เฉลย Assignment 6

MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ค่าสุดขีด และการร่างกราฟ **สัปดาห์ที่** 6 **คะแนน** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

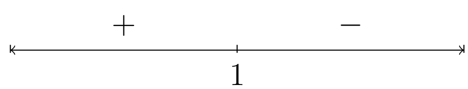
---

1. **การหาค่าสุดขีด**
   จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \arctan x - \ell n\sqrt{1+x^2}$
   ค่าสุดขีดสุดสัมพัทธ์ที่ได้ เป็นค่าสุดขีดสัมสัมบูรณ์หรือไม่เพราะเหตุใด

   แนวคำตอบ จะได้ว่า $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ พิจารณา

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(2x) = \frac{1-x}{1+x^2}$$

   ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤติ และให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   เนื่องจาก $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 1$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > 1$

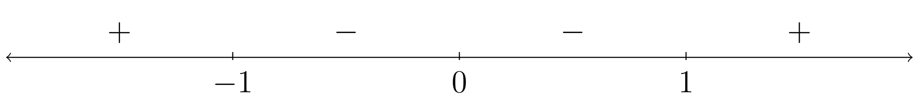
   นั่นคือ $f(x) \le f(1)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดสูงสุมสัมบูรณ์ด้วย โดยที่ $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

2. **การหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์**
   จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}$ บนช่วง $[-8, 8]$

   แนวคำตอบ

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7x^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{7}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{7x^2-7}{3x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{7(x^2-1)}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{7(x-1)(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

   ดังนั้น จุดวิกฤกตของฟังก์ชันนี้คือ $x = -1, 0, 1$ และพิจารณาฟังก์ชันเพิ่ม-ลด ดังนี้

   ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ นั่นคือ $f(-1) = 6$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ นั่นคือ $f(1) = -6$
   พิจารณาค่าที่จุดขอบ

   $$\begin{aligned} f(-8) &= (-8)^{\frac{7}{3}} - 7(-8)^{\frac{1}{3}} = -128 + 7(2) = -114 \\ f(8) &= 8^{\frac{7}{3}} - 7\cdot 8^{\frac{1}{3}} = 128 - 7(2) = 114 \end{aligned}$$

   ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์อยู่ที่ $x = -8$ และ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์อยู่ที่ $x = 8$

3. **การวิเคราะห์ฟังก์ชันเพิ่ม**
   จงหาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $f(x) = xe^{-ax}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0.25)$

   แนวคำตอบ พิจารณา

$$f'(x) = -axe^{-ax} + e^{-ax} = e^{-ax}(-ax+1) > 0$$

   เนื่องจาก $e^{-ax} > 0$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $-ax + 1 > 0$
   กรณี $a < 0$ จะได้ว่า $-a > 0$

$$\begin{aligned} -ax &> -1 \\ x &> \frac{-1}{-a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

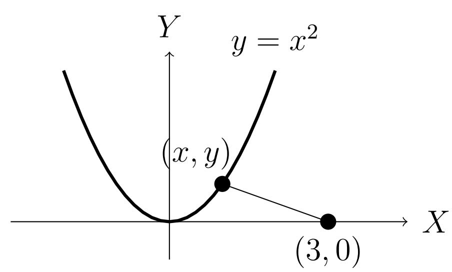
   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(\frac{1}{a}, \infty)$ ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0.25)$ ดังนั้นกรณีนี้เป็นไม่ได้
   กรณี $a > 0$ จะได้ว่า $-a < 0$

$$\begin{aligned} -ax &> -1 \\ x &< \frac{-1}{-a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

   นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \frac{1}{a}) \subseteq (-\infty, 0.25)$ ฉะนั้น $\frac{1}{a} \leq 0.25$ ดังนั้น $a = 4, 5, 6, ...$ #

4. **การใช้อนุพันธ์ในการแก้โจทย์ปัญหา**
   จงหาจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 0)$ มากที่สุด

   แนวคำตอบ ให้ (x, y) เป็นจุดเป็นพาราโบลา $y = x^2$ พิจารณากราฟ



   ให้ $d(x)$ แทนฟังก์ชันระยะทางจากจุด (x, y) และ $(3, 0)$ เนื่องจาก (x, y) อยู่บนกราฟพาราโบลา จะได้ว่า $y = x^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^4} \end{aligned}$$

   จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 + x^4)^{-\frac{1}{2}}(2x - 6 + 4x^3) \\ &= \frac{2x - 6 + 4x^3}{2\sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^4}} \end{aligned}$$

   หาจุดวิกฤตจาก $d'(x) = 0$ พิจารณา

$$\begin{aligned} 4x^3 + 2x - 6 &= 0 \\ (x-1)(4x^2 + 4x + 6) &= 0 \\ (x-1)[(2x+1)^2 + 5] &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวของฟังก์ชัน d และให้ค่าต่ำสุด
นั่นคือ $(1, 1)$ เป็นจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ ที่อยู่ใกล้ $(3, 0)$ มากที่สุด #

5. **การใช้อนุพันธ์ในการแก้โจทย์ปัญหา**

โรงเรียนแห่งหนึ่งนำนักเรียนไปทัศนศึกษา โรงเรียนเก็บเงินนักเรียนคนละ 150 บาท ถ้ามีนักเรียนไม่เกิน 150 คน แต่ถ้านักเรียนไปเกิน 150 คนจะเก็บลดลง 50 สตางค์คูณด้วยจำนวนคนที่เกินจากจำนวน 150 คน นักเรียนควรไปทัศนศึกษากี่คนจึงจะทำให้โรงเรียนเก็บเงินได้มากสุด

แนวคำตอบ ให้ x แทนจำนวนนักเรียน และ $f(x)$ แทนฟังก์ชันของเงินที่เก็บได้
กรณี $0 < x \leq 150$ จะได้ว่า $f(x) = 150x$
กรณี $x > 150$ มีจำนวนนักเรียนที่มากกว่า 150 เท่ากับ $x - 150$ ดังนั้นตต้องเก็บลดลงคนละ $0.50(x - 150)$
ทำให้ได้ว่าเก็บคนละ $150 - 0.50(x - 150)$ ดังนั้น

$$f(x) = [150 - 0.50(x - 150)]x = [225 - 0.50x]x = 225x - 0.50x^2$$

นั่นคือ

$$f(x) = \begin{cases} 150x & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 150 \\ 225x - 0.50x^2 & \text{เมื่อ } x > 150 \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$f'(x) = \begin{cases} 150 & \text{เมื่อ } 0 < x < 150 \\ 225 - x & \text{เมื่อ } x > 150 \end{cases}$$

เนื่องจาก $f'(150^-) = 150 \neq 75 = 225 - 150 = f'(150^+)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 150$ และ

$$\begin{aligned} f'(x) = 225 - x &= 0 \\ x &= 225 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 150, 225$ เป็นจุดวิกฤติ นำไปตรวจสอบเครื่องหมายอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\begin{array}{ccccc} + & & + & & - \\ \hline & 150 & & 225 & \end{array}$$

ทำให้ได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 225$ และเห็นว่า $f(x) \leq f(225)$ ทุก ๆ $x > 0$ ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมที่ $x = 225$ และ

$$\begin{aligned} f(225) &= 225(225) - 0.50(225)^2 \\ &= 50625 - 25312.50 \\ &= 25312.50 \end{aligned}$$

ดังนั้นโรงเรียนเก็บได้มากสุด 25,312.50 บาท เมื่อมีจำนวนนักเรียน 225 คน #

6. จงวิเคราะห์และร่างกราฟของ $y = \dfrac{x^2+x+3}{x-2}$

แนวคำตอบ 1.โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}-\{2\}$ จะเห็นว่า $x=2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x+3}{x-2}=\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x+3}{x-2}=-\infty$$

และ $y=x+3$ เป็นเส้นกำกับแนวเอียง เนื่องจาก

$$y=x+3+\frac{9}{x-2}$$

และ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x-2}=0 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x-2}=0$$

