คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 9
MAI1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส และการหาปริพันธ์ที่ละส่วน **สัปดาห์ที่** 10 **คะแนน** 10 คะแนน

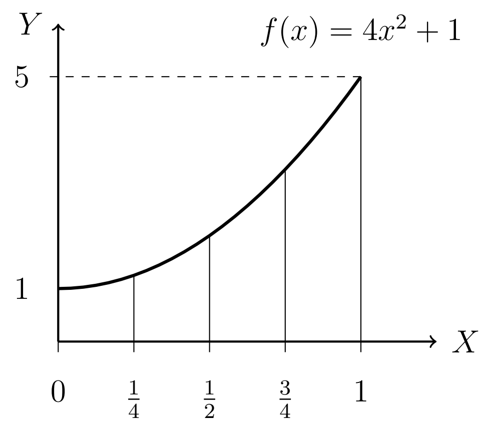
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **ผลบวกบนและผลบวกล่าง**

ให้ $f(x) = 4x^2+1$ เมื่อ $x \in [0,1]$ จงหา $L(P,f)$ และ $U(P,f)$ เมื่อ $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ โดยวาดกราฟประกอบ

แนวคำตอบ พิจารณากราฟ $y = 4x^2+1$



ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
L(P,f) &= \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4}\right) \\
&= \frac{15}{8} \quad \# \\
U(P,f) &= \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}f(1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} + 2 + \frac{13}{4} + 5\right) \\
&= \frac{23}{8} \quad \#
\end{aligned}
$$

2. **สมบัติปริพันธ์จำกัดเขต**

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริงโดยที่

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 3 \qquad \text{และ} \qquad \int_{3}^{0} f(x)\,dx = 1$$

จงหา $\displaystyle\int_{-1}^{0} [f(x)+x]\ dx + \int_{3}^{5} [f(x)-x]\ dx$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx \\
3 &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{3}^{0} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx \\
3 &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - 1 + \int_{3}^{5} f(x)\,dx \\
4 &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} [f(x)+x]\ dx + \int_{3}^{5} [f(x)-x]\ dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx - \int_{3}^{5} x\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3}^{5} \\
&= 4 + 0 - \frac{1}{2} - \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = -\frac{9}{2} \qquad \#
\end{aligned}$$

3. **การเปลี่ยนตัวแปรและใช้สมบัติปริพันธ์จำกัดเขต**

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง และ $\quad f(-x) = -f(x) \quad$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

แนวคำตอบ จะได้ว่า $f(x) = -f(-x)$ ให้ $u = -x$ จะได้ว่า $du = -dx$ จะได้ว่า $u(-1) = 1$ และ $u(0) = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} -f(-x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= \int_{u(-1)}^{u(0)} -f(u)\ -du + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= \int_{1}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{1} f(u)\,du + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. **ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส**

ให้ $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} e^t \arctan t \; dt$ เมื่อ $x \geq 0$ จงหา $F(0)$, $F'(0)$ และ $F''(0)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$F(0) = \int_1^1 e^t \arctan t \; dt = 0$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{1-x}^{1+x} e^t \arctan t \; dt \\ &= \int_{1-x}^{0} e^t \arctan t \; dt + \int_0^{1+x} e^t \arctan t \; dt \\ &= -\int_0^{1-x} e^t \arctan t \; dt + \int_0^{1+x} e^t \arctan t \; dt \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{1-x} e^t \arctan t \; dt + \int_0^{1+x} e^t \arctan t \; dt\right) \\ &= -e^{1-x}\arctan(1-x)\cdot(1-x)' + e^{1+x}\arctan(1+x)\cdot(1+x)' \\ &= -e^{1-x}\arctan(1-x)\cdot(-1) + e^{1+x}\arctan(1+x)\cdot 1 \\ &= e^{1-x}\arctan(1-x) + e^{1+x}\arctan(1+x) \\ F'(0) &= e\arctan 1 + e\arctan 1 = e\cdot\frac{\pi}{4} + e\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{e\pi}{2} \qquad \# \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{d}{dx}[e^{1-x}\arctan(1-x) + e^{1+x}\arctan(1+x)] \\ &= e^{1-x}\cdot\frac{1}{1+(1-x)^2}\cdot(-1) + e^{1-x}\cdot(-1)\arctan(1-x) \\ &\quad + e^{1+x}\cdot\frac{1}{1+(1+x)^2} + e^{1+x}\arctan(1-x) \\ &= -\frac{e^{1-x}}{1+(1-x)^2} - e^{1-x}\arctan(1-x) + \frac{e^{1+x}}{1+(1+x)^2} + e^{1+x}\arctan(1-x) \\ F''(0) &= -\frac{e}{2} - e\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{e}{2} + e\cdot\frac{\pi}{4} = 0 \qquad \# \end{aligned}$$

5. **การนำสมบัติปริพันธ์จำกัดเขตไปประยุกต์ใช้** จงหาค่าของ

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{3+|x|}\, dx$$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{3+|x|}\,dx &= \int_{-1}^{0} \sqrt{3+|x|}\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{3+|x|}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} \sqrt{3-x}\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{3+x}\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{0}^{1} (3+x)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{32}{3} - 4\sqrt{3} \quad \#
\end{aligned}$$

6. **การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต** จงหาค่าของ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$$

แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
\int \sec^4\theta\sqrt{\tan\theta}\,d\theta &= \int \sec^2\theta\sqrt{\tan\theta}\ \sec^2\theta d\theta \\
&= \int (1+\tan^2\theta)(\tan\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\tan\theta \\
&= \int (\tan\theta)^{\frac{1}{2}} + (\tan\theta)^{\frac{5}{2}}\,d\tan\theta \\
&= \frac{2}{3}(\tan\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}(\tan\theta)^{\frac{7}{2}} + C
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \left[\frac{2}{3}(\tan\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}(\tan\theta)^{\frac{7}{2}}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{20}{21} \quad \#$$

7. **การหาปริพันธ์ทีละส่วน** จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

แนวคำตอบ ให้ $u = (\ln x)^2$ และ $dv = dx$ ดังนั้น

$$du = \frac{2\ln x}{x} \qquad \text{และ} \qquad v = x$$

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\,dx &= x(\ln x)^2 - \int x\cdot\frac{2\ln x}{x}\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C \\
&= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C \quad \#
\end{aligned}$$

8. **การหาปริพันธ์ที่ละส่วน** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{t}\,dt$

แนวคำตอบ ให้ $x = \sqrt{t}$ และ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2x}$ นั่นคือ $dt = 2xdx$ จะได้ว่า

$$\int \sin(\sqrt{t})\,dt = \int \sin x\, 2x\,dx = 2\int x\sin x\,dx$$

ให้ $u = x$ และ $dv = \sin x dx$ ดังนั้น

$$du = dx \qquad \text{และ} \qquad v = -\cos x$$

แล้ว

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \sin(\sqrt{t})\,dt &= 2\int x\sin x\,dx\\ &= -2x\cos x + 2\sin x + C\\ &= -2\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) + 2\sin(\sqrt{t}) + C \qquad \#\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{t}\,dt = \Big[-2\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) + 2\sin(\sqrt{t})\Big]_0^{\pi^2} = [-2\pi(-1)] - 0 = 2\pi \qquad \#$$

9. **การหาปริพันธ์ที่ละส่วน** จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

แนวคำตอบ ให้ $u = \arctan x$ และ $dv = dx$ ดังนั้น

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad \text{และ} \qquad v = x$$

แล้ว

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2)\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad \#\end{aligned}$$