คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 10
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ฟังก์ชันเชิงการคูณ ฟังก์ชันเทา และฟังก์ชันซิกมา **สัปดาห์ที่** 12 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ จงแสดงว่า fg เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ

บทพิสูจน์. สมมติว่า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\gcd(m, n) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} fg(mn) &= f(mn)g(mn) \\ &= f(m)f(n)g(m)g(n) \\ &= f(m)g(m)f(n)g(n) \\ &= fg(m)fg(n) \end{aligned}$$

ดังนั้น fg เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ $\square$

2. ให้ M เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณซึ่ง $M(p^n) = [M(p)]^n$ ทุก ๆ จำนวนเฉพาะ p และจำนวนนับ n ถ้า

$$M(1) = 1, \quad M(2) = 3, \quad M(3) = 5 \quad \text{และ} \quad M(5) = 7$$

จงหาค่าของ $M(3600)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$M(3600) = M(36 \cdot 100) = M(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2)$$

เนื่องจาก $\gcd(2^4, 3^2) = 1$, $\gcd(3^2, 5^2) = 1$, $\gcd(2^4, 5^2) = 1$ และ M เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ ดังนั้น

$$M(3600) = M(2^4)M(3^2)M(5^2)$$

จากสมมติฐานที่ว่า $M(p^n) = [M(p)]^n$ ทุก ๆ จำนวนเฉพาะ p และจำนวนนับ n จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M(3600) &= [M(2)]^4[M(3)]^2[M(5)]^2 \\ &= 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \\ &= 81 \cdot 25 \cdot 49 \\ &= 99225 \end{aligned}$$

3. จงหาค่าของ $\displaystyle\sum_{d|18}[d + \tau(d)]$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{d|18}[d + \tau(d)] &= [1 + \tau(1)] + [2 + \tau(2)] + [3 + \tau(3)] + [6 + \tau(6)] + [9 + \tau(9)] + [18 + \tau(18)] \\ &= (1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18) + \tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(2 \cdot 3) + \tau(3^2) + \tau(2 \cdot 3^2) \\ &= 39 + 1 + (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1)(1 + 1) + (2 + 1) + (1 + 1)(2 + 1) \\ &= 39 + 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 6 \\ &= 57 \quad \# \end{aligned}$$

4. จงหาค่าของ $\sum_{d|20}[\sigma_2(d)-\sigma(d)]$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{d|20}[\sigma_2(d)-\sigma(d)] &= [\sigma_2(1)-\sigma(1)]+[\sigma_2(2)-\sigma(2)]+[\sigma_2(4)-\sigma(4)]+[\sigma_2(5)-\sigma(5)]\\ &\quad+[\sigma_2(10)-\sigma(10)]+[\sigma_2(20)-\sigma(20)]\\ &= [1^2-1]+[(1^2+2^2)-(1+2)]+[(1^2+2^2+4^2)-(1+2+4)]+[(1^2+5^2)-(1+5)]\\ &\quad+[(1^2+2^2+5^2+10^2)-(1+2+5+10)]\\ &\quad+[(1^2+2^2+4^2+5^2+10^2+20^2)-(1+2+4+5+10+20)]\\ &= 0+[5-3]+[21-7]+[26-6]+[130-18]+[546-42]\\ &= 2+14+20+112+504\\ &= 652 \quad \#\end{aligned}$$

5. จงหาค่าของ $\tau(3125)$ และ $\sigma(9900)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tau(3125) &= \tau(5^5)=1+5=6\\ \sigma(9900) &= \sigma(2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11)\\ &= (1+2+4)(1+3+9)(1+5+25)(1+11)\\ &= (7)(13)(31)(12)\\ &= 33852\end{aligned}$$

6. จงหาค่าของ $\tau(5252)$ และ $\sigma(10800)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tau(5252) &= \tau(2^2\cdot 13\cdot 101)\\ &= (1+2)(2)(2)=12\\ \sigma(10800) &= \sigma(2^4\cdot 3^3\cdot 5^2)\\ &= \frac{2^5-1}{2-1}(1+3+9+27)(1+5+25)\\ &= (31)(40)(31)\\ &= 38440\end{aligned}$$

7. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะโดยที่ $5\nmid p$ ถ้า

$$\sigma(5p)=2\sigma(p^2)-2$$

จงหาค่าของ $\tau(p^3+3^p)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $5\nmid p$ ดังนั้น $\gcd(5,p)=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sigma(5p) &= 2\sigma(p^2)-2\\ \sigma(5)\sigma(p) &= 2(1+p+p^2)-2\\ (1+5)(1+p) &= 2p^2+2p\\ 0 &= 2p^2-4p-6\\ 0 &= p^2-2p-3\\ 0 &= (p+1)(p-3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $p=3$ จะได้ว่า $\tau(p^3+3^p)=\tau(3^3+3^3)=\tau(54)=\tau(2\cdot 3^3)=(2)(4)=8 \quad \#$

8. จงตรวจสอบว่า $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3)$ เป็นจริงหรือไม่ เมื่อ $n = 3655$ และ $n = 4503$

กรณี $n = 3655$
แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\tau(n) &= \tau(3655) = \tau(5 \cdot 17 \cdot 43) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+1) &= \tau(3656) = \tau(2^3 \cdot 457) = 4 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+2) &= \tau(3657) = \tau(3 \cdot 23 \cdot 53) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+3) &= \tau(3658) = \tau(2 \cdot 31 \cdot 59) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3) = \tau(n) = 8$ เป็นจริง

กรณี $n = 4503$ **แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned}
\tau(n) &= \tau(4503) = \tau(3 \cdot 19 \cdot 79) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+1) &= \tau(4504) = \tau(2^3 \cdot 563) = 4 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+2) &= \tau(4505) = \tau(5 \cdot 17 \cdot 53) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\
\tau(n+3) &= \tau(3658) = \tau(2 \cdot 3 \cdot 751) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3) = \tau(n) = 8$ เป็นจริง