1, 0, -1\rangle$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0\end{vmatrix} = \langle 0, 0, 0\rangle$$

และ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{vmatrix} = \langle -1, 0, 1\rangle$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} = \langle -1, 0, -1\rangle$$

ดังนั้น $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

8. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ จงแสดงว่า $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$

***บทพิสูจน์*.** สมมติ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= -\vec{c} \\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b} &= -\vec{c}\times\vec{b} \\ \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b} &= \vec{b}\times\vec{c} \\ \vec{a}\times\vec{b}+\vec{0} &= \vec{b}\times\vec{c} \\ \vec{a}\times\vec{b} &= \vec{b}\times\vec{c}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= -\vec{c} \\ \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b} &= \vec{a}\times(-\vec{c}) \\ \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{a}\times\vec{c} \\ \vec{0}+\vec{a}\times\vec{b} &= \vec{c}\times\vec{a} \\ \vec{a}\times\vec{b} &= \vec{c}\times\vec{a}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$ □