แคลคูลัส 1

Calculus 1

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2567

MAI1302

แคลคูลัส 1

Calculus 1

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
เอกสารประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส 1 ปีการศึกษา 1/2567

สารบัญ

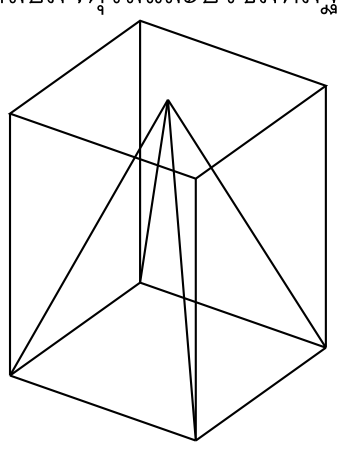
บทที่ 1

เบื้องต้นแคลคูลัส

1.1 ระเบียบวิธีเกษียณ

รากฐานของแคลคูลัสเริ่มต้นจากปัญหาเกี่ยวกับการวัด โดยถูกค้นพบปัญหาและการแก้ปัญหาเหล่านั้นใน บันทึกบนแผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน และบันทึกบนกระดาษปาปิรุส (Papyrus) ของชาวอียิปต์โบราณ ซึ่งมีอายุในสมัยก่อนคริสต์กาล บันทึกบนแผ่นดินเหนียวของชาวบาบิโลน โดยเฉพาะในบันทึกของอาเมส (Ahmose, 1680 – 1620 ก่อนคริสตกาล) ชี้ให้เห็นว่าชาวอียิปต์โบราณมีความรู้ว่า ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น 1/3 เท่าของปริมาตรของปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน

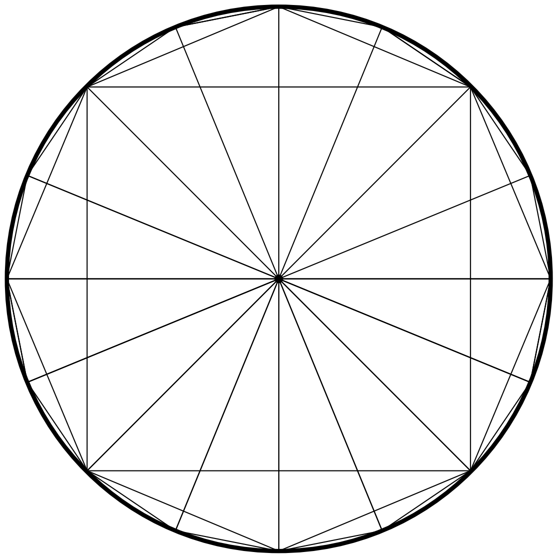
รูปที่ 1.1: พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสและปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน



นักปรัชญาชาวกรีกสมัยโบราณ ได้บันทึกถึงความรู้ต่าง ๆ ไว้หลายชิ้นเนื่องจากยุคนั้นเป็นยุครุ่งเรืองของการใช้ตรรกวิทยาในการแสวงหาความรู้ แต่ที่นับได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสในยุคนี้คือ **ระเบียบวิธีเกษียณ (The Method of Exhaustion)**

ตัวอย่างเช่น การนำเสนอวิธีหาพื้นที่ของวงกลมโดยชาวกรีกนามว่า **แอนติฟอน** (Antiphon, 480 – 411 ก่อนคริสตกาล) เริ่มจากสร้างรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม จากนั้นสังเกตได้ว่า หากจำนวนเหลี่ยมมากขึ้น ผลต่างของพื้นที่ของรูปทั้งสองจะหมดไป แต่ก็มีข้อแย้งในทางปฏิบัติว่าเราจะสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมให้มีจำนวนเหลี่ยมได้มากมายแค่ไหนถึงเพียงพอ

