คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 8
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ระบบพิกัดเชิงขั้ว **สัปดาห์ที่** 9 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงเขียนสมการ $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

แนวคำตอบ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= 1 \\
x^2 + y^2 &= x^2y^2 \\
r^2 &= (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2 \\
r^2 &= r^4\cos^2\theta\sin^2\theta \\
1 &= r^2\cos^2\theta\sin^2\theta \\
1 &= r\cos\theta\sin\theta \\
r &= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{2}{2\cos\theta\sin\theta} \\
&= \frac{2}{\sin 2\theta} \\
&= 2\csc 2\theta
\end{aligned}$$

2. จงเขียนสมการ $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta+1} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta-1} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

แนวคำตอบ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta}{\sin\theta+1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta-1} &= 1 \\
\frac{\cos\theta(\sin\theta-1) + \cos\theta(\sin\theta+1)}{(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)} &= 1 \\
\cos\theta\sin\theta - \cos\theta + \cos\theta\sin\theta + \cos\theta &= \sin^2\theta - 1 \\
2\cos\theta\sin\theta &= \sin^2\theta - 1 \\
2(r\cos\theta)(r\sin\theta) &= r^2\sin^2\theta - r^2 \\
2xy &= y^2 - (x^2+y^2) \\
2xy + x^2 &= 0
\end{aligned}$$

3. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = \sin 3\theta$ และ $r = \sin 5\theta$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin 5\theta \\
\sin 5\theta - \sin 3\theta &= 0 \\
2\cos\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) &= 0 \\
\cos 4\theta \sin\theta &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 4\theta = 0$ หรือ $\sin\theta = 0$
กรณีที่ $\sin\theta = 0$ จะได้ว่า $\theta = n\pi$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$
กรณีที่ $\cos 4\theta = 0$ จะได้ว่า $4\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ

$$\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \qquad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{Z}$$

4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{4}]$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[3\theta + 2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{16}\left[3\frac{\pi}{4} + 2\right] - 0 \\
&= \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{8} \quad \#
\end{aligned}$$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 2 - \sin\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{3}]$

แนวคำตอบ

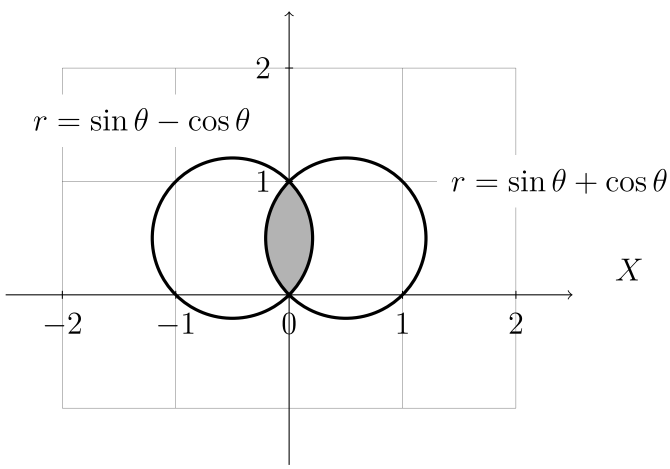
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2-\sin\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 - 4\sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 9 - 8\sin\theta - \cos 2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[9\theta + 8\cos\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\left[3\pi + 4 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] - \frac{1}{4}\left[0 + 8 + 0\right] \\
&= \frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16} - 1 \quad \#
\end{aligned}$$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2-x-y=0$ และ $x^2+y^2+x-y=0$

แนวคำตอบ ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^2+y^2-x-y &= 0 \\ r^2 - r\cos\theta - r\sin\theta &= 0 \\ r &= \cos\theta + \sin\theta \\ x^2+y^2+x-y &= 0 \\ r^2 + r\cos\theta - r\sin\theta &= 0 \\ r &= \sin\theta - \cos\theta \end{aligned}$$

