เฉลย Assignment 2
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ขั้นตอนวิธีการหาร และการหารลงตัว สัปดาห์ที่ 2 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงแสดงว่ากำลังสี่ของจำนวนเต็มใดๆอยู่ในรูป $5k$ หรือ $5k+1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ พิจารณา 5 หาร a โดยขั้นตอนการหาร มีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง $a = 5q + r$ โดยที่ $0 \le r < 5$ นั้นคือ $a = 5q,\ a = 5q + 1\ a = 5q + 2,\ a = 5q + 3$ หรือ $a = 5q + 4$

กรณี $a = 5q$ จะได้ว่า

$$a^4 = (5q)^4 = 5(125)q^4 = 5k$$

เมื่อให้ $k = 125q^4$

กรณี $a = 5q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^4 = (5q+1)^4 &= 5^4q^4 + 4 \cdot 5^3q^3 + 6 \cdot 5^2q^2 + 4 \cdot 5q + 1 \\ &= 5(125q^4 + 100q^3 + 30q^2 + 4q) + 1 \\ &= 5k + 1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $k = 125q^4 + 100q^3 + 30q^2 + 4q$

กรณี $a = 5q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^4 = (5q+2)^4 &= 5^4q^4 + 4 \cdot 5^3q^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2q^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 5q \cdot 2^3 + 16 \\ &= 5(125q^4 + 200q^3 + 120q^2 + 32q + 3) + 1 \\ &= 5k + 1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $k = 125q^4 + 200q^3 + 120q^2 + 32q + 3$

กรณี $a = 5q + 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^4 = (5q+3)^4 &= 5^4q^4 + 4 \cdot 5^3q^3 \cdot 3 + 6 \cdot 5^2q^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 5q \cdot 3^3 + 81 \\ &= 5(125q^4 + 300q^3 + 270q^2 + 108q + 16) + 1 \\ &= 5k + 1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $k = 125q^4 + 300q^3 + 270q^2 + 108q + 16$

กรณี $a = 5q + 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^4 = (5q+4)^4 &= 5^4q^4 + 4 \cdot 5^3q^3 \cdot 4 + 6 \cdot 5^2q^2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5q \cdot 4^3 + 256 \\ &= 5(125q^4 + 400q^3 + 480q^2 + 256q + 51) + 1 \\ &= 5k + 1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $k = 125q^4 + 400q^3 + 480q^2 + 256q + 51$

□

2. จงหาหลักหน่วยของ 2558^{2017}

แนวคำตอบ เนื่องจาก 10 หาร $2558 =$ เหลือเศษเท่ากับ -2 ดังนั้น

10 หาร 2558^{2017}	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร $(-2)^{2017}$

เนื่องจาก

10 หาร $(2)^7 = 128$	เหลือเศษเท่ากับ	-2
10 หาร $(-2)^7 = -128$	เหลือเศษเท่ากับ	2

จะได้ว่า

10 หาร $((-2)^7)^{288}(-2) = (-2)^{2017}$	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร $2^{288}(-2)$
10 หาร $(2^7)^{41} \cdot 2(-2) = 2^{288}(-2)$	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร $(-2)^{41}2(-2) = 2^{43}$
10 หาร $(2^7)^6 \cdot 2 = 2^{43}$	เหลือเศษเท่ากับ	10 หาร $(-2)^6 2 = 128$

นั่นคือ 10 หาร 128 เหลือเศษเท่ากับ 8 ดังนั้น 10 หาร 2558^{2017} เหลือเศษเท่ากับ 8
สรุปได้ว่าหลักหน่วยของ 2558^{2017} คือ 8

3. จงหาเลขสองหลักสุดท้ายของ 13^{33}

แนวคำตอบ เนื่องจาก $13^3 = 2197$ ดังนั้น 100 หาร 13^3 เศษเหลือเท่ากับ -3 จะได้ว่า

$$100 \text{ หาร } 13^{33} = (13^3)^{11} \text{ เศษเหลือเท่ากับ } (-3)^{11}$$

พิจารณา

$$(-3)^{11} = (-3)^5(-3)^6 = (-243)(729)$$

ดังนั้น 100 หาร 13^{33} เศษเหลือเท่ากับ $(-43)(29) = -1247$
นั่นคือ 100 หาร 13^{33} เศษเหลือเท่ากับ -47 จะได้ว่า 100 หาร 13^{33} เศษเหลือเท่ากับ 53
ดังนั้นเลขสองหลักสุดท้ายของ 13^{33} คือ 53 #

4. จงหาจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง 300 เมื่อหารด้วย 6 เหลือเศษ 2 และหารด้วย 14 เหลือเศษ 8

