เฉลย Quiz 1 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และขั้นตอนวิธีการหาร **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

เวลา สัปดาห์ที่ 3 ปีการศึกษา 2/2566

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\dfrac{1}{4\cdot 1^2-1}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\cdots+\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4(k+1)^2-1}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}\\&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{1}{2k+1}\left[k+\frac{1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{k(2k+3)+1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2k^2+3k+1}{2k+3}\right]\\&=\frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k+1)(k+1)}{2k+3}\right]\\&=\frac{k+1}{2(k+1)+1}\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{4\cdot 1^2-1}+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}+\frac{1}{4\cdot 3^2-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

2. **(5 คะแนน)** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $3 \mid n(n^4-1)$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $n = 3q$ หรือ $n = 3q+1$ หรือ $n = 3q+2$

กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n^4-1) = 3q[(3q)^4 - 1] = 3[q(81q^4 - 1)]$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

กรณี $n = 3q+1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^4-1) &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= (3q+1)[(3q+1)^2-1][(3q+1)^2+1] \\ &= (3q+1)[9q^2+6q+1-1][9q^2+6q+1+1] \\ &= (3q+1)[9q^2+6q][9q^2+6q+2] \\ &= (3q+1)3(3q^2+2q)(9q^2+6q+2) \\ &= 3\left[(3q+1)(3q^2+2q)(9q^2+6q+2)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

กรณี $n = 3q+2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n^4-1) &= n(n^2-1)(n^2+1) \\ &= (3q+2)[(3q+2)^2-1][(3q+2)^2+1] \\ &= (3q+2)[9q^2+12q+4-1][9q^2+12q+4+1] \\ &= (3q+2)[9q^2+12q+3][9q^2+12q+5] \\ &= (3q+2)3(3q^2+4q+1)(9q^2+12q+5) \\ &= 3\left[(3q+2)(3q^2+4q+1)(9q^2+12q+5)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n^4-1)$

$\square$