คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 3
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมบัติการหารลงตัว และการพิสูจน์การหารลงตัวโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ **สัปดาห์ที่** 3 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(a-1) \mid (a+2)^3$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}(a+2)^3 &= [(a-1)+3]^3\\ &= (a-1)^3 + 9(a-1)^2 + 27(a-1) + 27\end{aligned}$$

นั่นคือ $(a-1) \mid 27$ สรุปได้ว่า $a-1 = 1, 3, 9, 27$ ดังนั้น

$$a = 2, 4, 10, 28 \quad \#$$

2. จงหาจำนวนเต็มบวก a ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(a-3) \mid (a^3-3)$
แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}a^3 - 3 &= [(a-3)+3]^3 - 3\\ &= (a-3)^3 + 9(a-3)^2 + 27(a-3) + 27 - 3\\ &= (a-3)^3 + 9(a-3)^2 + 27(a-3) + 24\end{aligned}$$

นั่นคือ $(a-3) \mid 24$ สรุปได้ว่า $a-3 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ดังนั้น

$$a = 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27 \quad \#$$

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

ข้อความที่หนึ่ง ถ้า $a^2 \mid b$ แล้ว $a \mid b$
ข้อความที่สอง ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^2 \mid b$

แนวคำตอบ ข้อความที่หนึ่ง **เป็นจริง**

บทพิสูจน์. สมมติว่า $a^2 \mid b$ จะได้ว่ามี $c \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $b = a^2c = a(ac)$ ดังนั้น $a \mid b$ $\square$

ข้อความที่สอง **เป็นเท็จ** ยกตัวอย่าง $a = 2$ และ $b = 2$ จะเห็นว่า

$$2 \mid 2 \quad \text{แต่} \quad 2^2 \nmid 2$$

4. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a \neq 0$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{แล้ว} \quad a^n \mid b^n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^n \mid b^n$

ขั้นฐาน : เห็นได้ชัดว่า ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^1 \mid b^1$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั่นคือ ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^k \mid b^k$
สมมติว่า $a \mid b$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า $a^k \mid b^k$ จากทฤษฎีบท 2.2.15 ข้อ 1 จะได้ว่า $a \cdot a^k \mid b \cdot b^k$ นั่นคือ

$$a^{k+1} \mid b^{k+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a^n \mid b^n$ ทุก ๆ จำนวนนับ n $\square$

5. กำหนดให้ a, b, c เป็นเลขโดด และ

$$20ab13c \quad \text{เป็นจำนวนเต็มเจ็ดหลักที่หารด้วย 8 และ 99 ลงตัว}$$

จงหาจำนวนเต็มเจ็ดหลัก $20ab13c$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ เนื่องจาก $99 = 9 \cdot 11$ จะได้ว่า

$$8 \mid 20ab13c \qquad \text{และ} \qquad 9 \mid 20ab13c \qquad \text{และ} \qquad 11 \mid 20ab13c$$

จะได้ว่า $8 \mid 13c$ นั่นคือ $c = 6$
จะได้ว่า $9 \mid (2+0+a+b+1+3+c)$ หรือ

$$9 \mid (12+a+b) \text{ นั่นคือ } a+b = 6, 15$$

จะได้ว่า $11 \mid (c-3+1-b+a-0+2)$ หรือ

$$11 \mid (a-b+6) \text{ นั่นคือ } a-b = -6, 5$$

สมการที่เป็นไปได้คือ $a+b=6$ และ $a-b=-6$ ดังนั้น $a=0, b=6$
สรุปได้ว่าจำนวนเต็มเจ็ดหลักคือ 2,006,136

6. ให้ a เป็นเลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์ ให้ $N = aaa...a$ เป็น**จำนวนเต็มจำนวนคี่หลัก**โดยมีทุกหลักเป็น a

$$\text{เป็นไปได้หรือไม่ที่} \quad 11 \mid N \quad \text{จงอธิบายและให้เหตุผลประกอบ}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $N = aaa...a$ ซึ่งมี a เป็นจำนวนคี่ตัว พิจารณา

$$(+a-a+a-a+\cdots+a-a)+a = a$$

ดังนั้น $11 \mid N$ ก็ต่อเมื่อ $11 \mid a$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก a เป็นเลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์ สรุปได้ว่า $11 \nmid N$

