เฉลย Assignment 8 : ทฤษฎีจำนวน MAC2302

หัวข้อ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 10 ปีการศึกษา 1/2565

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 6x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 15x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 2 \pmod{11} \\ 12x &\equiv 4 \pmod{11} \\ x &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 11x &\equiv 1 \pmod{7} &\longrightarrow&\quad x_1 = 2 \\ 7x &\equiv 1 \pmod{11} &\longrightarrow&\quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 11(2)(3) + 7(-3)(4) = 66 - 84 = -18$ ดังนั้น

$$x \equiv -18 \equiv 59 \pmod{77} \qquad \#$$

2. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 3 \pmod{5} \\ 7x &\equiv 1 \pmod{13} \end{aligned}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 3 \pmod{5} \\ -x &\equiv -2 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} 7x &\equiv 1 \pmod{13} \\ 14x &\equiv 2 \pmod{13} \\ x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{13} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$x \equiv 2 \pmod{65} \qquad \#$$

3. จงหาคำตอบของสมการ $25x \equiv 102 \pmod{357}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $25x \equiv 102 \pmod{357}$ จะสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{array}{rcll} 25x & \equiv & 102 & \pmod{3} \quad \longrightarrow \quad x \equiv 0 \pmod{3} \\ 25x & \equiv & 102 & \pmod{7} \quad \longrightarrow \quad 4x \equiv 4 \pmod{7} \\ 25x & \equiv & 102 & \pmod{17} \quad \longrightarrow \quad 8x \equiv 0 \pmod{17} \end{array}$$

ดังนั้นคำตอบสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & \pmod{7} \\ x & \equiv & 0 & \pmod{51} \end{array}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{array}{rcll} 51x & \equiv & 1 & \pmod{7} \quad \longrightarrow \quad x_1 = -3 \\ 7x & \equiv & 1 & \pmod{51} \quad \longrightarrow \quad x_2 = a \end{array}$$

จะได้ว่า $x_0 = 51(-3)(1) + 7(a)(0) = -153$ ดังนั้น

$$x \equiv -153 \equiv 204 \pmod{357} \quad \#$$

4. จงหาคำตอบของสมการสมภาค $100x \equiv 1 \pmod{403}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $403 = 13 \cdot 31$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $100x \equiv 1 \pmod{403}$ จะสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{array}{rcll} 100x & \equiv & 1 & \pmod{13} \\ 100x & \equiv & 1 & \pmod{31} \\ x & \equiv & 2 & \pmod{7} \end{array}$$

พิจารณา

$$\begin{array}{rcll} 100x & \equiv & 1 & \pmod{13} \\ 9x & \equiv & 1 & \pmod{13} \\ 27x & \equiv & 3 & \pmod{13} \\ x & \equiv & 3 & \pmod{13} \end{array}$$

และ

$$\begin{array}{rcll} 100x & \equiv & 1 & \pmod{31} \\ 7x & \equiv & 1 & \pmod{31} \\ 28x & \equiv & 4 & \pmod{31} \\ -3x & \equiv & 4 & \pmod{31} \\ -30x & \equiv & 40 & \pmod{31} \\ x & \equiv & 9 & \pmod{31} \end{array}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 3 & \pmod{13} \\ x & \equiv & 9 & \pmod{31} \end{array}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{array}{rcll} 31x & \equiv & 1 & \pmod{13} \quad \longrightarrow \quad x_1 = -5 \\ 13x & \equiv & 1 & \pmod{31} \quad \longrightarrow \quad x_2 = 12 \end{array}$$

จะได้ว่า $x_0 = 31(-5)(3) + 13(12)(9) = -465 + 1404 = 939$ ดังนั้น

$$x \equiv 939 \equiv 133 \pmod{403} \quad \#$$

5. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องสมการ $49x \equiv 23 \pmod{55}$

แนวคำตอบ คำตอบของสมการ $49x \equiv 23 \pmod{55}$ จะสอดคล้อระบบสมการ

$$\begin{aligned} 49x &\equiv 23 \pmod{5} \\ 49x &\equiv 23 \pmod{11} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 49x &\equiv 23 \pmod{5} \\ -x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv -3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} 49x &\equiv 23 \pmod{11} \\ 5x &\equiv 1 \pmod{11} \\ 10x &\equiv 2 \pmod{11} \\ -x &\equiv 2 \pmod{11} \\ x &\equiv -2 \pmod{11} \end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการคือ

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv -2 \pmod{11} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 11x &\equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_1 = 1 \\ 5x &\equiv 1 \pmod{11} \longrightarrow x_2 = -2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 11(1)(2) + 5(-2)(-2) = 42$ ดังนั้น $x \equiv 42 \pmod{55}$ สรุปได้ว่าจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องสมการนี้คือ 42 $\#$

6. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} x &\equiv 15 \pmod{21} \\ x &\equiv 3 \pmod{15} \\ x &\equiv 1 \pmod{14} \end{aligned}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(21, 15) = 3$ ซึ่ง $3 \mid (15 - 3)$, $\gcd(21, 14) = 7$ ซึ่ง $7 \mid (15 - 1)$
และ $\gcd(15, 14) = 1$ ซึ่ง $1 \mid (3 - 1)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
จาก $x \equiv 15 \pmod{21}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x \equiv 15 \pmod{3} &\longrightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 15 \pmod{7} &\longrightarrow x \equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 3 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x \equiv 3 \pmod{3} &\longrightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} &\longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{14} \end{aligned}$$