เขียนกราฟได้ดังนั้น

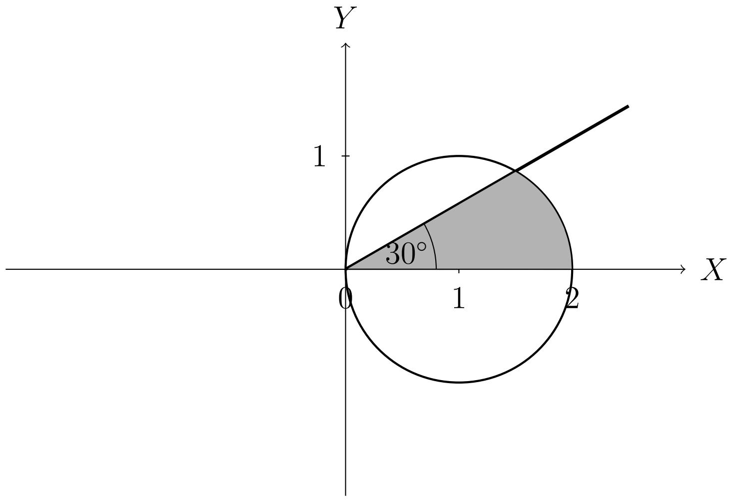


สมการวงกลม $r = \sin\theta + \cos\theta$ แล $r = \sin\theta - \cos\theta$
มีจุดตัวของกราฟคือ 0 และ $\frac{\pi}{2}$

จากกราฟพื้นที่แรเงาคือ 2 เท่าของพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = \sin\theta - \cos\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin 2\theta\, d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \quad \# \end{aligned}$$

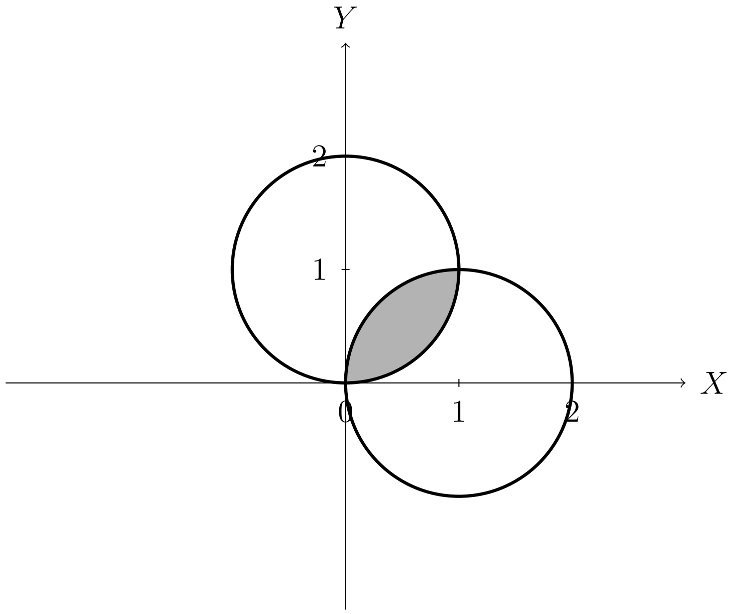
7. จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้



แนวคำตอบ สมการวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 0)$ รัศมี 1 หน่วยคือ $r = 2\cos\theta$
จากกราฟพื้นที่แรเงาคือส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = 2\cos\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{6}]$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\theta \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 + \cos 2\theta \, d\theta \\
&= \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \#
\end{aligned}
$$

8. จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้



แนวคำตอบ สมการวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,0)$ รัศมี 1 หน่วยคือ $r = 2\cos\theta$ และสมการวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,1)$ รัศมี 1 หน่วยคือ $r = 2\sin\theta$
หาจุดตัวของกราฟจาก

$$\begin{aligned} 2\sin\theta &= 2\cos\theta \\ \tan\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

จากกราฟพื้นที่แรเงาคือ 2 เท่าของพื้นที่ส่วนที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $r = 2\sin\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{4}]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 - 2\cos 2\theta\,d\theta \\ &= [2\theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \quad \# \end{aligned}$$