เฉลย Assignment 7
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ อัตราสัมพัทธ์ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล **สัปดาห์ที่** 7 **คะแนน** 10 คะแนน

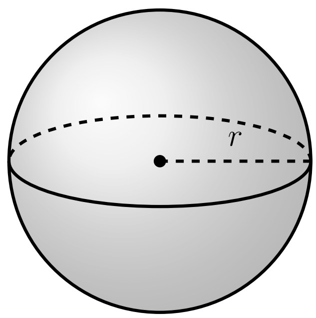
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. Gas รั่วออกจาก Ballon ทรงกลมด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที พื้นที่ผิวของ Ballon หดลงด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่รัศมีของ Ballon เท่ากับ 24 ฟุต

   แนวคำตอบ เมื่อเวลาผ่าน t นาที Ballon มี

   รัศมี r ฟุต ปริมาตร V ลูกบาศก์ฟุต และพื้นที่ผิว S ตารางฟุต



จะได้ว่า

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{และ} \qquad S = 4\pi r^2$$

ฉะนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

จากโจทย์จะไดว่า ขณะรัศมี Ballon คือ $r = 24$ ฟุต มี $\frac{dV}{dt} = 3$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ทำให้ได้ว่า

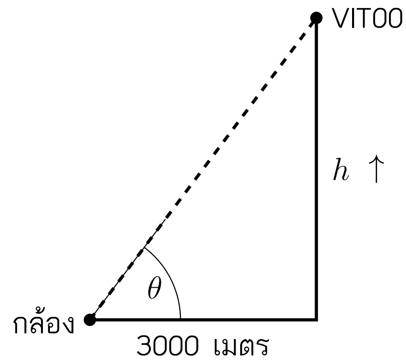
$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi r\left(\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}\right) = \frac{2}{r}\frac{dV}{dt} \\ &= \frac{2}{24}(3) = \frac{1}{4} = 0.25\end{aligned}$$

ดังนั้น ขณะที่รัศมีของ Ballon เท่ากับ 24 ฟุต พื้นที่ผิวหดลงด้วยอัตรา 0.25 ตารางฟุตต่อนาที $\#$

2. ยุทธติดตั้งกล้องวีดีโอเพื่อบันทึกภาพการปล่อยยานอวกาศชื่อ VIT00 ซึ่งห่างบนพื้นราบเป็นระยะ 3 กิโลเมตร โดยที่ VIT00 ถูกปล่อยขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยอัตรา 800 เมตรต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของเมุมเงยของกล้องที่ถ่ายภาพขณะที่ VIT00 อยู่สูงจากพื้นดิน 4 กิโลเมตร ซึ่งยังคงมองเห็น VIT00

แนวคำตอบ เมื่อเวลาผ่าน t นาที ยานอวกาศ VIT00

มีความสูงในแนวดิ่ง h เมตร และมุมเงยของกล้องที่มองไปยัง VIT00 เท่ากับ θ เรเดียน



จะได้ว่า

$$\tan\theta = \frac{h}{3000}$$

จากโจทย์จะได้ว่า ขณะ VIT00 สูงจากพื้นดิน $h = 4000$ เมตร อัตราความเร็วในแนวดิ่ง $\dfrac{dh}{dt} = 800$ เมตรต่อวินาที ทำให้ได้ว่า $\tan\theta = \dfrac{4000}{3000} = \dfrac{4}{3}$ และ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tan\theta &= \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{3000}\right) \\
\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{3000}\cdot\frac{dh}{dt} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{3000\sec^2\theta}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3000(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{dh}{dt} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{3000\left(1+(\frac{4}{3})^2\right)}\cdot 800 \\
&= \frac{8\cdot 9}{30\cdot 25} = \frac{12}{125} = 0.096
\end{aligned}$$

ดังนั้น ขณะที่ VIT00 อยู่สูงจากพื้นดิน 4 กิโลเมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของเมุมเงยของกล้องที่ถ่ายภาพ VIT00 เท่ากับ 0.096 เรเดียนต่อวินาที #