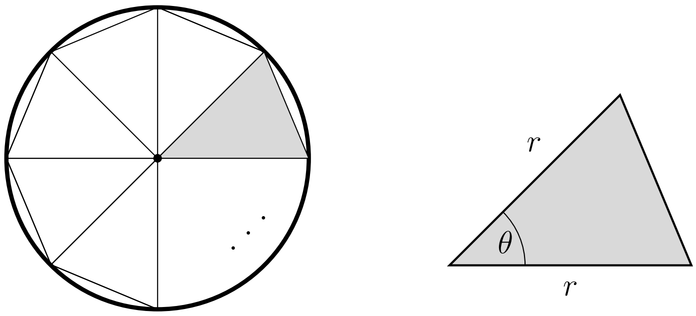
รูปที่ 1.2: รูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม



จากรูป 1.2 แสดงตัวอย่างการแบ่งวงกลมด้วยรูป 16 เหลี่ยมเท่า ๆ กัน เป็นตัวอย่างขั้นเริ่มต้นของระเบียบวิธีเกษียณ และต่อไปเราอาจใช้ความรู้เรื่องพื้นที่ของสามเหลี่ยมและตรีโกณมิติเพื่ออธิบายระเบียบวิธีเกษียณ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งวงกลมรัศมี r ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

วิธีทำ พิจารณาการหาพื้นสามเหลี่ยม 1 ชิ้นจาก n ชิ้น โดยใช้กฎทางตรีโกณมิติ



จะเห็นว่า $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ โดยใช้กฎทางตรีโกณมิติ จะได้ว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม 1 ชิ้นเท่าทับ

$$\frac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

ดังนั้นพื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r เท่ากับ

$$\frac{1}{2}nr^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

ในปัจจุบันถ้าใช้ความรู้เกี่ยวกับลิมิตอนันต์ พื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลมรัศมี r จะมีค่าเข้าใกล้ πr^2 หรือพื้นของวกลมนั่นเอง เมื่อ n มีขนาดใหญ่มาก ๆ

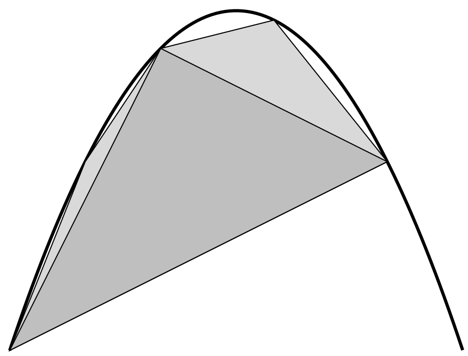
แต่ในสมัยนั้นชาวกรีกโบราณเป็นผู้ที่ยึดมั่นกับการให้เหตุผลทางตรรกะที่ต้องรัดกุมเข้มงวด รูปวงกลมก็คือรูปวงกลม กระบวนการที่จะทำให้รูปหลายเหลี่ยนปรับเปลี่ยนไปเป็นรูปวงกลม

มันสมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งมีการปฏิเสธการแบ่งพื้นที่อย่างไม่จำกัด นั่นเป็นข้อขัดแย้งของระเบียบวิธีเกษียณ ซึ่งตัวอย่างหนึ่งที่ปฏิเสธวิธีนี้คือผลงานของ **ซีโนแห่งอีเลีย (Zeno of Elea, 490 – 430 ก่อนคริสตกาล)** นักปราญช์ผู้โด่งดังในการนำเสนอข้อความที่ขัดแย้งกับสามัญสำนึกทั่วไปเรียกว่า **ปฏิทรรศ์ของซีโน (Zeno's paradoxes)** ได้ชี้ข้อบกพร่องทางตรรกะหากเราแบ่งขนาดได้ไม่จำกัด

ต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกผู้เลื่องชื่อนามว่า **อาริสโตเติล** (Aristotle, 384 – 322 ก่อนคริสตกาล) ได้ใช้หลักการเดียวกันนี้ไปเขียนถึง เส้นที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก (indivisible line) แต่แนวคิดของ ขนาดที่แบ่งไม่ได้ ก็ไม่รัดกุมพอที่จะนำไปใช้ในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากนั้น **ยูโดซุส (Eudoxus of Cnidus, 390 – 340 ก่อนคริสตกาล)** ได้ปรับปรุงการให้เหตุผลเกี่ยวกับระเบียบวิธีเกษียณ ให้มีความรัดกุมมากขึ้น โดยอาศัยความรู้ทางเรขาคณิตช่วยในพิจารณาขนาดที่แบ่งไม่ได้อีกในทางอ้อม โดยพิจารณาผ่านอัตราส่วนของขนาดที่วัดได้ทางเรขาคณิต ซึ่งต่อมาภายหลังความรู้เหล่านี้ได้ปรากฏในผลงานของ **ยุคลิด (Euclid of Alexandria, 365 – 275 ก่อนคริสตกาล)**

