คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 6
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ **สัปดาห์ที่** 6 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{4-y}{2} = z - 2$

   แนวคำตอบ ให้ $B = (0,0,0)$ จะได้ว่า $P_0 = (0,4,2)$ และ $\vec{A} = \langle 1,-2,1\rangle$ แล้ว $\overrightarrow{P_0B} = \langle 0,-4,-2\rangle$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{P_0} + \frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\vec{A} \\
&= \langle 0,4,2\rangle + \frac{\langle 0,-4,-2\rangle\cdot\langle 1,-2,1\rangle}{1+4+1}\langle 1,-2,1\rangle \\
&= \langle 0,4,2\rangle + \frac{0+8-2}{6}\langle 1,-2,1\rangle \\
&= \langle 0,4,2\rangle + \langle 1,-2,1\rangle \\
&= \langle 1,2,3\rangle
\end{aligned}$$

   ดังนั้น $(1,2,3)$ เป็นจุดเชิงตั้งฉาก นั่นคือเส้นตรงที่ต้องการต้องผ่านจุด B และ M นั่นคือมีเวกเตอร์แสดงทิศทางเป็น

$$\vec{A} = \overrightarrow{BM} = \langle 1,2,3\rangle$$

   ดังนั้นสมการเส้นตรงคือ $\quad x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \quad \#$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2,-1)$ และจุดตัดของเส้นตรง

$$L_1 : x-1 = \frac{y-1}{2} = z \qquad \text{และ} \qquad L_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z-1$$

   แนวคำตอบ ให้ $A = (1,2,-1)$ หาจุดตัดเส้นตรง L_1 และ L_2 พิจารณา

$$\begin{aligned}
x - 1 &= z && \text{จาก } L_1 \\
x &= 3(z-1) = 3z-3 && \text{จาก } L_2 \\
\therefore \quad (3z-3)-1 &= z \\
2z &= 4 \qquad \therefore z = 2,\ x = 3
\end{aligned}$$

   จาก L_1 จะได้ $y - 1 = 2z = 2(2)$ ดังนั้น $y = 5$ นั้น $B(3,5,2)$ เป็นจุดตัดของ L_1 และ L_2
   สมการเส้นตรงที่ต้องการมีเวกเตอร์แสดงทิศทางคือ

$$\vec{A} = \overrightarrow{AB} = \langle 2,3,3\rangle$$

   ดังนั้นสมการเส้นตรงคือ $\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{3} \quad \#$

3. จงหาพิกัดบนเส้นตรง L ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด เมื่อ $L:\begin{cases} x &= 3+2t \\ y &= 1+t \\ z &= 1+2t \end{cases}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $P_0 = (3,1,1)$, $B = (0,0,0)$ และ $\vec{A} = \langle 2,1,2\rangle$ แล้ว $\overrightarrow{P_0B} = \langle -3,-1,-1\rangle$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{P}_0 + \frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\vec{A} \\ &= \langle 3,1,1\rangle + \frac{\langle -3,-1,-1\rangle\cdot\langle 2,1,2\rangle}{4+1+4}\langle 2,1,2\rangle \\ &= \langle 3,1,1\rangle + \frac{-6-1-2}{9}\langle 2,1,2\rangle \\ &= \langle 3,1,1\rangle - \langle 2,1,2\rangle \\ &= \langle 1,0,-1\rangle\end{aligned}$$

ดังนั้น $(1,0,-1)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด #

4. ให้ $A(-2,3,k)$ เป็นจุดบนระนาบ $M: 3x-2y+4z=12$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับระนาบ M

แนวคำตอบ เนื่องจาก $A(-2,3,k)$ เป็นจุดบนระนาบ $M: 3x-2y+4z=12$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}3(-2)-2(3)+4k &= 12 \\ -12+4k &= 12 \\ 4k &= 24 \\ k &= 6\end{aligned}$$

ดังนั้นเส้นตรงนี้ผ่านจุด $A(-2,3,6)$ และมีทิศเดียวกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ นั่นคือ $\vec{A} = \langle 3,-2,4\rangle$
จะได้สมการเส้นตรงเป็น

$$\begin{cases} x &= -2+3t \\ y &= 3-2t \\ z &= 6+4t \end{cases} \qquad \#$$

5. จงหาจุดบนระนาบ $x-2y+3z=4$ ที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2,3,-2)$

แนวคำตอบ ให้ L เป็นเส้นที่ผ่านจุด $(2,3,-2)$ และตัดตั้งฉากกับระนาบ $M: x-2y+3z=4$
ดังนั้นมีเวกเตอร์แสดงทิศทางคือเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M นั่นคือ $\vec{A} = \langle 1,-2,3\rangle$ จะได้สมการเว้นตรง L เป็น

$$\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 3-2t \\ z &= -2+3t \end{cases}$$

จะได้ว่าจุดบนระนาบ M ที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2,3,-2)$ คือจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M หาได้จาก

$$\begin{aligned}x-2y+3z &= 4 \\ (2+t)-2(3-2t)+3(-2+3t) &= 4 \\ 2+t-6+4t-6+9t &= 4 \\ 14t &= 14 \\ t &= 1\end{aligned}$$

แทน $t=1$ ในสมการเส้นตรง L จะได้ $(3,1,1)$ #

6. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x+y+z=1$ และ $2x-y+z=3$

แนวคำตอบ เลือก $x=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y+z&=1 \\ -y+z&=3 \\ 2z&=4 \qquad \therefore z=2,\, y=-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(0,-1,2)$ เป็นจุดบนระนาบทั้งสอง
เวกเตอร์แนวฉากของ $x+y+z=1$ และ $2x-y+z=3$ คือ $\vec{N}_1=\langle 1,1,1\rangle$ และ $\vec{N}_2=\langle 2,-1,1\rangle$ ตามลำดับ
ดังนั้น $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{A}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \langle 2,1,-3\rangle \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $\dfrac{x}{2}=y+1=\dfrac{2-z}{3} \qquad \#$

7. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(1,2,3)$, $(2,0,1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x+y-z=1$

แนวคำตอบ ให้ $A=(1,2,3)$, $B=(2,0,1)$ จะได้ $\overrightarrow{AB}=\langle 1,-2,-2\rangle$
และเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ $x+y-z=1$ คือ $\vec{N}=\langle 1,1,-1\rangle$
จะได้ว่า $\vec{N}\times\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{N}\times\overrightarrow{AB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \langle -4,1,-3\rangle \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการระนาบคือ

$$\begin{aligned} -4(x-2)+1(y-0)-3(z-1)&=0 \\ -4x+8+y-3z+3&=0 \\ 4x-y+3z&=11 \qquad \# \end{aligned}$$

8. จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง $x=y=z$ และเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $\vec{A}_1=\langle 1,1,1\rangle$ และ $\vec{A}_2=\langle 2,3,4\rangle$ เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบ จะได้ว่า $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N}=\vec{A}_1\times\vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{i} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \langle 1,-2,1\rangle \end{aligned}$$

เลือกจุดผ่านบนเส้นตรง $x=y=z$ คือจุด $(0,0,0)$ ดังนั้น สมการระนาบคือ

$$\begin{aligned} 1(x-0)-2(y-0)+1(z-0)&=0 \\ x-2y+z&=0 \qquad \# \end{aligned}$$