คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 11
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ฟังก์ชันฟีออยเลอร์ และฟังก์ชันจำนวนเต็มค่ามากสุด **สัปดาห์ที่** 13 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาค่าของ $\phi(11! - 10!)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 11! - 10! = 11 \cdot 10! - 10! &= 10!(11-1) = 10! \cdot 10 \\ &= 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \phi(11! - 10!) &= \phi(2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) \\ &= (2^9 - 2^8)(3^4 - 3^3)(5^3 - 5^2)(7-1) \\ &= 256 \cdot 54 \cdot 100 \cdot 6 \\ &= 8294400 \end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $X = \sum_{n=1}^{100}\left(\sum_{d|n}\phi(d)\right)$ จงหาค่าของ $\phi(X)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\sum_{d|n}\phi(d) = n$ ดังนั้น

$$X = \sum_{n=1}^{100}\left(\sum_{d|n}\phi(d)\right) = \sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050$$

แล้วจะได้ว่า

$$\phi(X) = \phi(5050) = \phi(101 \cdot 50) = \phi(101)\phi(50) = (100)\phi(5^2 \cdot 2) = 100(5^2 - 5)(1) = 2000 \ \#$$

3. จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ทำให้ $\phi(2n) = \phi(n)$

แนวคำตอบ โดยการแบ่งกรณี

กรณี $\gcd(2, n) = 1$ จะได้ว่า

$$\phi(2n) = \phi(2)\phi(n) = 1 \cdot \phi(n) = \phi(n)$$

กรณี $\gcd(2, n) = 2$ ให้ $n = 2^k \cdot m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k และ m โดยที่ $\gcd(2, m) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi(2n) &= \phi(2^{k+1}m) = \phi(2^{k+1})\phi(m) = (2^{k+1} - 2^k)\phi(m) = 2^k\phi(m) \\ \phi(n) &= \phi(2^k m) = \phi(2^k)\phi(m) = (2^k - 2^{k-1})\phi(m) = 2^{k-1}\phi(m) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\phi(2n) = \phi(n)$ ก็ต่อเมื่อ $2^k = 2^{k-1}$ **ซึ่งเป็นไปไม่ได้**

สรุปได้ว่า $\phi(2n) = \phi(n)$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ gcd$(2, n) = 1$
หรือกล่าวได้อีกอย่างคือ $\phi(2n) = \phi(n)$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวกคี่ n

4. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไข $\phi(3p) = 3\phi(p)$

แนวคำตอบ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ
กรณี $p = 3$ พิจารณา

$$\phi(3p) = \phi(9) = \phi(3^2) = 3^2 - 3 = 6 = 3 \cdot 2 = 3\phi(3) = 3\phi(p)$$

ดังนั้น $p = 3$ สอดคล้องเงื่อนไข $\phi(3p) = 3\phi(p)$
กรณี $p \neq 3$ จะได้ว่า $\gcd(3, p) = 1$ พิจารณา

$$\phi(3p) = \phi(3)\phi(p) = 2\phi(p)$$

ดังนั้นไม่มีจำนวนเฉพาะ $p \neq 3$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\phi(3p) = 3\phi(p)$
สรุปได้ว่ามีจำนวนเฉพาะเพียงตัวเดียวคือ $p = 3$ เท่านั้นที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว $\#$

5. จงเขียนรูปแบบบัญญัติ (canonical form) ของ 30!

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
e_2(30) &= \left[\frac{30}{2}\right] + \left[\frac{30}{2^2}\right] + \left[\frac{30}{2^3}\right] + \left[\frac{30}{2^4}\right] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26 \\
e_3(30) &= \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{3^2}\right] + \left[\frac{30}{3^3}\right] = 10 + 3 + 1 = 14 \\
e_5(30) &= \left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{5^2}\right] = 6 + 1 = 7 \\
e_7(30) &= \left[\frac{30}{7}\right] = 4 \\
e_{11}(30) &= e_{13}(30) = 2 \\
e_{17}(30) &= e_{19}(30) = e_{23}(30) = e_{29}(30) = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้นรูปแบบบัญญัติของ 20! คือ

$$30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

6. จงหาจำนวนของเลขท้ายที่เป็นศูนย์ทั้งหมดของ $n = 2000!$

แนวคำตอบ เนื่องจากเลขที่ลงท้ายด้วยศูนย์จะเท่ากับ k ตัว เมื่อ $n = 10^k \cdot m$ โดยที่ gcd$(10, m) = 1$ และ $10 = 2 \cdot 5$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
e_5(2000) &= \left[\frac{2000}{5}\right] + \left[\frac{2000}{25}\right] + \left[\frac{2000}{125}\right] + \left[\frac{2000}{625}\right] \\
&= 400 + 80 + 16 + 3 \\
&= 499 \\
d = e_2(2000) &= \left[\frac{2000}{2}\right] + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{2000}{2^i}\right] \\
&= 1000 + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{2000}{2^i}\right] > 499
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $d > 499$ ดังนั้น

$$2000! = 2^d \cdot 5^{499} m = 2^{499} \cdot 2^{d-499} \cdot 5^{499} m = 10^{499} \cdot 2^{d-499} m$$

สรุปได้ว่าจำนวนของเลขท้ายที่เป็นศูนย์ทั้งหมดของ 2000! คือ 499 ตัว

7. จงหาจำนวนเต็มที่มีค่ามากสุด 7^k ที่หาร $1000!$ ลงตัว

แนวคำตอบ จำนวนเต็มที่มีค่ามากสุด 7^k ที่หาร $1000!$ ลงตัว หมายถึง $1000! = 7^k \cdot m$ โดยที่ $\mathsf{gcd}(7, m) = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned} e_7(1000) &= \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{49}\right] + \left[\frac{1000}{343}\right] \\ &= 142 + 20 + 2 \\ &= 164 \end{aligned}$$

จำนวนเต็มที่มีค่ามากสุด 7^k ที่หาร $1000!$ ลงตัว คือ 7^{164}

8. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ 403^n หารลงตัว $5000!$

แนวคำตอบ จำนวนเต็มที่มีค่ามากสุด $403 = 13 \cdot 31$ ที่หาร $5000!$ ลงตัว หมายถึง $5000! = 13^k \cdot m$ โดยที่ $\mathsf{gcd}(13, m) = 1$ และ $5000! = 31^d \cdot q$ โดยที่ $\mathsf{gcd}(31, q) = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned} e_{13}(5000) &= \left[\frac{5000}{13}\right] + \left[\frac{5000}{169}\right] + \left[\frac{5000}{2197}\right] \\ &= 384 + 29 + 1 \\ &= 414 \\ e_{31}(5000) &= \left[\frac{5000}{31}\right] + \left[\frac{5000}{961}\right] \\ &= 161 + 5 \\ &= 166 \end{aligned}$$

จำนวนเต็มที่มีค่ามากสุด 403^n ที่หาร $5000!$ ลงตัว คือ $n = \min\{166, 414\} = 166$