คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 3
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ นิยามอนุพันธ์ กฎของอนุพันธ์ และกฎลูกโซ่ **สัปดาห์ที่** 3 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหา $f'(x)$ โดยใช้บทนิยาม เมื่อ $f(x) = \sqrt{x+1}$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \#
\end{aligned}$$

2. จงตรวจสอบว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ หรือไม่ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

แนวคำตอบ พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

สำหรับ $x \neq 0$ จะเห็นว่า

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

ถ้า $x > 0$ แล้ว

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ถ้า $x < 0$ แล้ว

$$-x \geq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ดังนั้น $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \#$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{โดยที่ } g(x) \neq 0$$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x+h)} + \frac{f(x)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)}{g(x)g(x+h)}\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \square
\end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2562)$ จงหา $\dfrac{f'(1)}{f'(2)}$

แนวคำตอบ โดยการประยุกต์กฎการคูณของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(x) = \quad & (x-1)'(x-2)(x-3)\cdots(x-2564) \\
& + (x-1)(x-2)'(x-3)\cdots(x-2564) + \\
& + (x-1)(x-2)(x-3)'\cdots(x-2564) + \\
& \quad \vdots \\
& + (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2564)' \\
f'(x) = \quad & (1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-2564) \\
& + (x-1)(1)(x-3)(x-4)\cdots(x-2564) + \\
& + (x-1)(x-2)(1)(x-4)\cdots(x-2564) + \\
& \quad \vdots \\
& + (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2563)(1)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f'(1) &= (-1)(-2)(-3)\cdots(-2563) \\
f'(2) &= (1)(-1)(-2)\cdots(-2562)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{f'(1)}{f'(2)} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-2563)}{(1)(-1)(-2)\cdots(-2562)} = -2563 \qquad \#$$

5. จงหา $a > 0$ ที่ทำให้เส้นตรง $5x + y = 9$ ผัสเส้นโค้ง $f(x) = 2x^2 + ax - 1$
แนวคำตอบ จะเห็นได้ว่าเส้นตรง $5x + y = -9$ มีความชันเท่ากับ -5 และ $f'(x) = 4x + a$
ดังนั้นเส้นสัมผัส $5x + y = 9$ สัมผัสเส้นโค้งนี้เมื่อ x สอดคล้องสมการ

$$-5 = f'(x) = 4x + a \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \frac{-5-a}{4}$$

เนื่องจาก x สอดคล้องสมการในการหาจุดตัดของ $y = -5x - 9$ และ $y = 2x^2 + ax - 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
-5x - 9 &= 2x^2 + ax - 1 \\
-5\left(\frac{-5-a}{4}\right) - 9 &= 2\left(\frac{-5-a}{4}\right)^2 + a\left(\frac{-5-a}{4}\right) - 1 \\
\frac{25+5a}{4} &= 2\left(\frac{25+10a+a^2}{16}\right) + \left(\frac{-5a-a^2}{4}\right) + 8 \\
\frac{25+5a}{4} &= \left(\frac{25+10a+a^2}{8}\right) + \left(\frac{-5a-a^2}{4}\right) + 8 \\
2(25+5a) &= \left(25+10a+a^2\right) + 2\left(-5a-a^2\right) + 64 \\
50 + 10a &= 25 + 10a + a^2 - 10a - 2a^2 + 64 \\
a^2 + 10a - 39 &= 0 \\
(a+13)(a-3) &= 0 \\
a &= -13, 3
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 3$ #

6. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = (x-1)^2(x^2-1)$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X
แนวคำตอบ เนื่องจากเส้นสัมผัสขนานกับแกน X มีความชันเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\begin{aligned}
0 = \frac{dy}{dx} &= (x-1)^2(x^2-1)' + (x^2-1)[(x-1)^2]' \\
&= (x-1)^2(2x) + (x^2-1)2(x-1) \\
&= (x-1)^2(2x) + (x-1)(x+1)2(x-1) \\
&= (x-1)^2[2x + 2(x+1)] \\
&= (x-1)^2(4x+2)
\end{aligned}$$

จะได้ $x = 1, -\frac{1}{2}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
y(1) &= 0 \\
y\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{27}{16}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเส้นสัมผัสส้นโค้ง $y = (x-1)^2(x^2-1)$ ขนานกับแกน X ที่จุด $(1, 0)$ และ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

7. ให้ $f(x) = g\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)$ และ $u(x) = \sqrt{x-1}$ โดยที่ $g'(0) = 4$ จงหา $\dfrac{df}{dx}$ เมื่อ $x = 2$

แนวคำตอบ ให้ $v = \dfrac{1-u}{1+u}$ จะได้ว่า $f(x) = g(v)$ โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dv} g\left(v\right) \cdot \frac{d}{du}\left[\frac{1-u}{1+u}\right] \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x-1} \\
&= g'\left(v\right) \cdot \left[\frac{(1+u)\frac{d}{du}(1-u) - (1-u)\frac{d}{du}(1+u)}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \\
&= g'\left(v\right) \cdot \left[\frac{(1+u)(-1) - (1-u)1}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\
&= g'\left(v\right) \cdot \left[\frac{-2}{(1+u)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ว่า $u(2) = 1$, $v(1) = 0$ และ $u'(2) = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น $\dfrac{df}{dx}$ เมื่อ $x = 2$ คือ

$$\frac{df}{dx} = g'(0) \cdot \left[\frac{-2}{(1+1)^2}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = 4\left[-\frac{1}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \#$$

8. กำหนดให้ $F(x) = f(xf(xf(x)))$ โดยที่ $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4,\ f'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $F'(1)$

แนวคำตอบ โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(xf(xf(x))) \cdot [xf(xf(x))]' \\
&= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f(xf(x))]' + 1 \cdot f(xf(x))] \\
&= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf(x)]'] + f(xf(x))] \\
&= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf'(x) + 1 \cdot f(x)]] + f(xf(x))] \\
&= f'(xf(xf(x))) \cdot [x[f'(xf(x)) \cdot [xf'(x) + f(x)]] + f(xf(x))]
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
F'(1) &= f'(f(f(1))) \cdot [[f'(f(1)) \cdot [f'(1) + f(1)]] + f(f(1))] \\
&= f'(f(2)) \cdot [[f'(2) \cdot [4+2]] + f(2)] \\
&= f'(3) \cdot [5 \cdot 6 + 3] \\
&= 6 \cdot 33 \\
&= 198 \quad \#
\end{aligned}$$