เฉลย Assignment 7
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ สมภาค และสมการสมภาคเชิงเส้น **สัปดาห์ที่** 9 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ m, k เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\text{ถ้า} \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{แล้ว} \quad a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\text{ถ้า} \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{แล้ว} \quad a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

ขั้นฐาน กรณีที่ $n = 1$ เห็นได้ชัดว่าข้อความ

$$\text{ถ้า} \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{แล้ว} \quad a^1 \equiv b^1 \pmod{m} \quad \text{เป็นจริง}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \text{แล้ว} \quad a^k \equiv b^k \pmod{m} \quad \text{เป็นจริง}$$

สมมติ $a \equiv b \pmod{m}$ จะได้ว่า $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a &\equiv b \pmod{m} \\ a \cdot a^k &\equiv b \cdot a^k \pmod{m} \\ a^{k+1} &\equiv b^{k+1} \pmod{m} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a^1 \equiv b^1 \pmod{m}$ สำหรับจำนวนนับ n □

2. จงหาเศษที่เกิดจากการหาร 51 หาร 21^{10}

แนวคำตอบ เนื่องจาก $7^2 \equiv -2 \pmod{51}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (7^2)^5 &\equiv (-2)^5 &\pmod{51} \\ 7^{10} &\equiv -32 &\pmod{51} \\ 7^{10} &\equiv 19 &\pmod{51} \end{aligned}$$

จาก $3^{10} \equiv 42 \pmod{51}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 7^{10} \cdot 3^{10} &\equiv 19 \cdot 42 &\pmod{51} \\ 21^{10} &\equiv 798 &\pmod{51} \\ 7^{10} &\equiv 33 &\pmod{51} \end{aligned}$$

ดังนั้น 51 หาร 21^{10} เศษเหลือเท่ากับ 33

3. จงหาเลขโดดสองหลักสุดท้ายของ 13^{100}

แนวคำตอบ เนื่องจาก $13 \equiv 1 \pmod 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 13^{100} &\equiv 1^{100} \pmod 4 \\ 13^{100} &\equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

จาก $13^2 = 169 \equiv -6 \pmod{25}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} (13^2)^4 &\equiv (-6)^4 = 1296 && \pmod{25} \\ 13^8 &\equiv -4 && \pmod{25} \\ (13^8)^5 &\equiv (-4)^5 = -1024 && \pmod{25} \\ 13^{40} &\equiv 1 && \pmod{25} \\ (13^{40})^2 &\equiv 1^2 && \pmod{25} \\ 13^{80} &\equiv 1 && \pmod{25} \\ 13^{80} \cdot 13^8 \cdot 13^8 \cdot 13^2 \cdot 13^2 &\equiv 1 \cdot (-4)(-4)(-6)(-6) && \pmod{25} \\ 13^{100} &\equiv 576 && \pmod{25} \\ 13^{100} &\equiv 1 && \pmod{25} \end{aligned}$$

ดังนั้น $13^{100} \equiv 1 \pmod{4 \cdot 25}$ นั่นคือเลขโดดสองหลักสุดท้ายของ 13^{100} คือ 01

4. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$ โดยใช้สมภาค

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $16 \equiv 5 \pmod{11}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (16)^n &\equiv 5^n && \pmod{11} \\ 2^{4n} &\equiv 5^n && \pmod{11} \\ 2^{4n} \cdot 2^3 &\equiv 5^n \cdot 2^3 && \pmod{11} \\ 2^{4n+3} &\equiv 5^n \cdot 8 && \pmod{11} \end{aligned}$$

จาก $8 \equiv -25 \pmod{11}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 2^{4n+3} &\equiv 5^n \cdot (-25) && \pmod{11} \\ 21^{10} &\equiv 798 && \pmod{11} \\ 2^{4n+3} &\equiv -5^{n+2} && \pmod{11} \end{aligned}$$

