เฉลย Assignment 6
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ จำนวนเฉพาะ ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต และการค้นหาจำนวนเฉพาะ **สัปดาห์ที่** 6 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \in \mathbb{Z}$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\text{ถ้า } p \mid a^n \text{ แล้ว } p \mid a$$

บทพิสูจน์. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \in \mathbb{Z}$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ ถ้า $p \mid a^n$ แล้ว $p \mid a$
ขั้นฐาน กรณีที่ $n = 1$ เห็นได้ชัด ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่าถ้า $p \mid a^k$ แล้ว $p \mid a$ สมมติว่า $p \mid a^{k+1}$ จะได้ว่า $p \mid a^k \cdot a$
สมมติว่า $p \nmid a$ จะได้ว่า $\gcd(a, p) = 1$ โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า $p \mid a^k$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า $p \mid a$ เกิดข้อขัดแยง ดังนั้น $p \mid a$
นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า ถ้า $p \mid a^n$ แล้ว $p \mid a$ สำหรับจำนวนนับ n

□

2. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \in \mathbb{Z}$ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จงพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

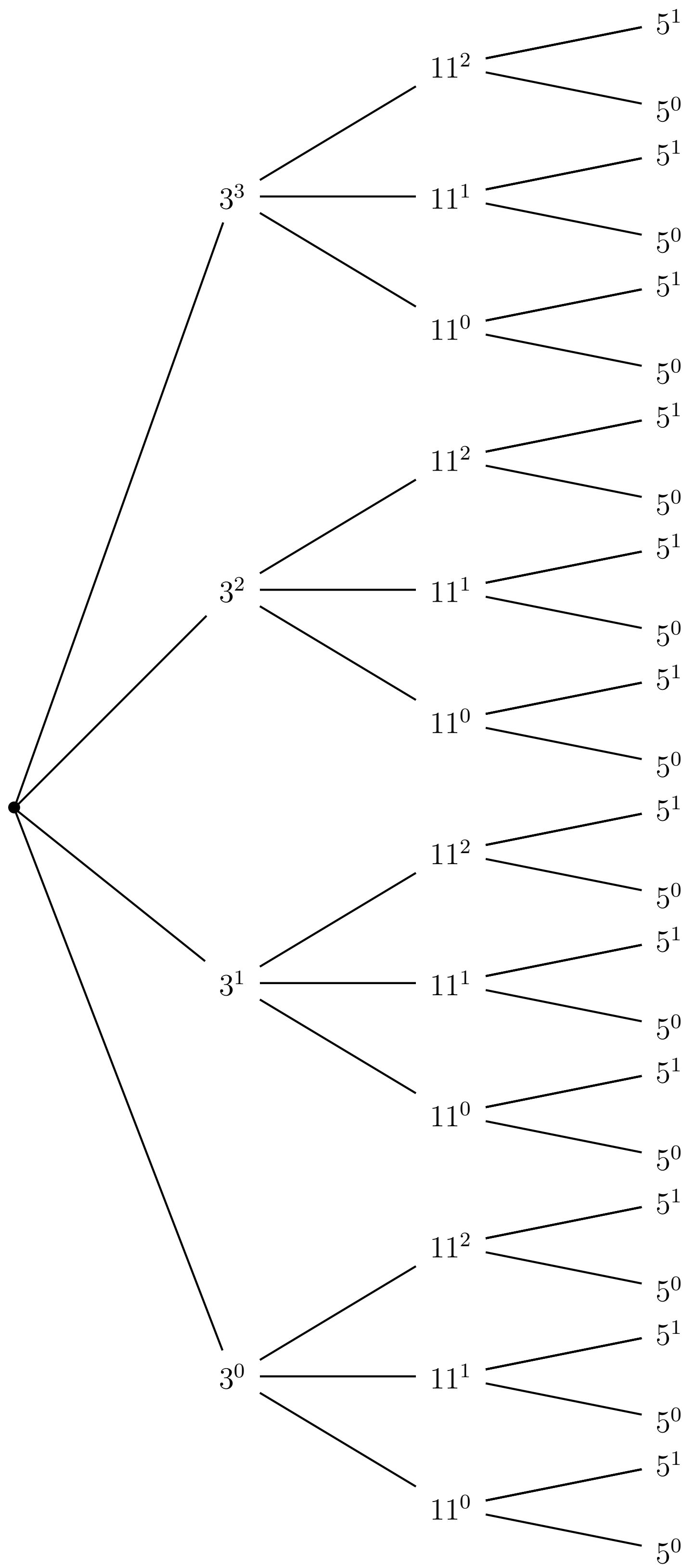
$$\text{ถ้า } p \mid a^n \text{ แล้ว } p^n \mid a^n$$

