คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 1
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ระเบียบวิธีพิสูจน์ และอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สัปดาห์ที่ 1 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ m เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$m \text{ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ } m^2+1 \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

บทพิสูจน์. ให้ m เป็นจำนวนเต็ม
($\rightarrow$) สมมติว่า m เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $m = 2k$ ฉะนั้น

$$m^2+1 = (2k)^2+1 = 2(2k^2)+1$$

ดังนั้น m^2+1 เป็นจำนวนคี่
($\leftarrow$) พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ สมมติว่า m เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $m = 2k+1$ ฉะนั้น

$$m^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k^2+4k+1+1 = 2(2k^2+2k+1)$$

ดังนั้น m^2+1 เป็นจำนวนคู่ □

2. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$n^2+5n+6 \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จะพิสูจน์โดยการแบ่งกรณี

กรณี n เป็นจำนวนคู่ นั่นคือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$ จะได้ว่า

$$n^2+5n+6 = (2k)^2+5(2k)+6 = 4k^2+10k+6 = 2(2k^2+5k+3)$$

ดังนั้น n^2+5n+6 เป็นจำนวนคู่

กรณี n เป็นจำนวนคี่ นั่นคือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n^2+5n+6 &= (2k+1)^2+5(2k+1)+6 \\ &= 4k^2+4k+1+10k+5+6 \\ &= 4k^2+14k+12 \\ &= 2(2k^2+7k+6) \end{aligned}$$

ดังนั้น n^2+5n+6 เป็นจำนวนคู่

□

3. จงพิสูจน์ว่าไม่มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k^2 = 2$

บทพิสูจน์. สมมติว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k^2 = 2$ จะได้ว่า k^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น k เป็นจำนวนคู่ นั่นคือมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $k = 2m$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} 4m^2 = (2m)^2 = k^2 &= 2 \\ 2m^2 &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า 1 เป็นจำนวนคู่ เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า 1 เป็นจำนวนคี่ □

4. จงพิสูจน์ว่า ”ทุก ๆ จำนวนเต็ม x ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียวซึ่ง $xy = x$”

แนวคิด เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall x \in \mathbb{Z} - \{0\} \exists! y \in \mathbb{Z},\ xy = x$

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์
ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $y = 1$ จะได้ว่า

$$x(1) = x$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $xy_1 = x$ และ $xy_2 = x$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} xy_1 &= xy_2 \\ xy_1 - xy_2 &= 0 \\ x(y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x \neq 0$ จะได้ว่า $y_1 - y_2 = 0$ หรือ $y_1 = y_2$ □

5. สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $1 \cdot 2 = 2 = 0 + 2 = (1-1)2^2 + 2$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k-1)2^{k+1} + 2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left[1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k\right] + (k+1)2^{k+1} &= (k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1} \\ &= 2^{k+1}[(k-1) + (k+1)] + 2 \\ &= 2^{k+1} \cdot 2k + 2 \\ &= k \cdot 2^{k+2} + 2 \end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

6. สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots + (3n-2)(3n+1) = n(3n^2 + 3n - 2)$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots + (3n-2)(3n+1) = n(3n^2 + 3n - 2)$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $1 \cdot 4 = 1(3+3-2) = 1(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 - 2)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots + (3k-2)(3k+1) = k(3k^2 + 3k - 2)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + &\cdots + (3k-2)(3k+1) + (3k+1)(3k+4) \\
&= k(3k^2 + 3k - 2) + (3k+1)(3k+4) \\
&= k(3(k+1)^2 - 3(k+1) - 2) + (3(k+1)-2)(3(k+1)+1) \\
&= 3k(k+1)^2 - 3k(k+1) - 2k + 9(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 \\
&= 3(k+1-1)(k+1)^2 - 3(k+1-1)(k+1) - 2(k+1) + 2 + 9(k+1)^2 - 3(k+1) - 2 \\
&= 3(k+1)^3 - 3(k+1)^2 - 3(k+1)^2 + 3(k+1) - 2(k+1) + 9(k+1)^2 - 3(k+1) \\
&= 3(k+1)^3 + 3(k+1)^2 - 3(k+1)^2 - 2(k+1) \\
&= (k+1)[3(k+1)^2 + 3(k+1) - 2]
\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots + (3n-2)(3n+1) = n(3n^2 + 3n - 2)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

7. สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$3^n \geq 1 + 2n$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $3^n \geq 1 + 2n$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $3^1 = 3 \geq 3 = 1 + 2 = 1 + 2(1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $3^k \geq 1 + 2k$ ดังนั้น

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(1 + 2k) = 3 + 2(3k)$$

เนื่องจาก $3 > 1$ และ $3k = k + 2k > k + 1$ ดังนั้น

$$3^{k+1} \geq 1 + 2(k + 1)$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$3^n \geq 1 + 2n \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

□

8. จงหาจำนวนเริ่มต้นพร้อมพิสูจน์ข้อความโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$2n - 3 \leq 2^{n-2}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
n = 1 &\quad : 2(1) - 3 = -1 < \tfrac{1}{2} = 2^{1-2} \\
n = 2 &\quad : 2(2) - 3 = 1 \leq 1 = 2^{2-2} \\
n = 3 &\quad : 2(3) - 3 = 3 > 2 = 2^{3-2} \\
n = 4 &\quad : 2(4) - 3 = 5 > 4 = 2^{4-2} \\
n = 5 &\quad : 2(5) - 3 = 7 < 8 = 2^{5-2} \\
n = 6 &\quad : 2(6) - 3 = 9 < 16 = 2^{6-2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ เป็นจริงเมื่อ $n \geq 5$

***บทพิสูจน์*.** ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq 5$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $2n - 3 \leq 2^{n-2}$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $2(6) - 3 = 9 < 16 = 2^{6-2}$ ดังนั้น $P(5)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ โดยที่ $k \geq 5$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $2k - 3 \leq 2^{k-2}$ ดังนั้น

$$2^{(k+1)-2} = 2^{(k-2)+1} = 2 \cdot 2^{k-2} \geq 2(2k - 3) = 2(2k) - 6$$

เนื่องจาก $2 > -3$ และ $2k = k + k \geq k + 5$ เมื่อ $k \geq 5$ ดังนั้น

$$2^{(k+1)-2} \geq 2(k + 5) - 6 = 2(k + 1) + 2 > 2(k + 1) - 3$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$2n - 3 \leq 2^{n-2} \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n \text{ ซึ่ง } n \geq 5$$

□