คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 9
MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ระบบส่วนตกค้างลดทอน **สัปดาห์ที่** 11 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 17 หาร $2^{1000000}$
   แนวคำตอบ เนื่องจาก 17 เป็นจำนวนเฉพาะและ $17 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (2^{16})^{62500} &\equiv 1^{62500} \pmod{17} \\ 2^{1000000} &\equiv 1 \pmod{17} \end{aligned}$$

   ดังนั้น 17 หาร $2^{1000000}$ เศษเหลือเท่ากับ 1 #

2. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 17 หาร $11^{3200000}$
   แนวคำตอบ เนื่องจาก 17 เป็นจำนวนเฉพาะและ $17 \nmid 11$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $11^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (11^{16})^{200000} &\equiv 1^{200000} \pmod{17} \\ 11^{3200000} &\equiv 1 \pmod{17} \end{aligned}$$

   ดังนั้น 17 หาร $11^{3200000}$ เศษเหลือเท่ากับ 1 #

3. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $(77^{70} - 70^{77})^{77}$ ด้วย 71

   แนวคำตอบ เนื่องจาก 71 เป็นจำนวนเฉพาะและ $71 \nmid 77$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า

$$77^{70} \equiv 1 \pmod{71}$$

   เนื่องจาก $70 \equiv -1 \pmod{71}$ จะได้ว่า

$$70^{77} \equiv (-1)^{77} = -1 \pmod{71}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned} 77^{70} - 70^{77} &\equiv 1-(-1) = 2 \pmod{71} \\ (77^{70} - 70^{77})^{77} &\equiv 2^{77} \pmod{71} \end{aligned}$$

   เนื่องจาก 71 เป็นจำนวนเฉพาะและ $71 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $2^{70} \equiv 1 \pmod{71}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2^{70} \cdot 2^{7} &\equiv 1 \cdot 2^{7} \pmod{71} \\ 2^{77} &\equiv 128 \pmod{71} \\ &\equiv 57 \pmod{71} \end{aligned}$$

   สรุปได้ว่า เศษเหลือที่เกิดจากการหาร $(77^{70} - 70^{77})^{77}$ ด้วย 71 เท่ากับ 57 #

4. จงแสดงว่า 561 หาร $2^{561}-2$ ลงตัว

แนวคำตอบ เนื่องจาก $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$
เนื่องจาก 3 เป็นจำนวนเฉพาะและ $3 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $2^2 \equiv 1 \pmod 3$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (2^2)^{280} \cdot 2 &\equiv 1^{280} \cdot 2 \pmod 3 \\ 2^{561} &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก 11 เป็นจำนวนเฉพาะและ $11 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (2^{10})^{56} \cdot 2 &\equiv 1^{56} \cdot 2 \pmod{11} \\ 2^{561} &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

เนื่องจาก 17 เป็นจำนวนเฉพาะและ $17 \nmid 2$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (2^{16})^{35} \cdot 2 &\equiv 1^{35} \cdot 2 \pmod{17} \\ 2^{561} &\equiv 2 \pmod{17} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\gcd(3,11) = 1$, $\gcd(3,17) = 1$ และ $\gcd(11,17) = 1$ สรุปได้ว่า

$$2^{561} \equiv 2 \pmod{561}$$

หรือ 561 หาร $2^{561}-2$ ลงตัว

5. จงแสดงว่า 561 หาร $5^{561}-5$ ลงตัว

แนวคำตอบ เนื่องจาก $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$
เนื่องจาก 3 เป็นจำนวนเฉพาะและ $3 \nmid 5$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $5^2 \equiv 1 \pmod 3$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (5^2)^{280} \cdot 5 &\equiv 1^{280} \cdot 5 \pmod 3 \\ 5^{561} &\equiv 5 \pmod 3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก 11 เป็นจำนวนเฉพาะและ $11 \nmid 5$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (5^{10})^{56} \cdot 5 &\equiv 1^{56} \cdot 5 \pmod{11} \\ 5^{561} &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

เนื่องจาก 17 เป็นจำนวนเฉพาะและ $17 \nmid 5$ โดยทฤษฎีของแฟร์มาต์จะได้ว่า $5^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} (5^{16})^{35} \cdot 5 &\equiv 1^{35} \cdot 5 \pmod{17} \\ 5^{561} &\equiv 5 \pmod{17} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\gcd(3,11) = 1$, $\gcd(3,17) = 1$ และ $\gcd(11,17) = 1$ สรุปได้ว่า

$$5^{561} \equiv 5 \pmod{561}$$

หรือ 561 หาร $5^{561}-5$ ลงตัว

6. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 29 หาร $3(26!)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก 29 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสันจะได้ว่า $28! \equiv -1 \pmod{29}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 28 \cdot 27 \cdot 26! &\equiv -1 \pmod{29} \\ (-1)(-2) \cdot 26! &\equiv -1 \pmod{29} \\ 2 \cdot 26! &\equiv -1 \pmod{29} \\ 32 \cdot 26! &\equiv -16 \pmod{29} \\ 3 \cdot 26! &\equiv 13 \pmod{29} \end{aligned}$$

ดังนั้น 29 หาร $3(26!)$ เศษเหลือเท่ากับ 13 #

7. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 31 หาร 3(29!)

แนวคำตอบ เนื่องจาก 31 เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีของวิลสันจะได้ว่า $30! \equiv -1 \pmod{31}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 30 \cdot 29! &\equiv -1 && \pmod{31} \\ (-1) \cdot 29! &\equiv -1 && \pmod{31} \\ 29! &\equiv 1 && \pmod{31} \\ 3 \cdot 29! &\equiv 3 && \pmod{31} \end{aligned}$$

ดังนั้น 31 หาร 3(29!) เศษเหลือเท่ากับ 3 #

8. จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $30! + 29! + 28! + 27!$ ด้วย 31

แนวคำตอบ โดยทฤษฎีของวิลสัน

$$\begin{aligned} 30! &\equiv -1 && \pmod{31} \\ 30 \cdot 29! &\equiv -1 && \pmod{31} \\ (-1) \cdot 29! &\equiv -1 && \pmod{31} \\ 29! &\equiv 1 && \pmod{31} \\ 29 \cdot 28! &\equiv 1 && \pmod{31} \\ (-2) \cdot 28! &\equiv 1 && \pmod{31} \\ -30 \cdot 28! &\equiv -15 && \pmod{31} \\ 28! &\equiv 15 && \pmod{31} \\ 28 \cdot 27! &\equiv 15 && \pmod{31} \\ (-3) \cdot 27! &\equiv 15 && \pmod{31} \\ 27! &\equiv -5 && \pmod{31} \\ \therefore \quad 30! + 29! + 28! + 27! &\equiv -1 + 1 + 15 - 5 && \pmod{31} \\ &\equiv 10 && \pmod{31} \end{aligned}$$