แนวคำตอบ ให้ $x \in \{1, 2, 3, 4, ..., 300\}$ ซึ่งสอดคล้อง

$$x = 6q + 2 \quad \text{เมื่อ } q \in \mathbb{Z} \quad \text{และ} \quad x = 14p + 8 \quad \text{เมื่อ } p \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น $6q + 2 = 14p + 8$ แล้ว $3q + 1 = 7p + 4$ นั่นคือ

$$q = \frac{7p + 3}{3}$$

เลือก $p \in \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ q และ x สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

p	q	x
0	1	8
3	8	50
6	15	92
9	22	134
12	29	176
15	36	218
18	43	260
21	50	302

ดังนั้น $x = 8, 50, 92, 134, 176, 218, 260$ #

5. สำหรับจำนวนเต็ม a, p และ q ใดๆ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า}\quad a \mid (2p-3q) \quad \text{และ} \quad a \mid (4p-5q) \quad \text{แล้ว} \quad a \mid q$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ a, p และ q เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า $a \mid (2p-3q)$ และ $a \mid (4p-5q)$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง

$$\begin{aligned}
2p-3q &= ax \\
4p-5q &= ay \\
\because \qquad (4p-5q)-2(2p-3q) &= ay-2(ax) \\
\therefore \qquad q &= a(y-2x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid q$ □

6. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และจำนวน $3456, 2561$ และ 1308 หารด้วย d มีเศษเหลือเท่ากันคือ r แล้ว $d+r$ เท่ากับเท่าใด

แนวคำตอบ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, z และ r ซึ่ง

$$\begin{aligned}
3456 &= dx+r && (1) \\
2561 &= dy+r && (2) \\
1308 &= dz+r && (3) \\
(1)-(2): \qquad 895 &= d(x-y) \\
(1)-(3): \qquad 2148 &= d(x-z) \\
(2)-(3): \qquad 1253 &= d(y-z)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $d \mid 895$, $d \mid 2148$ และ $d \mid 1253$ เนื่องจาก $895 = 179 \cdot 5$, $2148 = 179 \cdot 12$ และ $1253 = 179 \cdot 7$ ดังนั้น $d = 179$ เนื่องจาก

$$1308 = 7(179) + 55$$

ดังนั้น $r = 55$ สรุปได้ว่า $d + r = 179 + 55 = 234 \quad \#$

7. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid (a^3 - a)$

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $a = 3q$ หรือ $a = 3q+1$ หรือ $a = 3q+2$

กรณี $a = 3q$ จะได้ว่า

$$a^3 - a = (3q)^3 - 3q = 3(9q^3 - q)$$

ดังนั้น $3 \mid (a^3 - a)$

กรณี $a = 3q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (3q+1)^3 - (3q+1) \\ &= 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 - 3q - 1 \\ &= 27q^3 + 27q^2 + 6q \\ &= 3(9q^3 + 9q^2 + 2q) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (a^3 - a)$

กรณี $a = 3q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^3 - a &= (3q+2)^3 - (3q+2) \\ &= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 - 3q - 2 \\ &= 27q^3 + 54q^2 + 33q + 6 \\ &= 3(9q^3 + 18q^2 + 11q + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid (a^3 - a)$

$\square$

8. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid a(2a^2 + 7)$

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $a = 3q$ หรือ $a = 3q+1$ หรือ $a = 3q+2$

- กรณี $a = 3q$ จะได้ว่า

$$a(2a^2 + 7) = (3q)(2(3q)^2 + 7) = 3(18q^3 + 7q)$$

ดังนั้น $3 \mid a(2a^2 + 7)$

- กรณี $a = 3q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(2a^2 + 7) &= (3q+1)(2(3q+1)^2 + 7) \\ &= (3q+1)(2(9q^2 + 6q + 1) + 7) \\ &= (3q+1)(18q^2 + 12q + 9) \\ &= 3(3q+1)(6q^2 + 4q + 3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid a(2a^2 + 7)$

- กรณี $a = 3q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a(2a^2 + 7) &= (3q+2)(2(3q+2)^2 + 7) \\ &= (3q+2)(2(9q^2 + 12q + 4) + 7) \\ &= (3q+2)(18q^2 + 24q + 15) \\ &= 3(3q+2)(6q^2 + 8q + 5) \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid a(2a^2 + 7)$

$\square$

9. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $16 \mid (n^4 + 4n^2 + 11)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = 4q$ หรือ $n = 4q+1$ หรือ $n = 4q+2$ หรือ $n = 4q + 3$ สมมติ n เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า $n = 4q + 1$ หรือ $n = 4q + 3$

กรณี $n = 4q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 11 &= (4q+1)^4 + 4(4q+1)^2 + 11 \\ &= 256q^4 + 256q^3 + 96q^2 + 16q + 1 + 4(16q^2 + 8q + 1) + 11 \\ &= 256q^4 + 256q^3 + 160q^2 + 32q + 16 \\ &= 16(16q^4 + 16q^3 + 10q^2 + 2q + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $16 \mid (n^4 + 4n^2 + 11)$

กรณี $a = 4q + 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 11 &= (4q+3)^4 + 4(4q+3)^2 + 11 \\ &= 256q^4 + 768q^3 + 864q^2 + 432q + 81 + 4(16q^2 + 24q + 9) + 11 \\ &= 256q^4 + 768q^3 + 928q^2 + 528q + 128 \\ &= 16(16q^4 + 48q^3 + 58q^2 + 33q + 8) \end{aligned}$$

ดังนั้น $16 \mid (n^4 + 4n^2 + 11)$

$\square$