ดังนั้น 11 หาร $2^{4n+3} + 5^{n+2}$ ลงตัว $\square$

5. จงแสดงว่า $7^{4n} \equiv 1 + 2400n \pmod{1000}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $7^{4n} \equiv 1 + 2400n \pmod{1000}$ เห็นได้ชัดว่า

$$7^{4(1)} = 2401 \equiv 1 + 2400(1) \pmod{1000}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $7^{4k} \equiv 1 + 2400k \pmod{1000}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 7^{4k} \cdot 7^4 &\equiv 7^4(1 + 2400k) && \pmod{1000} \\ 7^{4k+4} &\equiv 2401(1 + 2400k) && \pmod{1000} \\ 7^{4(k+1)} &\equiv 2401 + 2401 \cdot 2400k && \pmod{1000} \\ &\equiv 2401 + (2400 + 1) \cdot 2400k && \pmod{1000} \\ &\equiv 2401 + 5760000k + 2400k && \pmod{1000} \\ &\equiv (2400 + 1) + 0 + 2400k && \pmod{1000} \\ &\equiv 1 + 2400(k + 1) && \pmod{1000} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า
$7^{4n} \equiv 1 + 2400n \pmod{1000}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n $\square$

6. จงหาคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 75 ของ $55x \equiv 25 \pmod{75}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก gcd$(55, 75) = 5$ และ $5 \mid 25$ ดังนั้น $55x \equiv 25 \pmod{75}$ มีคำตอบ
พิจารณา $11x \equiv 5 \pmod{15}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 121x &\equiv 55 \pmod{15} \\ x &\equiv 10 \pmod{15} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 10 + 15t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4$ เป็นคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 75 นั่นคือ

$$x = 10, 25, 40, 55, 70$$

คำตอบทั่วไปคือ $x = 10 + 15n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

7. จงหาคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 57 ของ $27x \equiv 21 \pmod{57}$
แนวคำตอบ เนื่องจาก gcd$(27, 57) = 3$ และ $3 \mid 21$ ดังนั้น $27x \equiv 21 \pmod{57}$ มีคำตอบ
พิจารณา $9x \equiv 7 \pmod{19}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 18x &\equiv 14 \pmod{19} \\ -x &\equiv -5 \pmod{19} \\ x &\equiv 5 \pmod{19} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 5 + 19t$ เมื่อ $t = 0, 1, 2$ เป็นคำตอบที่ไม่สมภาคกันมอดุโล 57 นั่นคือ

$$x = 5, 24, 43$$

คำตอบทั่วไปคือ $x = 5 + 19n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

8. ณ โรงเรียนแห่งหนึ่ง ครูประจำชั้นให้ แก้ว และกล้า ซึ่งเป็นนักเรียนในห้อง นับเหรียญที่ได้จากการบริจาคเพื่อช่วยเหลือผู้ประสบภัยน้ำท่วมของเพื่อน ๆ ในชั้นเรียน จากการนับพบว่า เมื่อแบ่งเหรียญบาทออกเป็น 35 กอง จะเหลือ 14 เหรียญ

- แก้วกล่าวว่า "จำนวนเหรียญบาท เป็น 15 เท่าของจำนวนเหรียญสิบ"
- กล้ากล่าวว่า "จำนวนเหรียญบาท เป็น 21 เท่าของจำนวนเหรียญสิบ"

ครูประจำชั้นจะตรวจสอบได้อย่างไรว่านักเรียนคนใดกล่าวถูกต้อง
แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนของเหรียญสิบ ดังนั้นจำนวนเหรียญบาทของแก้วเท่ากับ $15x$ และจำนวนเหรียญบาทของกล้าเท่ากับ $21x$ จะได้สมการสมภาคคือ

$$15x \equiv 14 \pmod{35} \qquad \text{และ} \qquad 21x \equiv 14 \pmod{35}$$

เนื่องจาก gcd$(35, 15) = 5$ แต่ $5 \nmid 14$ ดังนั้น $15x \equiv 14 \pmod{35}$ ไม่มีคำตอบ นั่นคือแก้วพูดเท็จ
เนื่องจาก gcd$(35, 21) = 7$ และ $7 \mid 14$ ดังนั้น $21x \equiv 14 \pmod{35}$ มีคำตอบ นั่นคือกล้าพูดจริง
หา x_0 จากสมการ $3x \equiv 2 \pmod{5}$ จะได้ $x_0 = 4$ เนื่องจาก $3(4) \equiv 2 \pmod{5}$ ดังนั้นคำตอบคือ

$$x \equiv 4 + 5t \pmod{35}$$

โดยที่ $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ นั่นคือสมการสมภาคเชิงเส้นจะมีคำตอบคือ

$$x \equiv 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34 \pmod{35}$$

ดังนั้นจำนวนเหรียญสิบและเหรียญบาทที่เป็นไปได้คือ

จำนวนเหรียญสิบ (x)	4	9	14	19	24	29	34
จำนวนเหรียญบาท $(21x)$	84	189	294	399	504	609	714