คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 13
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมการพีทาโกรัส **สัปดาห์ที่** 15 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน จงแสดงว่า $\gcd(a, c) = 1$

บทพิสูจน์. สมมติ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน นั่นคือ $\gcd(a, b, c) = 1$ ให้ $\gcd(a, c) = d$ สมมติว่ามีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p \mid d$ จะได้ว่า

$$p \mid a \text{ และ } p \mid c \text{ ดังนั้น } p \mid -a^2 \text{ และ } p \mid c^2$$

ฉะนั้น $p \mid (c^2 - a^2)$ แล้ว $p \mid b^2$ นั่นคือ $p \mid b$ ทำให้ได้ว่า $p \mid \gcd(a, b, c)$ หรือ $p \mid 1$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $d = 1$ □

2. ให้ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน จงแสดงว่า $\gcd(b, c) = 1$

บทพิสูจน์. สมมติ $\{a, b, c\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน นั่นคือ $\gcd(a, b, c) = 1$ ให้ $\gcd(b, c) = d$ สมมติว่ามีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p \mid d$ จะได้ว่า

$$p \mid b \text{ และ } p \mid c \text{ ดังนั้น } p \mid -b^2 \text{ และ } p \mid c^2$$

ฉะนั้น $p \mid (c^2 - b^2)$ แล้ว $p \mid a^2$ นั่นคือ $p \mid a$ ทำให้ได้ว่า $p \mid \gcd(a, b, c)$ หรือ $p \mid 1$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $d = 1$ □

3. ในปี ค.ศ. 1920 Leonard Eugene Dickson ได้ให้ผลเฉลยสมการพีทาโกรัส $x^2 + y^2 = z^2$ คือ

$$x = r + s, \quad y = r + t \quad \text{และ} \quad z = r + s + t \quad \text{เมื่อ } r^2 = 2st \text{ โดยที่ } r, s, t \in \mathbb{N}$$

จงแสดงว่า $\{r + s, r + t, r + s + t\}$ โดยที่ $r^2 = 2st$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส
และจงยกตัวอย่างสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐาน (PTT) ที่ได้จากสูตรของ Dickson มาอย่างน้อย 3 ชุด

บทพิสูจน์. ให้ $r, s, t \in \mathbb{N}$ โดยที่ $r^2 = 2st$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(r+s)^2 + (r+t)^2 &= r^2 + 2rs + s^2 + r^2 + 2rt + t^2 \\ &= r^2 + s^2 + t^2 + 2rs + 2rt + 2st \\ &= (r+s+t)^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{r + s, r + t, r + s + t\}$ เป็นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัส เมื่อ $r^2 = 2st$ โดยที่ $r, s, t \in \mathbb{N}$ □

พิจารณาค่าต่าง ๆ ที่สอดคล้องจากตาราง

r	s	t	$r^2 = 2st$	$x = r + s$	$y = r + t$	$z = r + s + t$
1	2	2	4	3	4	5
1	18	6	216	7	24	25
2	9	6	36	8	15	17

4. จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานที่เกิดจากจำนวน 39 และ 40

แนวคำตอบ

กรณี $x = 39$ จะได้ว่า $39 = 1 \cdot 39 = 3 \cdot 13 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$$\begin{array}{rcl|rcl} u-v &=& 1 & u-v &=& 3 \\ u+v &=& 39 & u+v &=& 13 \\ u &=& 20 & u &=& 8 \\ v &=& 19 & v &=& 5 \end{array}$$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
8	5	39	80	89
20	19	39	760	761

กรณี $x = 40$ จะได้ว่า $40 = 2 \cdot 20 = 2(1 \cdot 20) = 2(2 \cdot 10) = 2(4 \cdot 5) = 2uv$ ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
20	1	399	40	401
5	4	9	40	41

5. จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานที่เกิดจากจำนวน 36 และ 45

แนวคำตอบ

กรณี $x = 36$ จะได้ว่า $36 = 2 \cdot 18 = 2(1 \cdot 18) = 2(2 \cdot 9) = 2(3 \cdot 6) = 2uv$ ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
18	1	321	36	325
9	2	77	36	85

กรณี $x = 45$ จะได้ว่า $45 = 1 \cdot 45 = 5 \cdot 9 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$$\begin{array}{rcl|rcl} u-v &=& 1 & u-v &=& 5 \\ u+v &=& 45 & u+v &=& 9 \\ u &=& 23 & u &=& 7 \\ v &=& 22 & v &=& 2 \end{array}$$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
7	2	45	28	89
23	12	45	552	673

6. จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจากจำนวน 100

แนวคำตอบ

กรณี $100 = 2 \cdot 50 = 2(1 \cdot 50) = 2(2 \cdot 25) = 2(5 \cdot 10) = 2uv$

กรณี $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} u - v &= 2 \\ u + v &= 50 \\ u &= 26 \\ v &= 24 \end{aligned}$$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
50	1	2499	100	2501
25	2	621	100	629
10	5	125	100	75
26	24	100	1248	1252

7. จงหาสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสที่เกิดจากจำนวน 144

แนวคำตอบ

กรณี $144 = 2 \cdot 72 = 2(1 \cdot 72) = 2(2 \cdot 36) = 2(3 \cdot 24) = 2(4 \cdot 18) = 2(6 \cdot 12) = 2(8 \cdot 9) = 2uv$

กรณี $144 = 1 \cdot 144 = 2 \cdot 72 = 3 \cdot 48 = 4 \cdot 36 = 6 \cdot 24 = 8 \cdot 18 = 9 \cdot 16 = 12 \cdot 12 = (u-v)(u+v)$ ดังนั้น

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl|rcl} u - v &=& 2 & u - v &=& 4 & u - v &=& 6 & u - v &=& 8 \\ u + v &=& 72 & u + v &=& 36 & u + v &=& 24 & u + v &=& 18 \\ u &=& 37 & u &=& 20 & u &=& 15 & u &=& 13 \\ v &=& 35 & v &=& 16 & v &=& 9 & v &=& 5 \end{array}$$

ดังนั้นสามสิ่งอันดับพีทาโกรัสปฐมฐานคือ

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$
72	1	5183	144	5185
36	2	1292	144	1300
24	3	585	144	603
18	4	308	144	340
12	6	108	144	180
9	8	17	144	145
37	35	144	2590	2594
20	16	144	640	656
15	9	144	270	306
13	5	144	130	194

8. จงแสดงว่า ถ้า $4 \mid (x^2 + y^2 + z^2)$ แล้ว x, y, z เป็นจำนวนคู่

***บทพิสูจน์*.** โดยขั้นตอนการหาร สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ ดังนั้น $a^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod 4$ นั่นคือ

$$a^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$$

ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ สมมติว่า x เป็นจำนวนคี่ (ใน x, y, z มีบางตัวเป็นจำนวนคี่) $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ และ

$$y^2 \equiv 0, 1 \pmod 4 \qquad \text{และ} \qquad z^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$$

ดังนั้น

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1, 2 \pmod 4$$

สรุปได้ว่า $4 \nmid (x^2 + y^2 + z^2)$ $\square$