เฉลย Assignment 12
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมการไดโอแฟนไทน์ **สัปดาห์ที่** 14 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $99x + 71y = 15$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(99, 71) = 1$ และ $1 \mid 15$ ดังนั้นสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม หา x_0 และ y_0 จาก

$$\begin{array}{rcrcrl|rrrl} 99 &=& 99(1) &+& 71(0) & & 99 & 1 & 0 & R_1 \\ 71 &=& 99(0) &+& 71(1) & & 71 & 0 & 1 & R_2 \\ 28 &=& 99(1) &+& 71(-1) & & 28 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\ 15 &=& 99(-2) &+& 71(3) & & 15 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\ 13 &=& 99(3) &+& 71(-4) & & 13 & 3 & -4 & R_5 = R_3 - R_4 \\ 2 &=& 99(-5) &+& 71(7) & & 2 & -5 & 7 & R_6 = R_4 - R_5 \\ 1 &=& 99(33) &+& 71(-46) & & 1 & 33 & -46 & R_7 = R_5 - 6R_6 \end{array}$$

   จะได้ว่า $99(33) + 71(-46) = 1$ นั่นคือ $99(495) + 71(-690) = 15$ ทำให้ได้ว่า $x_0 = 495$ และ $y_0 = -690$ คำตอบของสมการนี้คือ

$$\begin{cases} x &=& 495 &+& 71t \\ y &=& -690 &-& 99t \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

2. จงหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $65x - 89y = 91$

   แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(65, 89) = 1$ และ $1 \mid 91$ ดังนั้นสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม หา x_0 และ y_0 จาก

$$\begin{array}{rcrcrl|rrrl} 89 &=& 89(1) &+& 65(0) & & 89 & 1 & 0 & R_1 \\ 65 &=& 89(0) &+& 65(1) & & 65 & 0 & 1 & R_2 \\ 24 &=& 89(1) &+& 65(-1) & & 24 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\ 17 &=& 89(-2) &+& 65(3) & & 17 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\ 7 &=& 89(3) &+& 65(-4) & & 7 & 3 & -4 & R_5 = R_3 - R_4 \\ 3 &=& 89(-8) &+& 65(11) & & 3 & -8 & 11 & R_6 = R_4 - 2R_5 \\ 1 &=& 89(19) &+& 65(-26) & & 1 & 19 & -26 & R_7 = R_5 - 2R_6 \end{array}$$

   จะได้ว่า $89(19)+65(-26) = 1$ นั่นคือ $65(-2366)-89(-1729) = 91$ ทำให้ได้ว่า $x_0 = -2366$ และ $y_0 = -1729$ คำตอบของสมการนี้คือ

$$\begin{cases} x &=& -2366 &-& 89t \\ y &=& -1729 &-& 65t \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

3. จงหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์

$$14x + 41y = 1441$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(14, 41) = 1$ และ $1 \mid 1441$ ดังนั้นสมการนี้มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม หา x_0 และ y_0 จาก $14x - 1441 = -41y$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 14x &\equiv 1441 \pmod{41} \\ 14x &\equiv 6 \pmod{41} \\ 3 \cdot 14x &\equiv 3 \cdot 6 \pmod{41} \\ 42x &\equiv 18 \pmod{41} \\ x &\equiv 18 \pmod{41} \end{aligned}$$

นั่นคือ $x_0 = 18$ และ $14(18) + 41y_0 = 1441$ จะได้ว่า $y_0 = 29$ คำตอบของสมการนี้คือ

$$\begin{cases} x = 18 + 41t \\ y = 29 - 14t \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจาก $x = 18 + 41t > 0$ และ $y = 29 - 14t > 0$ ทำให้ได้ว่า $t = 0, 1, 2$ สรุปได้ว่า

t	0	1	2
x	18	59	100
y	29	15	0

4. เด็กชาย mather ได้เงินค่าขนมจากพ่อ 350 บาท โดยพ่อให้ธนบัตรชนิด 20 บาท และ 50 บาทเท่านั้น ถ้าทราบเพียงว่าเด็กชาย mather มีธนบัตรชนิด 20 บาทมากกว่า 5 ใบ จงหาจำนวนธนบัตรชนิด 50 บาท ที่เป็นไปได้ โดยใช้ความรู้เรื่องสมการไดโอแฟนไทน์

แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนธนบัตรชนิด 20 บาท และ y แทนจำนวนธนบัตรชนิด 50 บาท จะได้ว่า

$$20x + 50y = 350$$

เนื่องจาก $\gcd(20, 50) = 10$ แล้ว $10 \mid 350$ ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม เห็นได้ชัดว่า $x_0 = 0$ และ $y_0 = 7$ เป็นคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้ ดังนั้น

$$x = 5t, \quad y = 7 - 2t \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจาก $5t = x > 5$ ดังนั้น $t > 1$ และ $7 - 2t = y > 0$ ดังนั้น $t < 3.5$ ทำให้ได้ $t = 2, 3$

t	$x = 5t$	$y = 7 - 2t$
2	10	3
3	15	1

สรุปได้ว่าเด็กชาย mather มีธนบัตรชนิด 50 บาท จำนวน 1 หรือ 2 ใบ

5. เด็กหญิง mathy ได้เงินจากแม่ 52 บาท ประกอบด้วยเหรียญชนิด 2 บาทเพียงเหรียญเดียว นอกนั้นเป็นเหรียญชนิด 5 บาทและ 10 บาท จงหาจำนวนเหรียญแต่ละชนิดที่เป็นไปได้ โดยใช้ความรู้เรื่องสมการไดโอแฟนไทน์

แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนเหรียญชนิด 5 บาท และ y แทนจำนวนเหรียญชนิด 10 บาท เนื่องจากมีเหรียญชนิด 2 บาทเพียงเหรียญเดียว ดังนั้น

$$5x + 10y = 50$$

เนื่องจาก $\gcd(5, 10) = 5$ แล้ว $5 \mid 50$ ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม เห็นได้ชัดว่า $x_0 = 0$ และ $y_0 = 5$ เป็นคำตอบเฉพาะรายของสมการนี้ ดังนั้น

$$x = 2t, \quad y = 5 - t \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจาก $2t = x > 0$ ดังนั้น $t > 0$ และ $5 - t = y > 0$ ดังนั้น $t < 5$ ทำให้ได้ $t = 1, 2, 3, 4$

t	$x = 2t$	$y = 5 - t$
1	2	4
2	4	3
3	6	2
4	8	1

สรุปได้ว่าเด็กหญิง mathy มีเหรียญ 4 แบบ
แบบที่ 1 มีเหรียญชนิด 5 บาท จำนวน 2 เหรียญ และเหรียญชนิด 10 บาท จำนวน 4 เหรียญ
แบบที่ 2 มีเหรียญชนิด 5 บาท จำนวน 4 เหรียญ และเหรียญชนิด 10 บาท จำนวน 3 เหรียญ
แบบที่ 3 มีเหรียญชนิด 5 บาท จำนวน 6 เหรียญ และเหรียญชนิด 10 บาท จำนวน 2 เหรียญ
แบบที่ 4 มีเหรียญชนิด 5 บาท จำนวน 8 เหรียญ และเหรียญชนิด 10 บาท จำนวน 1 เหรียญ

6. จงหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $10x + 16y - 4z = 48$

แนวคำตอบ ให้ $\gcd(10, 16, 4) = 2$ เนื่องจาก $2 \mid 48$ ดังนั้นสมการ $10x + 16y - 4z = 48$ มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$16y - 4z = 48 - 10x$$

เนื่องจาก $\gcd(16, 4) = 4$ ดังนั้น $4 \mid (48 - 10x)$ นั่นคือ $10x \equiv 48 \pmod 4$ หรือ $2x \equiv 0 \pmod 4$ ดังนั้น $2x = 4t$ นั่นคือ $x = 2t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 10(2t) + 16y - 4z &= 48 \\ 5t + 4y - z &= 12 \\ 4(y - 3) &= z - 5t \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid (z - 5t)$ ดังนั้น $z - 5t = 4s$ หรือ $z = 5t + 4s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 10(2t) + 16y - 4(5t + 4s) &= 48 \\ 5t + 4y - 5t - 4s &= 12 \\ y &= 3 + s \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $10x + 16y - 4z = 48$ คือ

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 3 + s \\ z &= 5t + 4s \end{cases} \qquad \text{เมื่อ } t, s \in \mathbb{Z}$$

7. จงหาคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ $15x + 16y - 20z = 20$

แนวคำตอบ ให้ $\gcd(15, 16, 20) = 1$ เนื่องจาก $1 \mid 20$ ดังนั้นสมการ $15x + 16y - 20z = 20$ มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$15y - 20z = 20 - 16y$$

