คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 5
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ขั้นตอนวิธีการหารแบบยุคลิด และตัวคูณร่วมน้อย **สัปดาห์ที่** 5 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $365x + 255y = 5$

แนวคำตอบ พิจารณาสมการ $73x + 51y = 1$

$$\begin{array}{rcrcl|rrrl}
73 & = & 73(1) & + & 51(0) & 73 & 1 & 0 & R_1 \\
51 & = & 73(0) & + & 51(1) & 51 & 0 & 1 & R_2 \\
22 & = & 73(1) & + & 51(-1) & 22 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
7 & = & 73(-2) & + & 51(3) & 7 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\
1 & = & 73(7) & + & 51(-10) & 1 & 7 & -10 & R_5 = R_3 - 3R_4
\end{array}$$

ดังนั้น $73(7) + 51(-10) = 1$ หรือ $356(7) + 255(-10) = 5$ นั่นคือ $x = 7$ และ $y = -10$

2. จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $372x - 320y = 4$

แนวคำตอบ พิจารณาสมการ $93x - 80y = 1$

$$\begin{array}{rcrcl|rrrl}
93 & = & 93(1) & + & 80(0) & 93 & 1 & 0 & R_1 \\
80 & = & 93(0) & + & 80(1) & 80 & 0 & 1 & R_2 \\
13 & = & 93(1) & + & 80(-1) & 13 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
2 & = & 93(-6) & + & 80(7) & 2 & -6 & 7 & R_4 = R_2 - 6R_3 \\
1 & = & 93(37) & + & 80(-43) & 1 & 37 & -43 & R_5 = R_3 - 6R_4
\end{array}$$

ดังนั้น $93(37) - 80(43) = 1$ หรือ $372(37) - 320(43) = 4$ นั่นคือ $x = 37$ และ $y = 43$

3. จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $551x - 331y = 1$

แนวคำตอบ โดยขั้นตอนการหารของยุคลิด

$$\begin{array}{rcrcl|rrrl}
551 & = & 551(1) & + & 331(0) & 551 & 1 & 0 & R_1 \\
331 & = & 551(0) & + & 331(1) & 331 & 0 & 1 & R_2 \\
220 & = & 551(1) & + & 331(-1) & 220 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
111 & = & 551(-1) & + & 331(2) & 111 & -1 & 2 & R_4 = R_2 - R_3 \\
109 & = & 551(2) & + & 331(-3) & 109 & 2 & -3 & R_5 = R_3 - R_4 \\
2 & = & 551(-3) & + & 331(5) & 2 & -3 & 5 & R_6 = R_4 - R_5 \\
1 & = & 551(164) & + & 331(-273) & 1 & 164 & -273 & R_7 = R_5 - 54R_6
\end{array}$$

ดังนั้น $551(164) - 331(273) = 1$ นั่นคือ $x = 164$ และ $y = 273$

4. จงหาจำนวนเต็ม x, y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $443x + 729y = 1$

แนวคำตอบ โดยขั้นตอนการหารของยุคลิด

$$
\begin{array}{rcll|rrrl}
729 & = & 729(1) & +\ 443(0) & 729 & 1 & 0 & R_1 \\
443 & = & 729(0) & +\ 443(1) & 443 & 0 & 1 & R_2 \\
286 & = & 729(1) & +\ 443(-1) & 286 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
157 & = & 729(-1) & +\ 443(2) & 157 & -1 & 2 & R_4 = R_2 - R_3 \\
129 & = & 729(2) & +\ 443(-3) & 129 & 2 & -3 & R_5 = R_3 - R_4 \\
28 & = & 729(-3) & +\ 443(5) & 28 & -3 & 5 & R_6 = R_4 - R_5 \\
17 & = & 729(14) & +\ 443(-23) & 17 & 14 & -23 & R_7 = R_5 - 4R_6 \\
11 & = & 729(-17) & +\ 443(28) & 11 & -17 & 28 & R_8 = R_6 - R_7 \\
6 & = & 729(31) & +\ 443(-51) & 6 & 31 & -51 & R_9 = R_7 - R_8 \\
5 & = & 729(-48) & +\ 443(79) & 5 & -48 & 79 & R_{10} = R_8 - R_9 \\
1 & = & 729(79) & +\ 443(-130) & 1 & 79 & -130 & R_{11} = R_9 - R_{10}
\end{array}
$$

ดังนั้น $x = -130$ และ $y = 79$ #

5. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ จงตรวจสอบว่าข้อความ

$$\text{ถ้า} \quad a \mid b \quad \text{แล้ว} \quad \ell\text{cm}(a, b) = |b|$$

ต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์

เป็นจริง

***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ สมมติว่า $a \mid b$ โดยทฤษฎีบทจะได้ว่า $\gcd(a, b) = |a|$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
\gcd(a, b)\ell\text{cm}(a, b) &= |ab| \\
|a|\ell\text{cm}(a, b) &= |a||b| \\
\ell\text{cm}(a, b) &= |b|
\end{aligned}
$$

□

6. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ จงตรวจสอบว่าข้อความ

$$\text{ถ้า} \quad \ell\text{cm}(a, b) = m \quad \text{แล้ว} \quad \ell\text{cm}(a^2, b^2) = m^2$$

ต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์

เป็นจริง

***บทพิสูจน์*.** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ สมมติว่า $\ell\text{cm}(a, b) = m$ ให้ $d = \text{gcd}(a, b)$ โดยตัวอย่าง 3.1.27 (หน้า 61 พิสูจน์เป็นการบ้าน) จะได้ว่า $\text{gcd}(a^2, b^2) = d^2$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
\gcd(a, b)\ell\text{cm}(a, b) &= |ab| \\
dm &= |ab| \\
m^2 &= \frac{a^2b^2}{d^2} = \frac{a^2b^2}{\text{gcd}(a^2, b^2)} = \ell\text{cm}(a^2, b^2)
\end{aligned}
$$

□

7. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \ell\mathsf{cm}(a,b) \mid c \quad \text{แล้ว} \quad a \mid c \quad \text{และ} \quad b \mid c$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า $\ell\mathsf{cm}(a,b) \mid c$
เนื่องจาก $a \mid \ell\mathsf{cm}(a,b)$ และ $b \mid \ell\mathsf{cm}(a,b)$ (โดยบทนิยาม) โดยสมบัติถ่ายทอด สรุปได้ว่า $a \mid c$ และ $b \mid c$ □

8. ให้ n เป็นจำนวนคู่บวก จงพิสูจน์ว่า $\ell cm(n, n+2) = \frac{1}{2}n(n+2)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนคู่บวก เนื่องจาก

$$\gcd(n, n+2) = \gcd(n, 2) = 2$$

ดังนั้น

$$\ell cm(n, n+2) = \frac{|n(n+2)|}{\gcd(n, n+2)} = \frac{1}{2}n(n+2)$$

□