คณิตศาสตร์

# เฉลย Assignment 8
# MAI1302 แคลคูลัส ๑

**หัวข้อ** ปฏิยานุพันธ์ การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร และผลบวกรีมันน์ **สัปดาห์ที่** 9 **คะแนน** 10 คะแนน
**ผู้สอน** ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ

$$f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$$

**แนวคำตอบ** ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ $f(x)$ คือ $F(x)+C$ โดย $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{1-\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \sec^2 x+\sec x\tan x\,dx \\
&= \tan x+\sec x+C \qquad \#
\end{aligned}$$

2. **การปริพันธ์ไม่จำกัดเขตโดยการเปลี่ยนรูป** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

**แนวคำตอบ**

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} &= \int \frac{x^2+2x+1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&= \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&= \int x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int e^{2x}\sqrt{1-e^x}\,dx$$

**แนวคำตอบ** ให้ $u = 1 - e^x$ จะได้ว่า $e^x = 1 - u$ และ $du = -e^x dx$ หรือ $dx = \dfrac{du}{-e^x}$

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\sqrt{1-e^x}\,dx &= \int e^{2x}\sqrt{u}\,\frac{du}{-e^x} \\
&= -\int e^x\sqrt{u}\,du \\
&= -\int (1-u)\sqrt{u}\,du \\
&= -\int u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\,du \\
&= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-e^x)^{\frac{5}{2}} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

4. **การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx$$

**แนวคำตอบ** ให้ $u = \sqrt{x} + 1$ จะได้ว่า $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ หรือ $dx = 2\sqrt{x}du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x}u^3}\,2\sqrt{x}du = 2\int u^{-3}\,du = -u^{-2} + C \\
&= -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

5. **การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int (x+1)^2\sqrt{1-2x}\,dx$$

**แนวคำตอบ** ให้ $u = 1 - 2x$ จะได้ว่า $du = -2dx$ หรือ $dx = -\dfrac{1}{2}du$ และ $x = \dfrac{1-u}{2}$

$$\begin{aligned}
\int (x+1)^2\sqrt{1-2x}\,dx &= \int \left(\frac{1-u}{2}+1\right)^2\sqrt{u}\,\frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{3-u}{2}\right)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{(3-u)^2}{4}u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\int (9-6u+u^2)u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{8}\int 9u^{\frac{1}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{8}\left[6u^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}\right] + C \\
&= -\frac{1}{8}\left[6(1-2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}(1-2x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}(1-2x)^{\frac{7}{2}}\right] + C \\
&= -\frac{3}{4}(1-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}(1-2x)^{\frac{7}{2}} + C \qquad \#
\end{aligned}$$

6. **การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ** จงหาปริพันธ์ของ

$$\int \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\, dx$$

**แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\, dx &= \int \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\, dx \\
&= \int \frac{\cos^4 x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{\cos^4 x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\, dx \\
&= \int \cos^2 x(1-\sin x)\, dx \\
&= \int \cos^2 x - \cos^2 x \sin x\, dx \\
&= \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx \\
&= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx + \int \cos^2 x\, d(\cos x) \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C \qquad \#
\end{aligned}$$

7. **การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้เอกลักษณ์** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int \sin x \sin(2x)\sin(3x)\, dx$$

**แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sin x\sin(2x)\sin(3x) &= \sin x[\sin(2x)\sin(3x)] \\
&= \sin x\left(-\frac{1}{2}[\cos(3x+2x) - \cos(3x-2x)]\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sin x[\cos(5x) - \cos x] \\
&= -\frac{1}{2}\sin x\cos(5x) + \frac{1}{2}\sin x\cos x \\
&= -\frac{1}{4}[\sin(5x+x) - \sin(5x-x)] + \frac{1}{4}[\sin(x+x) + \sin(x-x)] \\
&= -\frac{1}{4}\sin(6x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sin x\sin(2x)\sin(3x)\, dx &= \int -\frac{1}{4}\sin(6x) + \frac{1}{4}\sin(4x)] + \frac{1}{4}\sin(2x)\, dx \\
&= \frac{1}{24}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + C
\end{aligned}$$