คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 7
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ **สัปดาห์ที่** 7 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 4$

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $\vec{A} = \langle 6, 1, -2 \rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ แล้ว

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|}\\ &= \frac{6-2-4}{\sqrt{41}\sqrt{9}} = 0\\ \theta &= 90^\circ\end{aligned}$$

   ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 4$ เท่ากับ $|90^\circ - 90^\circ| = 0^\circ$ หรือกล่าวได้ว่า เส้นตรงขนานกับระนาบ

2. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + 2y - z = 2$ และ $2x + y + z = 3$

   แนวคำตอบ เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2y - z &= 2\\ y + z &= 3\\ 3y &= 5 \qquad \therefore y = \frac{5}{3},\ z = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

   ดังนั้น $(0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ เป็นจุดบนระนาบทั้งสอง
   เวกเตอร์แนวฉากของ $x + 2y - z = 2$ และ $2x + y + z = 3$ คือ $\vec{N}_1 = \langle 1, 2, -1 \rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 2, 1, 1 \rangle$ ตามลำดับ
   ดังนั้น $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{i} & \vec{i}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= \langle 3, -3, -3 \rangle\end{aligned}$$

   ดังนั้นสมการของเส้นตรงนี้คือ $x = 3t, y = \dfrac{5}{3} - 3t, z = \dfrac{4}{3} - 3t \qquad \#$

3. กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, 0, t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle 0, \cos t, t \rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{G})'(0)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}(\vec{F} \times \vec{G})(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & t \\ 0 & \cos t & t \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & t \\ \cos t & t \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} \\ &= \langle -t\cos t, -t, \cos t \rangle\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = \langle -\cos t + t\sin t, -1, -\sin t \rangle$$

ดังนั้น

$$(\vec{F} \times \vec{G})'(0) = \langle -1, -1, 0 \rangle$$

4. จงหา $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \| \langle 5\tan t, 3, 4 \rangle \| dt$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \| \langle 5\tan t, 3, 4 \rangle \| dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{25\tan^2 t + 9 + 16}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{25\tan^2 t + 25}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{25(\tan^2 t + 1)}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{25\sec^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |5\sec t|\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sec t\, dt \\ &= [5\ln|\sec t + \tan t|]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 5\ln(\sqrt{2}+1) - 5\ln(1+0) \\ &= 5\ln(\sqrt{2}+1) \quad \#\end{aligned}$$

5. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนคือ

$$\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t \cos t, t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

แนวคำตอบ จะได้ว่า
ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เมื่อ $t = 0$ คือ

$$\vec{r}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

เวกเตอร์ความเร็ว และอัตราเร็ว เมื่อ $t = 0$ คือ

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) = \vec{r}'(t) &= \langle 2\sin t\cos t, e^t\cos t - e^t \sin t, 1 \rangle \\ &= \langle \sin 2t, e^t \cos t - e^t \sin t, 1 \rangle \\ \vec{V}(0) &= \langle 0, 1, 1 \rangle && \text{เวกเตอร์ความเร็ว} \\ v(0) = \|\vec{V}(0)\| &= \sqrt{2} && \text{อัตราเร็ว}\end{aligned}$$

เวกเตอร์ความเร่ง และอัตราเร่ง เมื่อ $t = 0$ คือ

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \langle 2\cos 2t, -2e^t \sin t, 0\rangle$$

$$\vec{A}(0) = \langle 2, 0, 0\rangle \qquad \text{เวกเตอร์ความเร่ง}$$

$$a(0) = \|\vec{A}(0)\| = 2 \qquad \text{อัตราเร่ง}$$

6. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, -3\cos t, 4\rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = \pi$$

แนวคำตอบ

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \langle 3\cos t, 3\sin t, 0\rangle \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \sqrt{9} = 3 \\ \vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \langle \cos t, \sin t, 0\rangle \\ \vec{T}(\pi) &= \langle -1, 0, 0\rangle \end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เมื่อ $t = \pi$

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle \\ \|\vec{T}'(t)\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \\ \vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \langle -\sin t, \cos t, 0\rangle \\ \vec{N}(\pi) &= \langle 0, -1, 0\rangle \end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$ คือ

$$\begin{aligned} \vec{B}(\pi) &= \vec{T}(\pi) \times \vec{N}(\pi) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 1\rangle \end{aligned}$$

7. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 5\cos t, 4\sin t\rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\vec{r}(0) = \langle 0, 5, 0\rangle$ จะได้ว่า $(0, 5, 0)$ คือจุดผ่านของเส้นโค้งเมื่อ $t = 0$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \langle 3\cos t, -5\sin t, 4\cos t\rangle \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{9\cos^2 t + 25\sin^2 t + 16\cos^2 t} \\
&= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \sqrt{25} = 5 \\
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \left\langle \frac{3}{5}\cos t, -\sin t, \frac{4}{5}\cos t \right\rangle \\
\vec{T}(0) &= \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle
\end{aligned}$$

สมการของเส้นสัมผัสเมื่อ $t = 0$ จะผ่านจุด $(0, 5, 0)$ และขนานกับ $\vec{T}(0) = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$ คือ $\begin{cases} x &= \frac{3}{5}t \\ y &= 5 \\ z &= \frac{4}{5}t \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\vec{T}'(t) &= \left\langle -\frac{3}{5}\sin t, -\cos t, -\frac{4}{5}\sin t \right\rangle \\
\|\vec{T}'(t)\| &= \sqrt{\frac{9}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{16}{25}\sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \\
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \left\langle -\frac{3}{5}\sin t, -\cos t, -\frac{4}{5}\sin t \right\rangle \\
\vec{N}(0) &= \langle 0, -1, 0\rangle
\end{aligned}$$

สมการของเส้นแนวฉากมื่อ $t = 0$ จะผ่านจุด $(0, 5, 0)$ และขนานกับ $\vec{N}(0) = \langle 0, -1, 0\rangle$ คือ $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 5 - t \\ z &= 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(0) &= \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right\rangle
\end{aligned}$$

สมการของเส้นแนวฉากคู่เมื่อ $t = 0$ จะผ่านจุด $(0, 5, 0)$ และขนานกับ $\vec{B}(0) = \left\langle \frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right\rangle$ คือ $\begin{cases} x &= \frac{4}{5}t \\ y &= 5 \\ z &= -\frac{3}{5}t \end{cases}$