คณิตศาสตร์

เฉลย Quiz 2 แคลคูลัส ๑ MAI1302 (รอบ 8:00)

หัวข้อ อนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม และอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกโพแนนเชียล **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 8 สิงหาคม 2567 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงใช้**บทนิยาม** หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \neq 0$

แนวคำตอบ พิจารณา $x > 0$ จากบทนิยามของอนุพันธ์จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x-h)}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2} \\
&= \frac{-2x}{x^2\cdot x^2} = -\frac{2}{x^3} \qquad \#
\end{aligned}
$$

2. **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\ln x + 1)^{\ln(x+1)}$ เมื่อ $x > 0$

แนวคำตอบ พิจารณา $x > 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln (\ln x + 1)^{\ln(x+1)} = \ln(x+1)\cdot\ln(\ln x+1) \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\ln(x+1)\cdot\ln(\ln x+1) + \ln(x+1)\cdot\frac{d}{dx}\ln(\ln x+1) \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'\cdot\ln(\ln x+1) + \ln(x+1)\cdot\frac{1}{\ln x+1}\cdot(\ln x+1)' \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+1}\cdot 1\cdot\ln(\ln x+1) + \ln(x+1)\cdot\frac{1}{\ln x+1}\cdot\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \left[\frac{\ln(\ln x+1)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x(\ln x+1)}\right] \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{\ln(\ln x+1)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x(\ln x+1)}\right] \\
&= (\ln x+1)^{\ln(x+1)}\left[\frac{\ln(\ln x+1)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x(\ln x+1)}\right] \qquad \#
\end{aligned}
$$

เฉลย Quiz 2 : แคลคูลัส ๑ MAI1302 (รอบ 13:00)

หัวข้อ อนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม และอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกโพแนนเชียล **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันพฤหัสบดี ที่ 8 สิงหาคม 2567 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$$

จงใช้**บทนิยาม**ตรวจสอบว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $f(1)=1$ พิจารณาอนุพันธ์ที่ $x=1$ โดยใช้บทนิยาม

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{(2x-1)-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1^+}\frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} 2 = 2 \\
\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1^-}(x+1) = 2
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ฉะนั้น

$$f'(1) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$$

ดังนั้น f มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ $\quad\#$

2. **(5 คะแนน)** จงหาอนุพันธ์ของ $\quad y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad$ เมื่อ $x>0$

แนวคำตอบ พิจารณา $x>0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{d}{dx}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)' \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] \\
&= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] \quad \#
\end{aligned}$$