2. ไม่มีจุดตัดแกน X เนื่องจาก $x^2+x+3\neq 0$ มีจุดตัดแกน Y คือ $(0,-1.5)$
3. พิจารณา

$$\begin{aligned} y' &= 1+9(-1)(x-2)^{-2} = 1-\frac{9}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2-9}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x=-1,5$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(-1)=-1$ และ $f(5)=11$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย y' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & + \\ \hline & -1 & & 2 & & 5 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-1,-2)\cup(2,5)$
4. พิจารณา

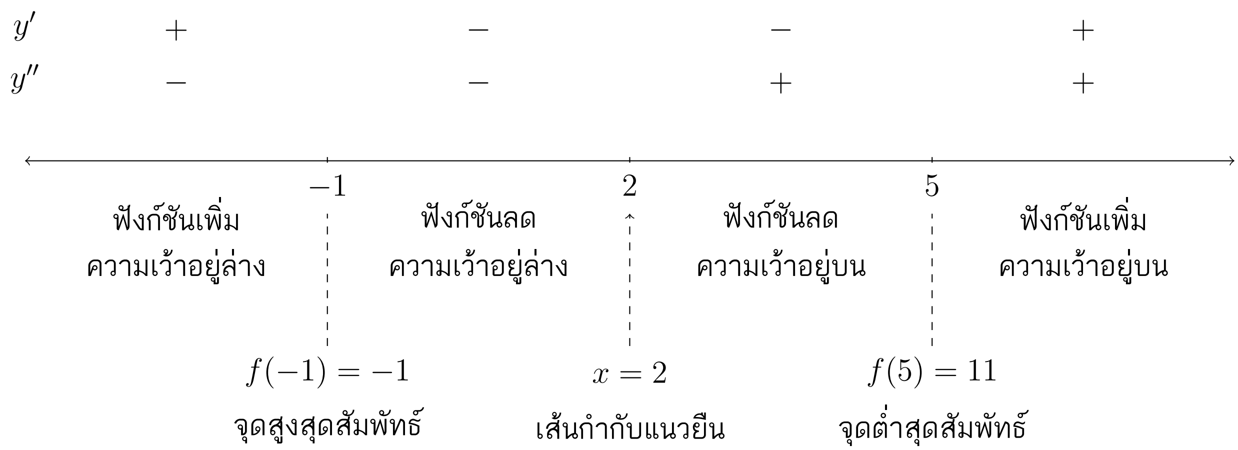
$$y''=9(-1)(-2)(x-2)^{-3}=\frac{18}{(x-2)^3}$$

ดังนั้น f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

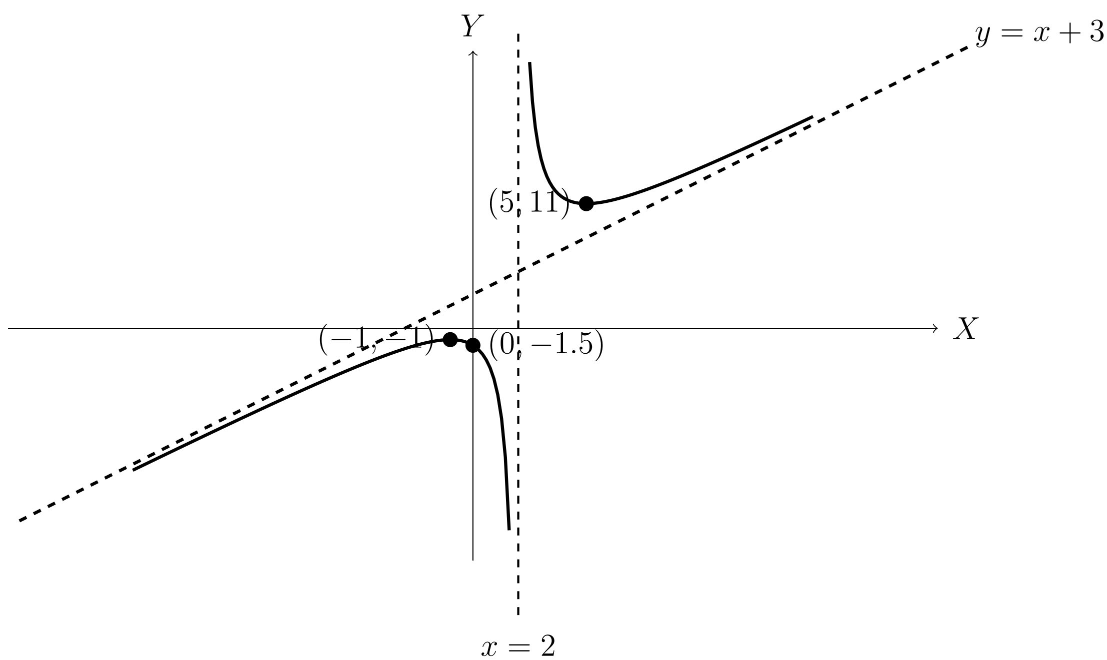
$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 2 & \end{array}$$