7. กำหนดให้ a, b เป็นเลขโดด และ

$$99ab00 \quad \text{เป็นจำนวนเต็มหกหลักที่หารด้วย 77 ลงตัว}$$

จงหาจำนวน $99ab00$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $77 = 7 \cdot 11$ จะได้ว่า $7 \mid 99ab00$ และ $11 \mid 99ab00$
พิจารณากรณี $11 \mid 99ab00$

$$\text{11 หาร } 0 - 0 + b - a + 9 - 9 = b - a \text{ ลงตัว} \qquad \text{นั่นคือ } 11 \mid (b - a)$$

เนื่องจาก a, b เป็นเลขโดด $(b - a < 9)$ ดังนั้น $b - a = 0$ หรือ $b = a$
พิจารณากรณี $7 \mid 99ab00$

$$\text{7 หาร } 1(0) + 3(0) + 2(b) - 1(a) - 3(9) - 2(9) = 2b - a - 45 = 2b - a - 7(6) - 3 \text{ ลงตัว}$$

ดังนั้น $7 \mid (2b - a - 3)$ จาก $b = a$ จะได้ว่า $2b - a - 3 = 2a - a - 3 = a - 3$ ฉะนั้น

$$7 \mid (a - 3)$$

นั่นคือ $a - 3 = 0, \pm 7, \pm 14, ...$ เนื่องจาก a เป็นเลขโดด จะได้ว่า $a - 3 = 0$ หรือ $a = 3$ เท่านั้น
ดังนั้นจำนวนดังกล่าวมีเพียงจำนวนเดียวคือ 993300 #

8. จงพิสูจน์ว่า $8 \mid (5^{2n} + 7)$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

***บทพิสูจน์*.** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $8 \mid (5^{2n} + 7)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $5^2 + 7 = 32$ และ $8 \mid 32$ ดังนั้น $8 \mid (5^{2(1)} + 7)$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $8 \mid (5^{2k} + 7)$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$5^{2k} + 7 = 8q$$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 5^2 \cdot (5^{2k} + 7) &= 5 \cdot 8q \\ 5^{2k+2} + 175 &= 40q \\ 5^{2(k+1)} + 175 - 168 &= 40q - 168 \\ 5^{2(k+1)} + 7 &= 8(q - 21) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8 \mid (5^{2(k+1)} + 7)$ สรุปได้ว่า $P(k + 1)$ เป็นจริง $\square$

9. จงพิสูจน์ว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$ ดังนั้น $7 \mid (3^{2(1)+1} + 2^{1+2})$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $7 \mid (3^{2k+1} + 2^{k+2})$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$3^{2k+1} + 2^{k+2} = 7q$$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
3^2(3^{2k+1} + 2^{k+2}) &= 3^2 \cdot 7q \\
3^2 \cdot 3^{2k+1} + 3^2 \cdot 2^{k+2} &= 63q \\
3^{2k+2+1} + 9 \cdot 2^{k+2} &= 63q \\
3^{2(k+1)+1} + (7+2) \cdot 2^{k+2} &= 63q \\
3^{2(k+1)+1} + 7 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 2^{k+2} &= 63q \\
3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2} &= 63q - 7 \cdot 2^{k+2} \\
3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} &= 7(9q - 2^{k+2})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $7 \mid (3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2})$ สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \quad \text{สำหรับทุกๆ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

□

10. จงพิสูจน์ว่า $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $4^1 + 15(1) - 1 = 18$ นั่นคือ $9 \mid (4^1 + 15(1) - 1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั้นคือ $9 \mid (4^k + 15k - 1)$
จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $4^k + 15k - 1 = 9x$ หรือ $4^k = 9x - 15k + 1$

$$\begin{aligned}
4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\
&= 4(9x - 15k + 1) + 15k + 14 \\
&= 36x - 60k + 4 + 15k + 14 \\
&= 36x - 45k + 18 \\
&= 9(4x - 5k + 2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $9 \mid (4^{k+1} + 15(k+1) - 1)$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $9 \mid (4^n + 15n - 1)$ สำหรับจำนวนนับ n □