คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 5
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย และค่าเชิงอนุพันธ์ **สัปดาห์ที่** 5 **คะแนน** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหาอนุพันธ์ของ $y = e^{\arcsin x} \cdot \arccos x$

แนวคำตอบ

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{\arcsin x} \cdot (\arccos x)' + (e^{\arcsin x})' \cdot \arccos x \\
&= e^{\arcsin x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + e^{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)' \cdot \arccos x \\
&= e^{\arcsin x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x \\
&= \frac{e^{\arcsin x}(\arccos x - 1)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \#
\end{aligned}
$$

2. กำหนดให้ $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\arctan x}$ จงหา $f'(0)$

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $f(0) = 1$ และ

$$
\begin{aligned}
\ln f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\arctan x} &= \arctan x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \arctan x[\ln(1-x) - \ln(1+x)] \\
&= (\arctan x)'[\ln(1-x) - \ln(1+x)] + \arctan x[\ln(1-x) - \ln(1+x)]' \\
&= \frac{1}{1+x^2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)] + \arctan x\left[\frac{1}{1-x}(-1) - \frac{1}{1+x}(1)\right] \\
&= \frac{1}{1+x^2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)] + \arctan x\left[\frac{-2}{1-x^2}\right] \\
f'(x) &= f(x)\left[\frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{1+x^2} - \frac{2\arctan x}{1-x^2}\right] \\
f'(0) &= f(0)\left[\frac{\ln 1 - \ln 1}{2} - \frac{2\arctan 0}{1}\right] \\
&= 1 \cdot 0 = 0 \qquad \#
\end{aligned}
$$

3. กำหนดให้ $f(\arcsin x) = \arctan\sqrt{x}$ จงหา $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

แนวคำตอบ

$$
\begin{aligned}
f'(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' &= (\arctan\sqrt{x})' \\
f'(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f'(\arcsin x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{x}(1+x)}
\end{aligned}
$$

แทน $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \#$$

4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x^2 + y^2 = \sin(xy)$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
[x^2+y^2]' &= [\sin(xy)]' \\
2x + 2yy' &= \cos(xy)\cdot(xy)' \\
2x + 2yy' &= \cos(xy)\cdot(xy' + (1)y) \\
2x + 2yy' &= xy'\cos(xy) + y\cos(xy) \\
2yy' - xy'\cos(xy) &= y\cos(xy) - 2x \\
[2y - x\cos(xy)]y' &= y\cos(xy) - 2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)} \quad \#
\end{aligned}$$

5. จงหา y'' เมื่อ $y = \arctan(xy)$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+(xy)^2}\cdot(xy)' = \frac{1}{1+(xy)^2}\cdot(xy' + (1)y) \\
&= \frac{xy'+y}{1+x^2y^2} \\
y'(1+x^2y^2) &= xy' + y \\
y' + y'x^2y^2 &= xy' + y \\
(y' + y'x^2y^2)' &= (xy'+y)' \\
y'' + y''x^2y^2 + y'(x^2)'y^2 + y'x^2(y^2)' &= (xy')' + y' \\
y'' + y''x^2y^2 + y'(2x)y^2 + y'x^2(2yy') &= (xy'' + y') + y' \\
y'' + y''x^2y^2 - xy'' &= 2y' - 2xy^2y' - 2yx^2y'y' \\
(1 + x^2y^2 - x)y'' &= 2y' - 2xy^2y' - 2yx^2y'y' \\
y'' &= \frac{2y' - 2xy^2y' - 2yx^2y'y'}{1+x^2y^2-x} \quad \#
\end{aligned}$$

6. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟที่มีสมการ $xe^y + ye^x = \cos(x^2y^2)$ ที่จุด $(0,1)$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
(xe^y + ye^x)' &= [\cos(x^2y^2)]' \\
x'e^y + x(e^y)' + y(e^x)' + y'e^x &= -\sin(x^2y^2)\cdot(x^2y^2)' \\
e^y + xe^yy' + ye^x + y'e^x &= -\sin(x^2y^2)\cdot[x^2(y^2)' + (x^2)'y^2] \\
e^y + xe^yy' + ye^x + y'e^x &= -\sin(x^2y^2)\cdot(x^2 2yy' + 2xy^2)
\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ และ $y = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
e + 0 + 1 + y' &= -\sin(0)\cdot 0 = 0 \\
y' &= -e - 1
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสของกราฟที่จุด $(0,1)$ คือ

$$y = -(1+e)x + 1 \quad \#$$

7. จงประมาณค่า $\sqrt[5]{-31.99}$ โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์
แนวคำตอบ ให้ $f(x) = \sqrt[5]{x}$ จะได้ว่า $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$
พิจารณา $x = -32$ และ $\Delta x = 0.01$ จาก

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f(x)\Delta x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{-31.99} &= f(-32 + 0.01) \\
&\approx f(-32) + f'(-32) \cdot 0.01 \\
&= \sqrt[5]{-32} + \frac{1}{5}(-32)^{-\frac{4}{5}} \cdot 0.01 \\
&= -2 + \frac{1}{5}(-2)^{-4} \cdot 0.01 \\
&= -2 + \frac{0.01}{80} \\
&= -2 + 0.000125 \\
&= -1.999875 \quad \#
\end{aligned}$$

8. ถังใบรูปทรงกระบอกใบหนึ่งไม่มีฝา ต้องการทาสีด้านนอกรอบถังโดยทาสีหนา 0.25 เซนติเมตร
ถ้าวัดรัศมีภายนอกได้ 75 เซนติเมตร และถังสูง 150 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของสีที่ใช้ทาถังโดยอาศัยค่าเชิงอนุพันธ์
แนวคำตอบ ให้ V แทนปริมาตรของทรงกระบอกที่มีรัศมีเป็น r และความสูงเป็น h ดังนั้น

$$V(r) = \pi r^2 h$$

แล้ว $V'(r) = 2\pi rh$ จะได้ว่า $h = 150$ เซนติเมตร, $r = 75$ เซนติเมตร และ $\Delta r = 0.25$ เซนติเมตร จาก

$$V(r + \Delta r) \approx V(r) + V'(r)\Delta r$$

ดังนั้นปริมาตรของเนื้อสีเท่ากับ $V(75.25) - V(75)$ นั่นคือ

$$V(75.25) - V(75) \approx V'(75) \cdot 0.25 = 2\pi(75)150 \cdot 0.25 = 5625\pi$$

ฉะนั้นปริมาตรของสีที่ใช้ทาถังโดยประมาณ 5625π ลูกบาศก์เซนติเมตร