คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 4
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ตัวหารร่วมมาก และสมบัติของตัวหารร่วมมาก **สัปดาห์ที่** 4 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid bc \quad \text{และ} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad a \mid c$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม สมมติ $a \mid bc$ และ $\gcd(a,b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, q ซึ่ง

$$1 = ax + by \qquad \text{และ} \qquad bc = aq$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} c &= (ax+by)c = axc + (bc)y \\ &= axc + (aq)y \\ &= a(xc+qy) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $a \mid c$ □

2. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid c \quad \text{และ} \quad b \mid c \quad \text{โดยที่} \quad \gcd(a,b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad ab \mid c$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม สมมติ $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a,b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, p, q ซึ่ง

$$c = ap, \qquad c = bq \qquad \text{และ} \qquad 1 = ax + by$$

ดังนั้น $c = acx + bcy$ จะได้ว่า

$$c = a(bq)x + b(ap)y = ab(qx+py)$$

ดังนั้น $ab \mid c$ □

3. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ซึ่ง $\gcd(a, b) = 1$ จงพิสูจน์ว่า (โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

$$\gcd(a, b^n) = 1 \text{ สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ สมมติ $\gcd(a, b) = 1$
พิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\gcd(a, b^n) = 1$
ขั้นฐาน โดยสมมติฐานเห็นได้ชัดว่า $P(1)$ เป็นจริง
ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $\gcd(a, b^k) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง $1 = ax + b^k y$
เนื่องจาก $\gcd(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม s, t ซึ่ง $1 = as + bt$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1 &= (ax + b^k y)(as + bt) \\ &= a^2xs + abxt + ab^kys + b^{k+1}yt \\ &= a(axs + bxt + b^kys) + b^{k+1}(yt) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\gcd(a, b^{k+1}) = 1$ ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
สรุปได้ว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $\gcd(a, b^n) = 1$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ □

4. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \gcd(a - b, a + b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad \gcd(a, b) = 1$$

บทพิสูจน์. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม สมมติ $\gcd(a - b, a + b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง

$$1 = (a - b)x + (a + b)y = a(x + y) + b(y - x)$$

ดังนั้น $\gcd(a, b) = 1$ □

5. จงแสดงว่า ไม่มีจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องกับ $x + y = 100$ และ $\gcd(x, y) = 7$

แนวคำตอบ สมมติว่ามี x, y ที่สอดคล้องกับ $x + y = 100$ และ $\gcd(x, y) = 7$ จะได้ว่า

$$7 = \gcd(x, y) = \gcd(x, 100 - x) = \gcd(x, 100)$$

ดังนั้น $7 \mid 100$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ สรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องกับ $x + y = 100$ และ $\gcd(x, y) = 7$

6. จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 มีทั้งหมดกี่จำนวน

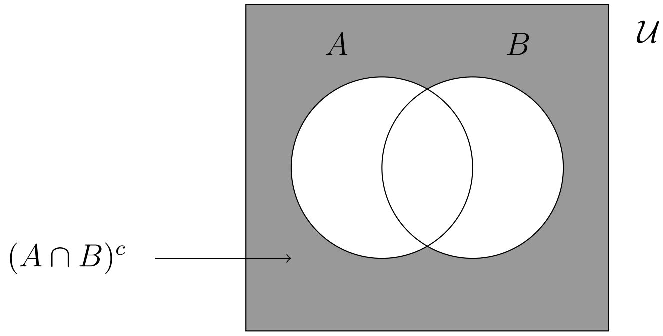
แนวคำตอบ กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ และ

$$G = \{x \in \mathcal{U} \; : \; \gcd(x, 15) = 1\}$$

พิจารณา $15 = 3 \times 5$ เนื่องจาก $\gcd(x, 15) = 1$ ดังนั้น $3 \nmid x$ และ $5 \nmid x$ กำหนดให้

$$A = \{x \in \mathcal{U} \; : \; 3 \mid x\} \qquad \text{และ} \qquad B = \{x \in S \; : \; 5 \mid x\}$$

เห็นได้ชัดว่า $G = (A \cup B)^c$ ซึ่งตรงกับแผนภาพเวนน์–ออยเลอร์ดังรูป



จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= \{0,3,6,9,...,99\} \\ B &= \{0,5,10,15,...,100\} \\ A\cap B &= \{x\in\mathcal{U} : 3 \mid x \text{ และ } 5 \mid x\} = \{0,15,30,45,60,75,90\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $|A| = 34$, $|B| = 21$ และ $|A\cap B| = 7$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |A\cup B| &= |A| + |B| - |A\cap B| \\ &= 34 + 21 - 7 = 48 \end{aligned}$$

นั่นคือ $|G| = |(A\cup B)^c| = |\mathcal{U}| - |A\cup B| = 101 - 48 = 53$
สุปได้ว่า จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 มีทั้งหมด 53 จำนวน

7. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

$$\gcd(n^3+2n, n^4+3n^2+1) = 1$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} \gcd(n^3+2n, n^4+3n^2+1) &= \gcd(n^3+2n, (n^3+2n)(n) + (n^2+1)) \\ &= \gcd(n^3+2n, n^2+1) \\ &= \gcd(n(n^2+1)+n, n^2+1) \\ &= \gcd(n, n^2+1) \\ &= \gcd(n, 1) = 1 \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\gcd(n^3+2n, n^4+3n^2+1) = 1$

8. จงหาตัวหารร่วมมากของ $\gcd(3054, 12378)$ โดยวิธีแบบยุคลิด

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned} \gcd(3054, 12378) &= \gcd(3054, 3054\cdot 4 + 162) \\ &= \gcd(3054, 162) = \gcd(162\cdot 18 + 138, 162) \\ &= \gcd(138, 162) = \gcd(138, 138\cdot 1 + 24) \\ &= \gcd(138, 24) = \gcd(24\cdot 5 + 18, 24) \\ &= \gcd(18, 24) = \gcd(18, 18\cdot 1 + 6) \\ &= \gcd(18, 6) = 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\gcd(3054, 12378) = 6$ #