เนื่องจาก $\gcd(15, 20) = 5$ ดังนั้น $5 \mid (20 - 16y)$ นั่นคือ $16y \equiv 20 \pmod 5$

$$y \equiv 0 \pmod 5$$

ดังนั้น $y = 5t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 15x - 20z &= 20 - 16(5t) \\ 15x - 20z &= 20 - 80t \\ 3x - 4z &= 4 - 16t \\ 3x &= 4(1 - 4t + z) \end{aligned}$$

ดังนั้น $4 \mid 3x$ เนื่องจาก $\gcd(3, 4) = 1$ จะได้ว่า $4 \mid x$ นั่นคือ $x = 4s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 3(4s) &= 4(1 - 4t + z) \\ 3s &= 1 - 4t + z \\ z &= 4t + 3s + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $15x + 16y - 20z = 20$ คือ

$$\begin{cases} x = 4s \\ y = 5t \\ z = 4t + 3s + 1 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } t, s \in \mathbb{Z}$$

8. นายแก้วเดินทางพร้อมครอบครัวเดินทางกลับบ้านช่วงสงกานต์ ระหว่างทางได้แวะพักที่สถานีบริการน้ำมัน จากนั้นนายแก้วได้ไปร้านสะดวกซื้อโดยได้สินค้ากลับมา 3 ชนิดคือ

น้ำอัดลมชนิดกระป๋อง	ราคากระป๋องละ	15 บาท	มีอย่างน้อย 5 กระป๋อง
น้ำผลไม้ชนิดกล่อง	ราคากล่องละ	25 บาท	มีอย่างน้อย 5 กล่อง
ขนมคบเคี้ยวชนิดถุง	ราคาถุงละ	30 บาท	มีอย่างน้อย 9 ถุง

นายแก้วจ่ายด้วยเงินจำนวน 500 บาทพอดี ถามว่านายแก้วมีสินค้าแต่ละชนิดได้กี่แบบ มีอะไรบ้าง

แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนของน้ำอัดลมชนิดกระป๋อง
y แทนจำนวนน้ำผลไม้ชนิดกล่อง
z แทนจำนวนขนมคบเคี้ยวชนิดถุง
จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์คือ $15x + 25y + 30z = 500$ หรือ

$$3x + 5y + 6z = 100$$

ให้ $\gcd(3, 5, 6) = 1$ เนื่องจาก $1 \mid 100$ ดังนั้นสมการ $3x + 5y + 6z = 100$ มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$3x + 5y = 100 - 6z$$

เนื่องจาก $\gcd(3, 5) = 1$ ดังนั้น $1 \mid (100 - 6z)$ นั่นคือ $6z \equiv 100 \pmod 1$ เห็นได้ชัดว่าคำตอบของสมการสมภาคนี้คือจำนวนเต็มใดก็ได้ ให้ $z = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 100 - 6t \\ 3x + 6t &= 100 - 5y \\ 3(x + 2t) &= 5(20 - y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid 5(20 - y)$ เนื่องจาก $\gcd(3, 5) = 1$ ดังนั้น $3 \mid (20 - y)$ ให้ $20 - y = 3s$ หรือ $y = 20 - 3s$ เมื่อ $s \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3x + 5(20 - 3s) &= 100 - 6t \\ 3x + 100 - 15s &= 100 - 6t \\ x &= 5s - 2t \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $15x + 25y + 30z = 500$ คือ

$$\begin{cases} x &= 5s - 2t \\ y &= 20 - 3s \\ z &= t \end{cases} \qquad \text{เมื่อ } t, s \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจาก $x \geq 5, y \geq 5$ และ $z \geq 10$ ดังนั้น $t \geq 9$ และ $20 - 3s \geq 5$ นั่นคือ $s \leq 5$ และ $5s - 2t \geq 5$ เขียนแจกแจงดังตารางต่อไปนี้

t	s	$x = 5s - 2t$	$y = 20 - 3s$	$z = t$
10	5	5	5	10
9	5	7	5	9

ดังนั้นนายแก้วซื้อสินค้ามาได้ทั้งหมด 2 แบบ เท่านั้นคือ

แบบที่	น้ำอัดลมชนิดกระป๋องจำนวน	น้ำผลไม้ชนิดกล่องจำนวน	ขนมคบเคี้ยวชนิดถุงจำนวน
1	5	5	10
2	7	5	9