ให้ $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 1, m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 14$ พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 5(14)x &= 70x = x \equiv 1 \pmod{3} \quad \ldots \quad (1) \\ 3(14)x &= 42x = 2x \equiv 1 \pmod{5} \quad \ldots \quad (2) \\ 3(5)x &= 15x = x \equiv 1 \pmod{14} \quad \ldots \quad (3) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_1 = 1, x_2 = -2$ และ $x_3 = 1$ เป็นคำของระบบสมการ (1), (2) และ (3) ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} x_0 &= m_2m_3x_1a_1 + m_1m_3x_2a_2 + m_1m_2x_3a_3 \\ &= 5(14)(1)(0) + 3(14)(-2)(3) + 3(5)(1)(1) \\ &= 0 - 252 + 15 \\ &= -237 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv -237 \equiv 183 \pmod{210}$ นั่นคือ

$$183 + 210t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

7. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 5 & \pmod{22} \\ x & \equiv & 13 & \pmod{10} \\ x & \equiv & 8 & \pmod{15} \end{array}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\gcd(22, 10) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (5 - 13)$, $\gcd(22, 15) = 1$ ซึ่ง $1 \mid (5 - 8)$
และ $\gcd(10, 15) = 5$ ซึ่ง $5 \mid (13 - 8)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
จาก $x \equiv 5 \pmod{22}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{array}{rclll} x & \equiv & 5 & \pmod{2} & \longrightarrow & x & \equiv & 1 & \pmod{2} \\ x & \equiv & 5 & \pmod{11} & \longrightarrow & x & \equiv & 5 & \pmod{11} \end{array}$$

จาก $x \equiv 13 \pmod{10}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{array}{rclll} x & \equiv & 13 & \pmod{2} & \longrightarrow & x & \equiv & 1 & \pmod{2} \\ x & \equiv & 13 & \pmod{5} & \longrightarrow & x & \equiv & 3 & \pmod{5} \end{array}$$

จาก $x \equiv 8 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{array}{rclll} x & \equiv & 8 & \pmod{3} & \longrightarrow & x & \equiv & 2 & \pmod{3} \\ x & \equiv & 8 & \pmod{5} & \longrightarrow & x & \equiv & 3 & \pmod{5} \end{array}$$

เนื่องจากคำของสมการ $x \equiv 3 \pmod{4}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{2}$ ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 1 & \pmod{2} \\ x & \equiv & 2 & \pmod{3} \\ x & \equiv & 3 & \pmod{5} \\ x & \equiv & 5 & \pmod{11} \end{array}$$

ให้ $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 5, m_4 = 11$ พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{array}{rcrcrcrll} 3(5)(11)x & = & 165x & = & x & \equiv & 1 & \pmod{2} & \ldots\ (1) \\ 2(5)(11)x & = & 110x & = & -x & \equiv & 1 & \pmod{3} & \ldots\ (2) \\ 2(3)(11)x & = & 66x & = & x & \equiv & 1 & \pmod{5} & \ldots\ (3) \\ 2(3)(5)x & = & 30x & = & -3x & \equiv & 1 & \pmod{11} & \ldots\ (4) \end{array}$$

จะได้ว่า $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ และ $x_4 = 7$ เป็นคำของระบบสมการ (1), (2), (3) และ (4) ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} x_0 &= m_2m_3m_4x_1a_1 + m_1m_3m_4x_2a_2 + m_1m_2m_4x_3a_3 + m_1m_2m_3x_4a_4 \\ &= 3(5)(11)(1)(1) + 2(5)(11)(-1)(2) + 2(3)(11)(1)(3) + 2(3)(5)(7)(5) \\ &= 165 - 220 + 198 + 1050 \\ &= 1193 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 1193 \equiv 203 \pmod{330}$ นั่นคือ

$$203 + 330t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

8. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด เมื่อ

หารด้วย $10, 14$ และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 3, 5 และ 13 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv 5 \pmod{14} \\ x &\equiv 13 \pmod{20} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gcd(10, 14) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (3-5)$, $\gcd(10, 20) = 10$ ซึ่ง $10 \mid (3-13)$
และ $\gcd(14, 20) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (5-13)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ
จาก $x \equiv 3 \pmod{10}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 5 \pmod{14}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 5 \pmod{7} \longrightarrow x \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 13 \pmod{20}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 13 \pmod{4} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 13 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

เนื่องจากทุกคำคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{4}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{2}$ ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned} 5(7)x &= 35x = -x \equiv 1 \pmod{4} \longrightarrow x_1 = -1 \\ 4(7)x &= 28x = -2x \equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_2 = 2 \\ 4(5)x &= 20x = -x \equiv 1 \pmod{7} \longrightarrow x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 5(7)(-1)(1) + 4(7)(2)(3) + 4(5)(-1)(5) \\ &= -35 + 168 - 100 \\ &= 33 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 33 \pmod{140}$ ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดเมื่อ หารด้วย $10, 14$ และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 3, 5 และ 13 ตามลำดับ เท่ากับ 33 #