อาร์คิมีดีส (Archimedes, 287 – 212 ก่อนคริสตกาล) ได้ใช้ความรู้จากระเบียบวิธีเกษียณนี้จนได้ผลงานที่ถือได้ว่ามีแนวคิดใกล้เคียงกับแนวคิดของการหาปริพันธ์ในแคลคูลัสที่ทราบกันแล้วในปัจจุบันตัวอย่างผลงานที่เด่นซึ่งทำให้แนวคิดของกระบวนการเข้าถึงค่าจริงอย่างไม่จำกัดชัดเจนยิ่งขึ้น ได้แก่ วิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลาตัดกับเส้นตรง หรือเรียกว่า เซกเมนต์ของพาราโบลา (the quadrature of parabola) ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 1.3: การแบ่งย่อยเซกเมนต์ของพาราโบลาออกเป็นรูปสามเหลี่ยม



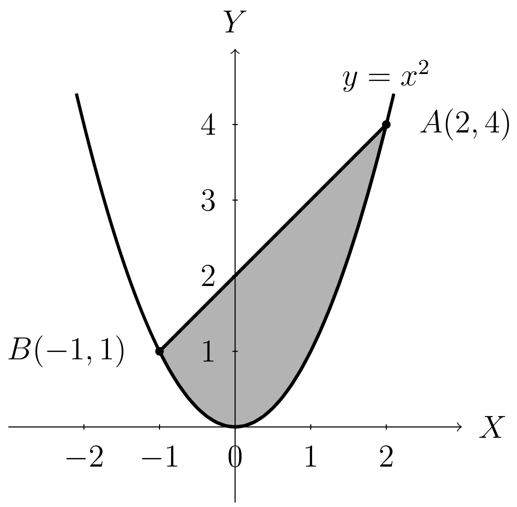
จากรูป 1.3 เป็นการแบ่งย่อยเซกเมนต์ของพาราโบลาออกเป็นรูปสามเหลี่ยมได้เป็นจำนวนอนันต์ตามแนวคิดของอาร์คิมีดีส

จากกระบวนการสร้างข้างต้น ทำให้ทราบว่าพื้นที่ของเซกเมนต์ของพาราโบลาจะเป็น 4/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกที่สร้างให้แนบในเซกเมนต์ของพาราโบลานั้น อาร์คิมีดีสยังได้พัฒนาต่อยอดระเบียบวิธีเพื่อใช้หาพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงเรขาคณิตแบบต่าง ๆ จนได้ระเบียบวิธีที่ต่อมาเรียกว่า **วิธีอาร์คิมีดีส (method of Archimedes)** โดยมีแนวคิดของแบ่งย่อยรูปทรงเหล่านั้นออกเป็นแผ่นบาง ๆ ตามแนวศูนย์ถ่วง แล้วหาผลบวกของขนาดของแผ่นบาง ๆ เหล่านั้น ถึงแม้จะไม่มีคณิตศาสตร์ที่รัดกุมรองรับ แต่ถือว่าเป็นภาพแสดงแนวคิดคราว ๆ ของการหาปริพันธ์ในแคลคูลัสที่ทราบในปัจจุบัน