f มีความเว้าอยู่บนบน $(2,\infty)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty,2)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



7. จงวิเคราะห์และร่างกราฟของ $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

แนวคำตอบ 1. เนื่องจาก $x^2 + 1 \neq 0$ ดังนั้น โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และไม่มีเส้นกำกับแนวยืน จะเห็นว่า $x = 2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

จะได้ว่า $y = 0$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน
2. จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y คือ $(0, 0)$
3. พิจารณา

$$y' = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(-1) = \frac{1}{2}$ และ $f(-1) = -\frac{1}{2}$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย y' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-1, 1)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
4. พิจารณา

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^2+1)^2(-2x) - (1-x^2)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)[(x^2+1)(-2x) - (1-x^2)2(2x)]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

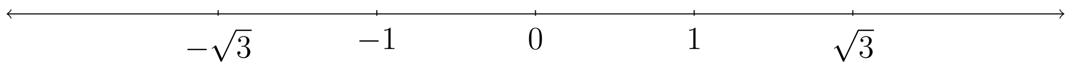
ดังนั้น $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า แล้ว $f(0) = 0$, $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ และ $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \end{array}$$

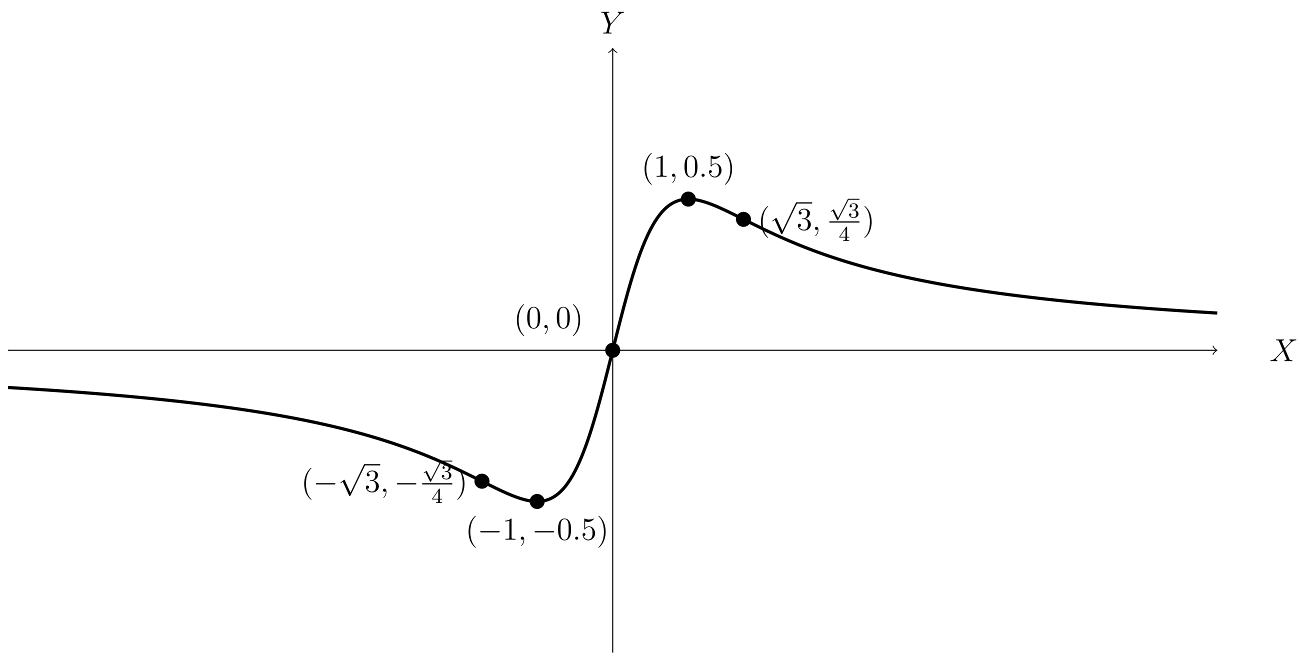
f มีความเว้าอยู่บนบน $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

