



คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 2 : ทฤษฎีจำนวน MAI1305

หัวข้อ พิสูจน์การหารลงตัวโดยอุปนัย และสมบัติเชิงเส้นของ ท.ร.ม. คะแนนเต็ม 10 คะแนน
เวลา สัปดาห์ที่ 5 ปีการศึกษา 2/2566
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนชัย จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา.....หมู่เรียน.....

1. (5 คะแนน) จงพิสูจน์ว่า

$$12 \mid (7^{2n} - 1) \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $12 \mid (7^{2n} - 1)$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $7^{2 \cdot 1} - 1 = 48 = 12 \cdot 4$ นั่นคือ $12 \mid (7^2 - 1)$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $12 \mid (7^{2k} - 1)$ จะได้ว่ามี $x \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง

$$7^{2k} - 1 = 12x \quad \text{หรือ} \quad 7^{2k} = 12x + 1$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 7^{2(k+1)} - 1 &= 7^{2k+2} - 1 = 7^2 \cdot 7^{2k} - 1 \\ &= 49(12x + 1) - 1 \\ &= 49 \cdot 12x + 49 - 1 = 49 \cdot 12x + 48 \\ &= 12(49x + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $12 \mid (7^{2(k+1)} - 1)$ ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

.สรุปได้ว่า $12 \mid (7^{2n} - 1)$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ □

2. (5 คะแนน) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \mid b \text{ และ } \gcd(a, b) = 1 \text{ แล้ว } a = \pm 1$$

บทพิสูจน์. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

สมมติว่า $a \mid b$ และ $\gcd(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y, k ซึ่ง

$$1 = ax + by \quad \text{และ} \quad b = ak$$

ฉะนั้น

$$1 = ax + (ak)y = a(x + ky)$$

จะได้ว่า $a \mid 1$ ดังนั้น $a = \pm 1$ □