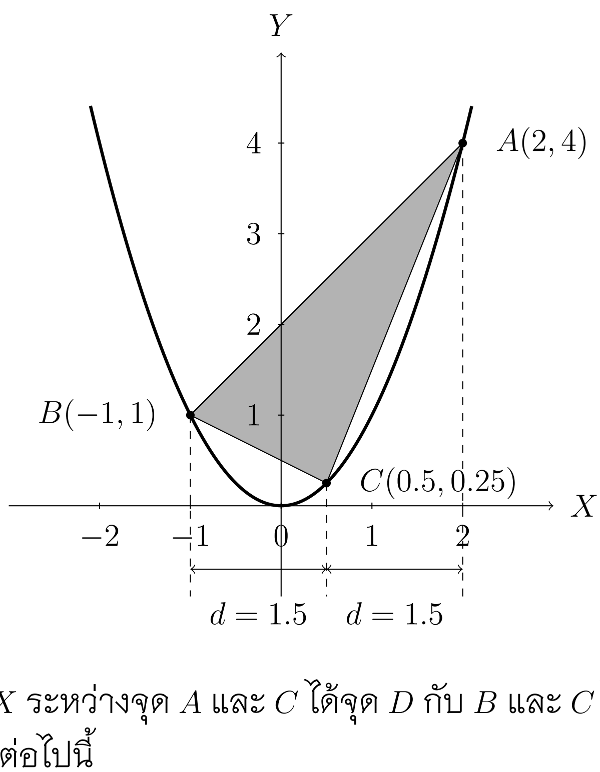
ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการฟาพื้นที่ปิดล้อมตามแนวคิดของอาร์คิมีดีส

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยล้อมพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 2$ โดยใช้วิธีของอาร์คิมีดีส

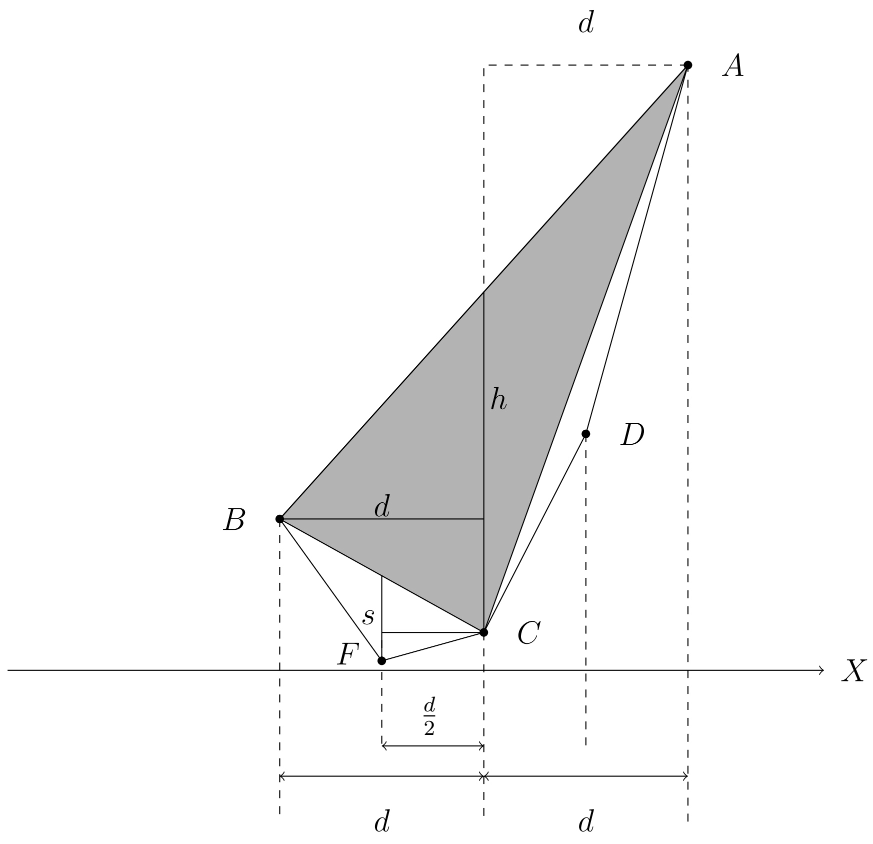
วิธีทำ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยล้อมพาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x + 3$ แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



