เฉลย Quiz 2 : MAC1303 แคลคูลัส ๒

หัวข้อ อนุกรมกำลังและพหุนามเทย์เลอร์ **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา ศุกร์ที่ 18 สิงหาคม 2566 เวลา 13:00-13:00 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot(-3)^n}$

แนวคำตอบ จะเห็นว่าอนุกรมกำลังมีศูนย์กลางอยู่ที่ 1 แล้ว

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot(-3)^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot(-3)^n}{(x-1)^n}\right| &= \frac{1}{3}|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{3}|x-1|\cdot 1\\ &= \frac{1}{3}|x-1|<1\\ &= |x-1|<3\end{aligned}$$

ดังนั้นรัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 และ

$$\begin{aligned}|x-1|&<3\\ -3<x-1&<3\\ -2<x&<4\end{aligned}$$

พิจารณา
กรณี $x=-2$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot(-3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะว่าเป็นอนุกรมพีที่ $p=1$
กรณี $x=4$ จะได้ว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot(-3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยใช้การทดสอบอนุกรมสลับ
สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-2,4]$ #

2. **(5 คะแนน)** ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt[3]{1.1}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f (ตอบในรูปทศนิยม 6 ตำแหน่ง)

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x+1} && \longrightarrow && f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \tfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} && \longrightarrow && f'(0) &= \tfrac{1}{3} \\
f''(x) &= -\tfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} && \longrightarrow && f''(0) &= -\tfrac{2}{9} \\
f'''(x) &= \tfrac{10}{27}(x+1)^{-\frac{8}{3}} && \longrightarrow && f'''(0) &= \tfrac{10}{27} \\
f^{(4)}(x) &= -\tfrac{80}{81}(x+1)^{-\frac{11}{3}} && \longrightarrow && f^{(4)}(0) &= -\tfrac{80}{81}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
T_4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9\cdot 2!}x^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}x^3 - \frac{80}{81\cdot 4!}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4
\end{aligned}$$

ประมาณค่า $\sqrt[3]{1.1}$ โดยแทน $x = 0.1$ ใน $T_4(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1.1} &= f(0.1) \approx T_4(0.1) \\
&= 1 + \frac{1}{3}(0.1) - \frac{1}{9}(0.1)^2 + \frac{5}{81}(0.1)^3 - \frac{10}{243}(0.1)^4 \\
&= 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900} + \frac{5}{81000} - \frac{1}{243000} \\
&= \frac{243000 + 8100 - 270 + 15 - 1}{243000} = \frac{250844}{243000} \\
&= 1.032280 \quad \#
\end{aligned}$$