คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 1
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ลิมิต และลิมิตด้านเดียว **สัปดาห์ที่** 1 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **แนวคำตอบ**

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-2x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-2}{x-1} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \#$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^3-x} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x(x-1)} = \frac{1+1+1}{-1(-2)} = \frac{3}{2} \quad \#\end{aligned}$$

2. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2})^2-1^2} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-2)-1} \\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3}(\sqrt{x-2}+1) = 1+1 = 2 \quad \#\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{2x-1}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1+\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}^2-1^2)(1+\sqrt{2x-1})}{(1^2-(\sqrt{2x-1})^2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{2x-1})}{(1-(2x-1))(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{2x-1})}{(2-2x)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{2x-1})}{-2(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{2x-1})}{(-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1+1}{-2(2)} = -\frac{1}{2} \quad \#\end{aligned}$$

3. **แนวคำตอบ**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}{(x+1)-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]\\
&= 1+1+1=3 \quad \#
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x+2}}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x+2}}{x+1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2}+(\sqrt[3]{x+2})^2}{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2}+(\sqrt[3]{x+2})^2}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{(2x+1)+(x+2)}{(x+1)[(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2}+(\sqrt[3]{x+2})^2]}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{3(x+1)}{(x+1)[(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2}+(\sqrt[3]{x+2})^2]}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{3}{(\sqrt[3]{2x+1})^2-\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{x+2}+(\sqrt[3]{x+2})^2}\\
&= \frac{3}{1-(1)(-1)+1}=1 \quad \#
\end{aligned}
$$

4. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{ถ้า } |x|\geq 1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ถ้า } |x|<1\end{cases}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\\
\lim_{x\to 1^+}f(x) &= \lim_{x\to 1^-}x^2+1=2
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 1}f(x)=2 \quad \#$

และพิจารณา

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-}f(x) &= \lim_{x\to -1^-}x^2+1=2\\
\lim_{x\to -1^+}f(x) &= \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{-2}=0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to -1}f(x)$ ไม่มีลิมิต $\quad \#$

5. **การมีลิมิต** : กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-a^4}{x-a} & \text{ถ้า } x>a\\[2ex] 4x^2+x-1 & \text{ถ้า } x<a\end{cases}$$

ถ้า f มีลิมิตที่ $x=a$ จงหาค่า a ที่เป็นไปได้

แนวคำตอบ เนื่องจาก f มีลิมิตที่ $x=a$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^-} f(x) &= \lim_{x\to a^+} f(x)\\ \lim_{x\to a^-}(4x^2+x-1) &= \lim_{x\to a^+}\frac{x^4-a^4}{x-a}\\ 4a^2+a-1 &= \lim_{x\to a^+}\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a^+}(x+a)(x^2+a^2)=(2a)(2a^2)=4a^3\\ 0 &= 4a^3-4a^2-a+1\\ &= 4a^2(a-1)-(a-1)=(a-1)(4a^2-1)\\ &= (a-1)(2a-1)(2a+1)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $a=1,\pm\frac{1}{2}$ #

6. **แนวคำตอบ** เมื่อ x ใกล้ ๆ 4 จะได้ว่า $x+1>0$ ดังนั้น $|x+1|=x+1$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to 4}\frac{|x+1|-5}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+1)-5}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \quad \#$$

พิจารณา

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-2x-3|}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{|(x+1)(x-3)|}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{|x+1||x-3|}{x+1}$$

เมื่อ x ใกล้ ๆ -1 ทางขวา (เช่น $x=-0.9$)
จะได้ว่า $x+1>0$ และ $x-3<0$ ดังนั้น $|x+1|=x+1$ และ $|x-3|=-(x-3)=3-x$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x^2-2x-3|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(3-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}(3-x)=4$$

เมื่อ x ใกล้ ๆ -1 ทางซ้าย (เช่น $x=-1.1$)
จะได้ว่า $x+1<0$ และ $x-3<0$ ดังนั้น $|x+1|=-(x+1)$ และ $|x-3|=-(x-3)=3-x$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x^2-2x-3|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x+1)(3-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}-(3-x)=-4$$

จะเห็นว่าลิมิตทั้งสองด้านไม่เท่ากัน สรุปได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-2x-3|}{x+1}$ ไม่มีลิมิต #

7. **แนวคำตอบ** เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-x}$ มีค่า และ $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^2-x=0$ จะได้ว่าลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ นั่นคือ

$$0=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}x^2+ax+b=1+a+b=f(1)$$

หรือกล่าวได้ว่า $f(1)=0$ จะได้ว่า $f(x)=(x-1)(x+c)$ สำหรับบางจำนวนจริง c พิจารณา

$$5=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+c)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+c}{x}=1+c$$

นั่นคือ $c=4$ ทำให้ได้ว่า $f(x)=(x-1)(x+4)$ ดังนั้น $f(4)=(3)(8)=24$ #