ขั้นตอนแรกแบ่งครึ่งของจุด $A(2,4)$ และ $B(-1,1)$ จะได้จุด $C(0.5, 0.25)$ ให้ระยะที่แบ่งครึ่งเป็น $d = 1.5$ แล้วจะได้สามเหลี่ยม ABC ดังรูป



จากนั้นแบ่งจุดบนแกน X ระหว่างจุด A และ C ได้จุด D กับ B และ C ได้จุด F จะได้สามเหลี่ยม ACD และ BFC ดังรูปต่อไปนี้



กำหนดให้พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ X ตารางหน่วย จากรูปจพได้ว่า $X = dh$ และ

$$\text{พื้นที่ของสามเหลี่ยม } AFC \text{ เท่ากับ } \quad \frac{d}{2}s$$

และใช้แนวคิดเดียวกับการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม AFC จะได้พื้นที่ของ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ADC เท่ากับ พื้นที่ของสามเหลี่ยม AFC

จากนั้นพิสูจน์ได้ว่า $h = 4s$ (เป็นแบบฝึกหัด) ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$\text{พื้นที่ของ } \Delta AFC + \text{ พื้นที่ของ } \Delta ADC = ds = \frac{1}{4}X$$

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแบ่งครึ่งตามแนวแกน X ในทำนองเดียวกับขั้นตอนแรก จะได้พื้นที่ที่เพิ่มขึ้นเท่ากับ $\frac{1}{16}X$ และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ทำให้สรุปได้ว่าพื้นที่ปิดล้อมดังกล่าวเท่ากับผลบวกในรูปอนุกรมเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ถ้าให้พื้นที่ดังกล่าวเท่ากับ A จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= X + \frac{1}{4}X + \frac{1}{16}X + \cdots \\ &= X\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) \\ &= X\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{4}{3}X \end{aligned}$$

หรือกล่าวได้ว่าพื้นที่ปิดล้อมของพาราโบลาดังกล่าวจะเป็น 4/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปแรกที่สร้างให้แนบในเซกเมนต์ของพาราโบลานั้น สำหรับตัวอย่างนี้มี $h = 2.5 - 0.25 = 2.25$ และ $d = 1.5$ จะได้ $X = dh = 1.5 \times 2.25 = 3.375$ ดังนั้น $A = 4.5$ ตารางหน่วย

1.2 สามเหลี่ยมผลต่าง

ในยุคกลางการพัฒนาแคลคูลัสไม่ก้าวหน้ามากนัก แนวคิดและวิธีการส่วนใหญ่ยังอิงอยู่กับการวัด และการแบ่งระนาบออกเป็นหน่วยเล็กๆ ที่ไม่สามารถแบ่งได้อีก (indivisible) จนกระทั่งราวคริสต์ศตวรรษที่ 16 เมื่อวิศวกรรมศาสตร์ต้องการแก้ปัญหาเกี่ยวกับจุดศูนย์ถ่วง ทำให้มีความต้องการที่จะใช้คณิตศาสตร์ที่รัดกุมมากยิ่งขึ้น เป็นผลให้มีการพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสดังลำดับต่อไปนี้

- **วาเลริโอ** (Luca Valerio, 1553–1618) ได้ตีพิมพ์ผลงานที่ได้รับแรงบันดาลใจมาจากวิธีการของอาร์คิมีดีส ทำให้แนวคิดของปริพันธ์ในแคลคูลัสเริ่มชัดยิ่งขึ้น

- **เคปเลอร์** (Johannes Kepler, 1571 – 1630) ได้พัฒนาวิธีการหาพื้นที่ของเซเตอร์ของวงรีโดยพิจารณาว่าพื้นที่เป็นผลรวมของเส้น

- **คาวาลีเอรี** (Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 – 1647) ได้ขยายแนวคิดให้ชัดเจนยิ่งขึ้นจนกลายเป็นระเบียบวิธีที่เรียกว่า **วิธีการแบ่งแยกไม่ได้ (method of indivisible)** โดยมองว่า เส้นตรงประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ พื้นที่ผิวประกอบด้วยเส้นจำนวนอนันต์ และปริมาตรประกอบด้วยพื้นที่ผิวจำนวนอนันต์