บทพิสูจน์. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $a \in \mathbb{Z}$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ ถ้า $p \mid a^n$ แล้ว $p^n \mid a^n$
ขั้นฐาน กรณีที่ $n = 1$ เห็นได้ชัด ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่าถ้า $p \mid a^k$ แล้ว $p^k \mid a^k$ สมมติว่า $p \mid a^{k+1}$ จะได้ว่า $p \mid a^k \cdot a$
สมมติว่า $p \nmid a$ จะได้ว่า $\gcd(a, p) = 1$ โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า $p \mid a^k$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า $p \mid a$ เกิดข้อขัดแยง ดังนั้น $p \mid a$
จะได้ว่า $p^{k+1} \mid a^{k+1}$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า ถ้า $p \mid a^n$ แล้ว $p \mid a$ สำหรับจำนวนนับ n

□

3. จงหาตัวหารทั้งหมดของ 16335 โดยใช้แผนภาพต้นไม้

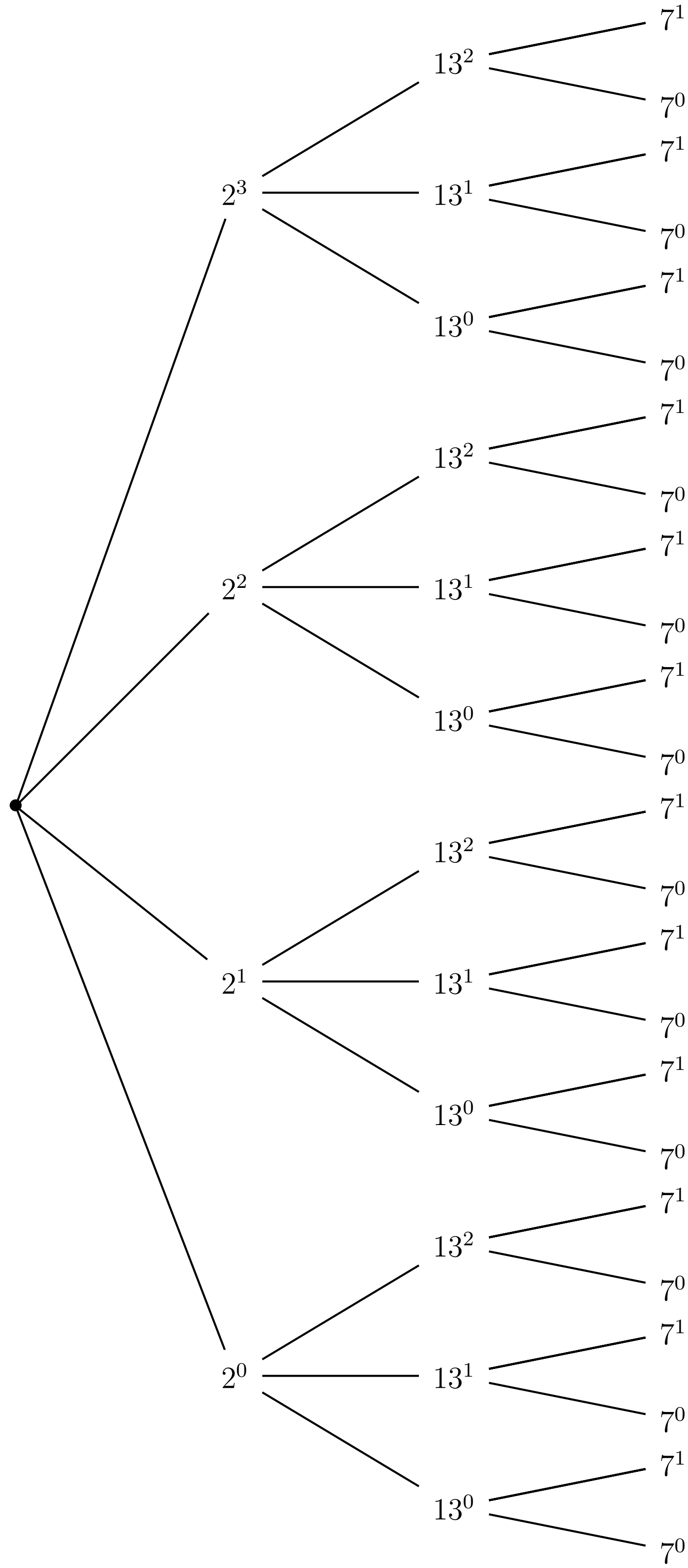
แนวคำตอบ $16335 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2$



