คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 4
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ อนุพันธ์อันดับสูง อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และตรีโกณมิติ **สัปดาห์ที่** 4 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหา $f^{(n)}(x)$ ในรูปทั่วไป เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - (x+1)^{-1} \\
f'(x) &= (x+1)^{-2} = \frac{1}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= -2(x+1)^{-3} = \frac{-2}{(x+1)^3} \\
f'''(x) &= (-2)(-3)(x+1)^{-4} = \frac{(-2)(-3)}{(x+1)^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-2)(-3)(-4)\cdots(-n)(x+1)^{-(n+1)} \\
&= (-1)^{n-1} 2\cdot 3\cdot 4\cdots n(x+1)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จงหา $\dfrac{f^{(100)}(1)}{f^{(99)}(1)}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\
f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}} \\
&\vdots \\
f^{(99)}(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{197}{2}\right)x^{-\frac{199}{2}} \\
f^{(100)}(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{197}{2}\right)\left(-\frac{199}{2}\right)x^{-\frac{201}{2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{f^{(100)}(1)}{f^{(99)}(1)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{197}{2}\right)\left(-\frac{199}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{197}{2}\right)} = -\frac{199}{2} \quad \#$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x+1)^2(\ln x)^3\cos^2 x}{e^{3x}x^3(1-5x)^6}}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(\ln x)^3\cos^2 x}{e^{3x}x^3(1-5x)^6}}\\ &= \frac{1}{5}\left[2\ln(x+1)+3\ln(\ln x)+2\ln(\cos x)-3x-3\ln x-6\ln(1-5x)\right]\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{1}{5}\left[2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)-3-\frac{3}{x}-6\cdot\frac{1}{1-5x}(-5)\right]\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{5}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x\ln x}-\frac{2\sin x}{\cos x}-3-\frac{3}{x}+\frac{30}{1-5x}\right]\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{5}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x\ln x}-2\tan x-3-\frac{3}{x}+\frac{30}{1-5x}\right]\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(\ln x)^3\cos^2 x}{e^{3x}x^3(1-5x)^6}}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x\ln x}-2\tan x-3-\frac{3}{x}+\frac{30}{1-5x}\right] \qquad \#$$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (x\ln x)^{\ln x}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(x\ln x)^{\ln x} = (\ln x)\cdot\ln(x\ln x)\\ &= (\ln x)\cdot[\ln x+\ln(\ln x)] = (\ln x)^2+\ln x\cdot\ln(\ln x)\\ \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}[(\ln x)^2+\ln x\cdot\ln(\ln x)]\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 2(\ln x)\frac{d}{dx}\ln x++\ln x\frac{d}{dx}\ln(\ln x)+\ln(\ln x)\frac{d}{dx}\ln x\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x+\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\\ \frac{dy}{dx} &= y\cdot\frac{1}{x}\left(2\ln x+\ln(\ln x)+1\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (x\ln x)^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\left(2\ln x+\ln(\ln x)+1\right) \qquad \#$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \tan^2(\sec^2 x^2)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}y &= [\tan((\sec x^2)^2)]^2\\ \frac{dy}{dx} &= 2[\tan((\sec x^2)^2)]\cdot\frac{d}{dx}\tan((\sec x^2)^2)\\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)]\sec^2((\sec x^2)^2)\cdot\frac{d}{dx}(\sec x^2)^2\\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)]\sec^2((\sec x^2)^2)2(\sec x^2)\cdot\frac{d}{dx}\sec x^2\\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)]\sec^2((\sec x^2)^2)2(\sec x^2)\sec x^2\tan x^2\cdot\frac{d}{dx}x^2\\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)]\sec^2((\sec x^2)^2)2(\sec x^2)\sec x^2\tan x^2\cdot 2x\\ &= 8x\tan(\sec^2 x^2)\cdot\sec^2(\sec^2 x^2)\cdot\sec^2 x^2\cdot\tan x^2 \qquad \#\end{aligned}$$

6. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{-1}\tan^{-1}(x^{-1}) + \cos(\ln(\cos x))$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y &= x^{-1}[\tan(x^{-1})]^{-1} + \cos(\ln(\cos x)) \\
\frac{dy}{dx} &= x^{-1}(-1)[\tan(x^{-1})]^{-2}\cdot\frac{d}{dx}\tan(x^{-1}) - x^{-2}[\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x))\cdot\frac{d}{dx}\ln(\cos x) \\
&= -x^{-1}[\tan(x^{-1})]^{-2}\sec^2(x^{-1})\cdot\frac{d}{dx}x^{-1} - x^{-2}[\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x))\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\cos x \\
&= -x^{-1}[\tan(x^{-1})]^{-2}\sec^2(x^{-1})(-x^{-2}) - x^{-2}[\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x))\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) \\
&= x^{-3}\tan^{-2}(x^{-1})\sec^2(x^{-1}) - x^{-2}\tan^{-1}(x^{-1}) + \tan x\cdot\sin(\ln(\cos x)) \qquad \#
\end{aligned}$$

7. จงแสดงว่า $y = e^x(\cos x + \sin x)$ สอดคล้องสมการ $y'' - 2y' + 2y = 0$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
y &= e^x(\cos x + \sin x) \\
y' &= e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x\cos x \\
y'' &= 2e^x\cos x - 2e^x\sin x
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y'' - 2y' + 2y &= [2e^x\cos x - 2e^x\sin x] - 2[2e^x\cos x] + 2[e^x\cos x + e^x\sin x] \\
&= 2e^x\cos x - 2e^x\sin x - 4e^x\cos x + 2e^x\cos x + 2e^x\sin x \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = e^x(\cos x + \sin x)$ สอดคล้องสมการ $y'' - 2y' + 2y = 0$

8. จงหา $a \in [0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $f'(a) = 0$ เมื่อ $f(x) = e^{\cos x}\cos^2 x$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{\cos x})'\cos^2 x + e^{\cos x}(\cos^2 x)' \\
&= e^{\cos x}(\cos x)'\cos^2 x + e^{\cos x}2\cos x(\cos x)' \\
&= e^{\cos x}(-\sin x)\cos^2 x + e^{\cos x}2\cos x(-\sin x) \\
&= -e^x\cos x\sin x(\cos x + 2)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$0 = f'(a) = -e^a\cos a\sin a(\cos a + 2)$$

เนื่องจาก $e^a \neq 0$ และ $\cos a + 2 \neq 0$ ฉะนั้น $\sin a = 0$ หรือ $\cos a = 0$ ดังนั้น $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ $\qquad \#$