จากผลงานดังกล่าวทำให้ได้เทคนิคการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการแบ่งย่อยพื้นที่ออกเป็นเส้นเล็ก ๆ แล้วหาผลรวมของเส้นเหล่านี้ ซึ่งแนวคิดนี้คล้ายกับที่ชาวกรีกโบราณได้เสนอไว้ แต่วิธีคิดแบบใหม่นี้มีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมกว่า

แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat, 1601 – 1665) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสผู้มีชื่อเสียงคนหนึ่งในยุคฟื้นฟูศิลปวิทยา (Renaissance) ได้พัฒนาแนวคิดต่าง ๆ โดยอ้างอิงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมและเข้มงวดยิ่งขึ้นจนได้ผลงาน ที่ถือว่ามีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสแบบก้าวกระโดดคือ " การแก้ปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยอาศัยความรู้ทางเรขาคณิต ซึ่งให้หลักการแปลงปัญหาไปเป็นการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ การหาจุดบนเส้นโค้งที่ทำให้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้นขนานกับแกนนอน " โดย **ลากรองจ์ (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813)** ถึงกับยกย่องให้แฟร์มาว่าเป็นผู้คิดค้นแคลคูลัสแนวใหม่

จากผลงานของ **โอเรสเม (Nicolas Oresme, 1323 – 1382)** ที่อาศัยความรู้เกี่ยวกับ **เส้นสัมผัส (tangent line)** ของเส้นโค้ง ทำให้ทราบว่า ค่าต่ำสุดหรือสูงสุงของเส้นโค้งจะอยู่บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรช้าที่สุด จากจุดนี้ถือได้การพัฒนาแคลคูลัสเริ่มอยู่บนรากฐานแขนงของคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **เรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry)**

การอธิบายแนวคิดของอัตราส่วนของสองขนาดที่ไม่สามารถแบ่งแยกได้อีก ถูกอธิบายได้อย่างรัดกุมโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง จากหลักฐานการติดต่อแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างแฟร์มาต์กับ **เดส์การ์ตส์** (René Descartes, 1596 – 1650) ทำให้ทราบว่า แฟร์มาต์ ได้เสนอ " หลักการของการแก้ปัญหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดว่าเป็นการแก้สมการเพื่อหาจุดที่ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นศูนย์ "

ต่อมามีผลงานหลายชิ้นที่ทำพัฒนาแคลคูลัสมากยิ่งขึ้นหลังจากแฟร์มาต์เสนอผลงานดังกล่าว ซึ่งผลงานหลายชิ้นได้มีส่วนในการพัฒนาแคลูลัสแบบคู่ขนานของนิวตันและไลบ์นิตซ์ ทั้งสองที่ได้ชื่อร่วมกันว่าเป็นผู้ประดิษฐ์ แคลคูลัส ถึงแม้จะพัฒนาความรู้ทางแคลคูลัสอย่างอิสระต่อกัน แต่มีหลักฐานเชื่อมโยงบุคคลทั้งสองในทางอ้อม ซึ่งเป็นจดหมายโต้ตอบความรู้ระหว่างเพื่อนร่วมงานของบุคคลทั้งสอง โดยพบว่าเพื่อนร่วมงานของทั้งสองหลายคนเป็นนักคณิตศาสตร์คนเดียวกัน บุคคลเหล่านั้น เช่น

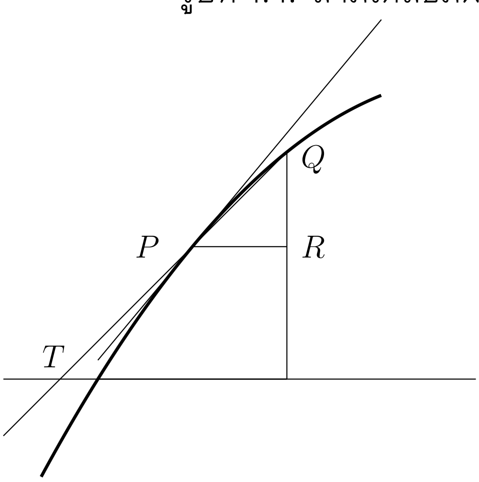
- **บัวเนอร์** (Florimond de Beaune, 1601–1652) ได้ขยายแนวคิดวิธีของเดส์การ์ตส์เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งผ่านทางปัญหาของการหารากซ้ำของสมการพหุนาม