ตัวหารทั้งหมดของ 16335 คือ 1, 3, 5, 9, 11, 15, 27, 33, 45, 55, 99, 121, 135, 165, 297, 363, 495, 605, 1089, 1485, 1815, 3267, 5445, 16335

4. จงหาตัวหารทั้งหมดของ 9464 โดยใช้แผนภาพต้นไม้

แนวคำตอบ $9464 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13^2$



ตัวหารทั้งหมดของ 9464 คือ 1, 2, 4, 7, 8, 13, 14, 26, 28, 52, 56, 91, 104, 169, 182, 338, 364, 676, 728, 1183, 1352, 2366, 4732, 9464

5. จงหาจำนวนตัวหารทั้งหมดของ 22!

แนวคำตอบ $22! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22$

2	3	5	7	11	13	17	19
$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$

ดังนั้น $22! = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ จำนวนตัวหารทั้งหมดของ 22! เท่ากับ

$$20 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96000$$

6. จงหาจำนวนตัวหารทั้งหมดของ 23!

แนวคำตอบ $23! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 23$

2	3	5	7	11	13	17	19	23
$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert\vert$	$\vert\vert\vert$	$\vert\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$

ดังนั้น $22! = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ จำนวนตัวหารทั้งหมดของ 22! เท่ากับ

$$20 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192000$$

7. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(p+2) \mid (p^2+4p+59)^2$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$(p^2+4p+59)^2 = [(p+2)^2+55]^2 = (p+2)^2 + 2(p+2)55 + 55^2$$

ดังนั้น $(p+2) \mid 55^2$ นั่นคือ $p+2$ คือตัวหารของ $55^2 = 5^2 \cdot 11^2$ โดยแผนภาพต้นไม้สรุปได้ดังตาราง

$p+2$	p	p เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่
1	–1	ไม่เป็น
5	3	เป็น
11	9	ไม่เป็น $9 = 3 \cdot 3$
55	53	เป็น
25	23	เป็น
121	119	ไม่เป็น $119 = 7 \cdot 17$
275	273	ไม่เป็น $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$
605	603	ไม่เป็น $603 = 3^2 \cdot 67$
3025	3023	เป็น เพราะไม่มีจำนวนเฉพาะ $p < \sqrt{3023}$ ที่ $p \mid 3023$

ดังนั้น p ที่เป็นจำนวนเฉพาะคือ 3, 23, 53, 3023

8. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่สอดคล้อง $(p+2) \mid (p^2+4p+55)^2$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$(p^2+4p+55)^2 = [(p+2)^2+51]^2 = (p+2)^2+2(p+2)51+51^2$$

ดังนั้น $(p+2) \mid 51^2$ นั่นคือ $p+2$ คือตัวหารของ $51^2 = 3^2 \cdot 17^2$ โดยแผนภาพต้นไม้สรุปได้ดังตาราง

$p+2$	p	p เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่
1	-1	ไม่เป็น
3	1	ไม่เป็น
17	15	ไม่เป็น $15 = 3 \cdot 5$
51	49	ไม่เป็น $49 = 7 \cdot 7$
9	7	เป็น
289	287	ไม่เป็น $287 = 7 \cdot 41$
153	151	เป็น เพราะไม่มีจำนวนเฉพาะ $p < \sqrt{151}$ ที่ $p \mid 151$
867	865	ไม่เป็น $865 = 5 \cdot 173$
2601	2599	ไม่เป็น $2599 = 23 \cdot 113$

ดังนั้น p ที่เป็นจำนวนเฉพาะคือ 7 และ 151

9. จงหาจำนวนเฉพาะ 2 ตัวแรกที่อยู่ในรูป

$$n^4+n^2+33 \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

	n^4+n^2+33	ชนิดของจำนวน
$n=1$	$35 = 5 \cdot 7$	จำนวนประกอบ
$n=2$	53	จำนวนเฉพาะ
$n=3$	$123 = 3 \cdot 41$	จำนวนประกอบ
$n=4$	$305 = 5 \cdot 61$	จำนวนประกอบ
$n=5$	683	จำนวนเฉพาะ

พิจารณาจำนวนเฉพาะ $x < \sqrt{683} = 26.13$ นั่นคือ $x = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$
จะเห็นว่า $x \nmid 683$ ทุก ๆ x ดังนั้น 683 เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวแรกที่อยู่ในรูปนี้คือ 53 และ 683 $\quad \#$