y''	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y'	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้



8. จงวิเคราะห์และร่างกราฟของ $y = \dfrac{1}{x(x+2)}$

แนวคำตอบ 1.โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{0, -2\}$ จะเห็นว่า $x = 2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+3}{x-2} = \infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+3}{x-2} = -\infty$$

และ $x = -2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน เนื่องจาก

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+x+3}{x-2} = \infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x+3}{x-2} = -\infty$$

2. ไม่มีจุดตัดแกน
3. พิจารณา

$$y' = -1(x^2+2x)^{-2}(2x+2) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

ดังนั้น $x = -1,$ เป็นจุดวิกฤต จะได้ $f(-1) = -1$ เมื่อพิจารณาเครื่องหมาย y' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & -1 & \end{array}$$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, -1)$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-1, \infty)$
4. พิจารณา

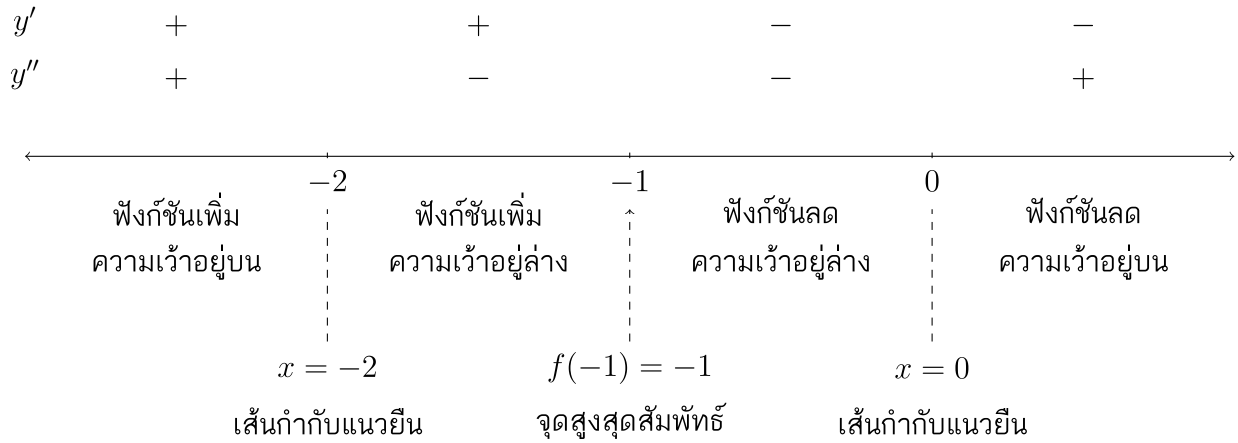
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^2+2x)^2(-2) - (-2x-2)2(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4} \\ &= \frac{(x^2+2x)[(x^2+2x)(-2) - (-2x-2)2(2x+2)]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x^2-4x+8x^2+16x+8}{(x^2+2x)^3} = \frac{6x^2+12x+8}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{6(x^2+2x+1)+2}{(x^2+2x)^3} = \frac{6(x+1)^2+2}{x^3(x+2)^3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า พิจารณาเครื่องหมาย f'' บนเส้นจำนวนจะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 0 & \end{array}$$

f มีความเว้าอยู่บนบน $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ และความเว้าอยู่ล่างบน $(-2, 0)$

5. นำข้อมูลที่ได้มาสรุปบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



นำไปเขียนกราฟได้ดังนี้