- **ฮูดเด** (Johann van Waveren Hudde, 1628 – 1704) ได้ปรับปรุงวิธีการที่บัวเนอร์ใช้ ให้ง่ายต่อการนำไปใช้จนได้เป็น กฎของฮูดเด (Hudde's rule) โดยกฎนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรากซ้ำและสิ่งที่ต่อมาเรียกว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม ทั้งระเบียบวิธีทางเรขาคณิตวิเคราะห์ของเดส์การ์ตส์ที่บัวเนอร์ใช้และกฎของฮูดเดได้มีส่วนสำคัญในการพัฒนาผลงานทางแคลคูลัสของนิวตัน

- **ไฮย์เคนส์** (Chistiaan Huygens, 1629 – 1695) มีผลงานที่เป็นแรงจูงใจให้ไลบ์นิตซ์พัฒนาแนวทางการเข้าถึงแนวคิดของแคลคูลัสได้ง่ายขึ้น

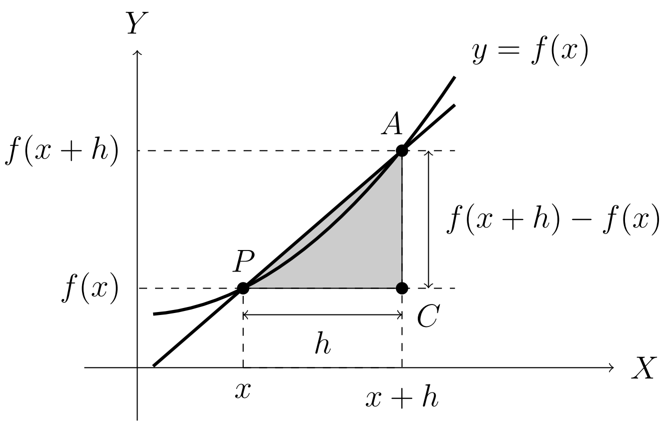
แบร์โรว์ (Isaac Barrow, 1630 – 1677) เป็นอีกบุคคลหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการพัฒนาผลงานของนักคณิตศาสตร์รุ่นถัดมาโดยเฉพาะไลบ์นิตซ์ แบร์โรว์เสนอระเบียบวิธีการพิจารณาเส้นสัม-ผัสเส้นโค้ง ว่าเป็นลิมิตของลำดับของ **เส้นตัดเส้นโค้ง (secant lines)** มีแนวคิดโดยสังเขปดังนี้ " ถ้าเริ่มจากเส้นตัดเส้นโค้งเส้นหนึ่ง จะได้สองคู่อันดับของจุดตัดเหล่านั้นในระบบพิกัดฉาก ให้สร้างเส้นตัดเส้นโค้งเส้นใหม่ซึ่งมีคู่อันดับของจุดตัดเส้นโค้งทั้งสอง โดยที่ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพิกัดที่หนึ่งที่มีค่าน้อยกว่าเดิม ดำเนินกระบวนการสร้างนี้ไปเรื่อย ๆ โดยให้ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพิกัดที่หนึ่งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ในทางเรขาคณิตอาจถือได้ว่า กระบวนการสร้างนี้ให้ลำดับของเส้นตัดเส้นโค้งที่มีลักษณะใกล้เคียงกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งมากขึ้น ดังแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 1.4: สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์