3. **รูปแบบ I.F.** $\frac{0}{0}$ จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x - x^2}{\cos^2 x - 1 + x^2}$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x - x^2}{\cos^2 x - 1 + x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x\cos x - x^2)'}{(\cos^2 x - 1 + x^2)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x)\cos x + \sin^2 x(-\sin x) - 2x}{2\cos x(-\sin x) + 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - 2x}{-\sin 2x + 2x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - 2x)'}{(-\sin 2x + 2x)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\cos^2 x + 2\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x) - 3\sin^2 x\cos x - 2}{-2\cos 2x + 2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^3 x - 7\sin^2 x\cos x - 2}{-2\cos 2x + 2} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2\cos^3 x - 7\sin^2 x\cos x - 2)'}{(-2\cos 2x + 2)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-6\cos^2 x\sin x - 14\sin x\cos^2 x + 7\sin^3 x}{4\sin 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-20\cos^2 x\sin x + 7\sin^3 x}{8\sin x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(-20\cos^2 x + 7\sin^2 x)}{8\sin x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-20\cos^2 x + 7\sin^2 x}{8\cos x}\\
&= \frac{-20+0}{8} = -\frac{5}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

4. **รูปแบบ I.F.** $\infty\cdot 0$ จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)2^{-x^2}$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)2^{-x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2^{x^2}} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(2^{x^2})'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^{x^2}\ln 2} + \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2^{x^2}\cdot 2x^3\cdot\ln 2}\\
&= 0 + \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2^{x^2}\cdot 2x^3\cdot\ln 2}\\
&= 0 \quad \#
\end{aligned}$$

5. **รูปแบบ I.F.** $\infty - \infty$ จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x}{\ln x}\right)$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.\infty - \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x + x - x^2}{(1-x)\ln x}\right) && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x + x - x^2)'}{[(1-x)\ln x]'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}+1-2x}{(1-x)\frac{1}{x}-\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{1+x-2x^2}{1-x-x\ln x} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(1+x-2x^2)'}{(1-x-x\ln x)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-4x}{-1-\ln x-1}\\
&= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

6. **รูปแบบ I.F.** 0^0 จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)^{x-1}$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.0^0$ ให้ $y = \left(\sqrt{2-x^2}-1\right)^{x-1}$ จะได้ว่า

$$\ln y = (x-1)\ln\left(\sqrt{2-x^2}-1\right) = \frac{\ln\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)}{\frac{1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\ln y &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)}{\frac{1}{x-1}} && I.F.\frac{\infty}{\infty}\\
\ln\left(\lim_{x\to 1^-} y\right) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{\left[\ln\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{2-x^2}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}(-2x)}{-(x-1)^{-2}}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)^2}{2-x^2-\sqrt{2-x^2}}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x^2+x}{2-x^2-\sqrt{2-x^2}} && I.F.\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x^3-2x^2+x)'}{(2-x^2-\sqrt{2-x^2})'} && \text{L'Hospital' Law}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-4x+1}{-2x+\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}}\\
&= \lim_{x\to 1^-}\frac{(3x^2-4x+1)\sqrt{2-x^2}}{-2x\sqrt{2-x^2}+x} = \frac{0}{-1}\\
&= 0\\
\lim_{x\to 1^-} y &= e^0 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)^{x-1}=1 \quad \#$$

7. **รูปแบบ I.F.** 1^∞ จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}}$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F.1^\infty$ ให้ $y=\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln y &= \frac{2}{x}\ln\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)=\frac{2\ln\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)}{x} \\
\lim_{x\to 0}\ln y &= \lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)}{x} && I.F.\frac{0}{0} \\
\ln\left(\lim_{x\to 0}y\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2\ln\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)\right)'}{x'} && \text{L'Hospital' Law} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{x+e^{\frac{x}{2}}}(1+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2})}{1} \\
&= 2\cdot\frac{1}{0+1}(1+\frac{1}{2}) \\
&= 3 \\
\lim_{x\to 0}y &= e^3
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}}=e^3 \quad \#$$

8. **รูปแบบ I.F.** ∞^0 จงหาลิมิตของ

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$$

แนวคำตอบ ลิมิตอยู่ในรูปแบบ ∞^0 ให้ $y = \left(e^x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{x}\ln\left(e^x+\ln x\right) = \frac{\ln\left(e^x+\ln x\right)}{x} \\
\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^x+\ln x\right)}{x} && I.F.\frac{\infty}{\infty} \\
\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(e^x+\ln x\right)\right)'}{x'} && \text{L'Hospital' Law} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x+\ln x}\left(e^x+\ln x\right)'}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x+\ln x}\left(e^x+\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x^{-1}}{e^x+\ln x} && I.F.\frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x+x^{-1}\right)'}{\left(e^x+\ln x\right)'} && \text{L'Hospital' Law} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x-x^{-2}\right)}{\left(e^x+x^{-1}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{x^2e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2e^x}}{1+\frac{1}{xe^x}} \\
&= \frac{1-0}{1+0} = 1 \\
\lim_{x\to\infty} y &= = e^1 = e
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad \#$$