คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 9
MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ ฟังก์ชันหลายตัวแปร ลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ย่อย **สัปดาห์ที่** 10 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2-y^2+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ พร้อมวาดกราฟประกอบ

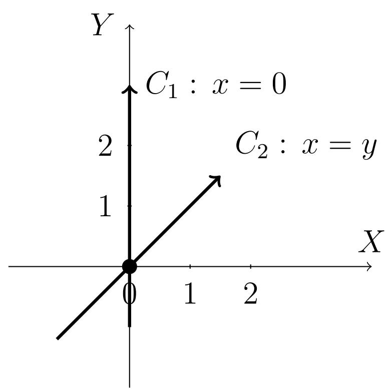
แนวคำตอบ จะได้ว่า $x^2-y^2+1>0$ และ $4-x^2-y^2>0$ เขียนกราฟได้ดังนี้

ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชัน f คือ

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : y^2-x^2<1 \text{ และ } x^2+y^2<4\}$$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : x=0$ และ $C_2 : y=x$



บน $C_1 : x=0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0y}{0+y^2} = 0$$

บน $C_2 : y=x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x)}{x^3+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2(x+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x+1} = 1$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$ ไม่มีค่า #

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

แนวคำตอบ

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{และ} \quad g(x,y) = x$$

เนื่องจาก $y^2 > 0$ นั่นคือ $x^2+y^2 > x^2$ ดังนั้น $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} < 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

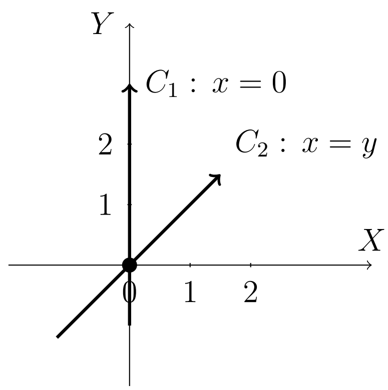
และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad \#$$

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : x = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 : x = 0$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

บน $C_2 : y = x$ จะได้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{2x^2} = 0$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า

สรุปได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ $\qquad \#$

5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3}{x^2+y^4} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

แนวคำตอบ

$$\text{ให้} \quad h(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^4} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = 3x$$

เนื่องจาก $y^4 > 0$ นั่นคือ $x^2 + y^4 > x^2$ ดังนั้น แล้ว

$$|h(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^4} \le 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3x = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3}{x^2+y^4} = 0 = f(0,0)$$

สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ #

6. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(1,1)$ และ $f_y(1,1)$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
f_x(1,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h) - (2+h)}{2h(2+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{2h(2+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(2+h)} \\
&= \frac{1}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(1,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1,1+h) - f(1,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2 - (2+h)}{2h(2+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h(2+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2(2+h)} \\
&= -\frac{1}{4} \quad \#
\end{aligned}$$

7. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{-\sin(xy)}$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{-\sin(xy)} + e^{-\sin(xy)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} x \\
&= x e^{-\sin(xy)} \frac{\partial}{\partial x}[-\sin(xy)] + e^{-\sin(xy)} \cdot 1 \\
&= x e^{-\sin(xy)} (-\cos(xy)) \frac{\partial}{\partial x}(xy) + e^{-\sin(xy)} \\
&= -x\cos(xy) e^{-\sin(xy)} y + e^{-\sin(xy)} \\
&= e^{-\sin(xy)}(1 - xy\cos(xy)) \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial y} e^{-\sin(xy)} \\
&= x e^{-\sin(xy)} \frac{\partial}{\partial y}[-\sin(xy)] \\
&= x e^{-\sin(xy)} [-\cos(xy)] \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\
&= x e^{-\sin(xy)} [-\cos(xy)] x \\
&= -x^2 \cos(xy) e^{-\sin(xy)} \quad \#
\end{aligned}$$

8. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = \dfrac{e^{x^2+y^2}}{\ln x}$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\ln x \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+y^2} - e^{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln x}{[\ln x]^2} \\
&= \frac{\ln x \cdot e^{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) - e^{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \\
&= \frac{\ln x \cdot e^{x^2+y^2} 2x - e^{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \\
&= \frac{e^{x^2+y^2}[2x^2 \ln x - 1]}{x \ln^2 x} \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{\ln x} \cdot e^{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) \\
&= \frac{1}{\ln x} \cdot e^{x^2+y^2}(2y) \\
&= \frac{2y e^{x^2+y^2}}{\ln x} \quad \#
\end{aligned}$$