คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 2
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ลิมิตตรีโกณมิติ ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ และความต่อเนื่อง **สัปดาห์ที่** 2 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{1-\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\cos x)}{1^2-\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2(1+\cos x) = 2(1+1) = 4 \qquad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cot^3 x-1)(\csc^2 x)}{1+\cos 2x-2\sin^2 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}-1)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{1+(2\cos^2 x-1)-2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^3 x-\sin^3 x)\cdot\frac{1}{\sin^5 x}}{2\cos^2 x-2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)\sin^5 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x}{2(\cos x+\sin x)\sin^5 x} \\
&= \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})^5} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2(\frac{2}{\sqrt{2}})(\frac{1}{4\sqrt{2}})} \\
&= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}$$

2. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\sin 2x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 3(1)\cdot\frac{1}{1}-2\cdot 1 = 1 \qquad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\\ &= 1^3\cdot\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$-1\le\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le 1 \qquad \text{ทุก ๆ } x\neq 0$$

จะได้ว่า $x^4>0$ เมื่อ $x\neq 0$ ดังนั้น

$$-x^4\le x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)\le x^4$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0}-x^4=0=\lim\limits_{x\to 0}x^4$ โดยทฤษฎีบทประกบ (Squeez theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0 \quad \#$$

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

แนวคำตอบ พิจารณา $x>0$ จะได้ว่า $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ เนื่องจาก $x>0$ ดังนั้น

$$-x\le x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

และพิจารณา $x<0$ จะได้ว่า $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ เนื่องจาก $x<0$ ดังนั้น

$$x\le x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le -x$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}-x=0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

4. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)^2+(x+2)^2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1+4x^2+4x+1}{x^2-2x+1+x^2+4x+4}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+6x+2}{2x^2+2x+2}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\\ &= \frac{5+0+0}{2+0+0}=\frac{5}{2} \quad \#\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^5(2x-1)^3}{(3-2x)^2(x^2-1)^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{[x(1+\frac{1}{x})]^5[x(2-\frac{1}{x})]^3}{[x(\frac{3}{x}-2)]^2[x^2(1-\frac{1}{x^2})]^3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^5[1+\frac{1}{x}]^5x^3[2-\frac{1}{x}]^3}{x^2[\frac{3}{x}-2]^2x^6[1-\frac{1}{x^2}]^3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{[1+\frac{1}{x}]^5[2-\frac{1}{x}]^3}{[\frac{3}{x}-2]^2[1-\frac{1}{x^2}]^3}\\ &= \frac{(1+0)^5(2-0)^3}{(0-2)^2(1-0)^3}=2 \quad \#\end{aligned}$$

5. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3+1}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}} = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{1-x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3}{\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+0}+3}{0-\sqrt[3]{1+0}} = \frac{2+3}{0-1} = -5 \quad \#\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3+1}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{1-x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3}{\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{4+0}+3}{0-\sqrt[3]{1+0}} = \frac{-2+3}{0-1} = -1 \quad \#\end{aligned}$$

6. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&= \frac{1+0}{(\sqrt{1+0+0}+1)} = \frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x) &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&= \frac{1+0}{-(\sqrt{1+0+0}+1)} = -\frac{1}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

7. **แนวคำตอบ** ให้ $x > 0$ จะได้ว่า $\frac{1}{x} > 0$ และ

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{5x}\right) \leq 1$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

โดยทฤษฎีบทประกบ สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{x} = 0$

ทฤษฎีบท 2.4.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{5x}\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{5}\cdot 5x\sin\left(\frac{1}{5x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{5}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{\frac{1}{5x}} \\
&= \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5} \quad \#
\end{aligned}$$

8. **แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(\cot x - \csc x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x - 1}{\sin x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\cos x + 1} \\
&= \frac{0}{1+1} = 0 \quad \#
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-3x+x^2}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-x+2-1}{(x-1)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-2)} = 1 \quad \#
\end{aligned}$$

9. (ก) นำเงื่อนไขความต่อเนื่องอธิบายการหาค่า a, b ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x^2 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ b + ax & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ 2ax + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ -1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} f(x) \\ \lim_{x\to -1^-} a + 2x^2 &= \lim_{x\to -1^+} b + ax \\ a + 2 &= b - a \\ 2a - b &= -2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) \\ \lim_{x\to 1^-} b + ax &= \lim_{x\to 1^+} 2ax + 1 \\ b + a &= 2a + 1 \\ b - a &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -1, b = 0 \quad \#$

(ข) จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เนื่องจาก $-1 \leq \cos x \leq 1$ ดังนั้น $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ จะเห็นว่า $(1 + \cos x) > 0$ นั่นคือ $\cos x \neq -1$ หรือ $x \neq (2n-1)\pi$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ สรุปได้ว่าโดเมนของ $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เท่ากับ

$$\mathbb{R} - \{(2n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$