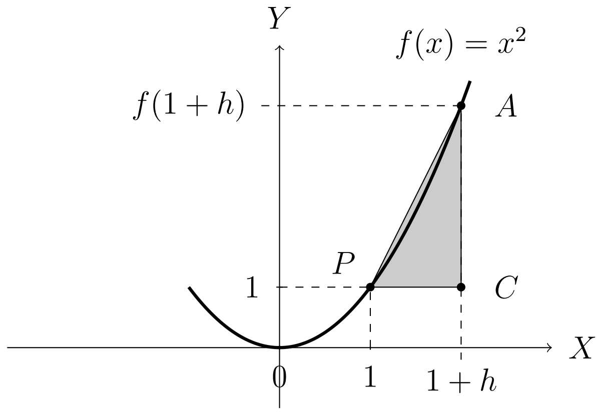
หรืออาจใช้รูปต่อไปนี้แสดงสามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์คือ ΔAPC ซึ่งคล้ายคลึงกับที่เราคุ้นเคยในเรื่องอนุพันธ์ โดย ΔAPC จะขึ้นกับระยะ $h > 0$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ ตามแนวคิดของแบร์โรว์ นั่นหมายความว่าจุด A จะเคลื่อนเข้าใกล้จุด P นี้เป็นจุดเริ่มต้นของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด P นั่นเอง

รูปที่ 1.5: สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ที่ขึ้นกับ h



ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาความชันของจุด $P(1,1)$ บนเส้นโค้ง $y = x^2$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ตอบในรูป h

วิธีทำ



จากรูปจะได้ว่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P ที่ขึ้นกับ h เท่ากับ

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$$

นั่นหมายความว่าเมื่อ h มีค่าน้อยมาก ๆ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P มีค่าใกล้ ๆ 2 นั่นเอง

มีความเป็นไปได้ว่าทั้ง**นิวตันและไลบ์นิตซ์**ได้ศึกษาผลงานนี้และได้รับคำแนะนำจากแบร์โรว์ให้พัฒนาผลงานของตน บทพิสูจน์แสดงภาพแนวคิดของกระบวนการข้างบนหลายอัน มีรูปสามเหลี่ยมคล้าย ๆ กับรูปด้านล่าง ซึ่งต่อมาเรียกชื่อว่า **สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ (Barrow's differential triangle)** เป็นแนวทางให้ไลบ์นิตซ์พัฒนาทฤษฎีบทของตัวเอง

แบรโรว์ และ **ตรูริเชลลิ (Evangelista Torricelli, 1608 – 1647)** ศึกษาปัญหาของการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่แปรผัน พบว่าการดำเนินการที่ต่อมาเรียกว่า**อนุพันธ์**ของระยะทางนี้ จะได้ความเร็ว และถ้าดำเนินการผกผันกระบวนการดังกล่าวจากความเร็วจะได้ระยะทาง แบร์โรว์รับรู้ว่าทั้งสองกระบวนการนั้นผกผันซึ่งกันและกัน (ต่อมาทราบกันว่าคือ อนุพันธ์และปริพันธ์ในแคลคูลัส) แต่ก็ไม่ได้ประโยชน์จากความรู้นี้มากนัก แต่ก็มีอิทธิพลให้นิวตันเสนอทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสในเวลาต่อมา ในอีกทางหนึ่งผลงานเดียวกันของแบร์โรว์ บทพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับ สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ได้ให้แนวคิดแก่ไลบ์นิตซ์ในการประดิษฐ์สัญลักษณ์

$$\frac{dy}{dx}$$

เพื่อแทนสิ่งที่สืบทอดมาจากชาวกรีกโบราณ นั่นคือ **ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก** และได้ให้กฎการดำเนินการเกี่ยวกับสัญลักษณ์เหล่านี้ ทำให้การศึกษาแนวคิดของแคลคูลัสทำได้ง่ายและสามารถต่อยอดออกไปอย่างที่เราได้ใช้อยู่ในปัจจุบัน

1.3 แคลคูลัสยุคใหม่

นิวตัน (Sir Isaac Newton, 1643–1727) ที่ได้ชื่อว่าเป็นผู้ก่อกำเนิดแคลคูลัสเพราะว่ามีผลงานที่สำคัญมากมายต่อการพัฒนารากฐานของแคลคูลัสดังจะเห็นได้จากผลงานที่รวบรวมไว้ในหนังสือชื่อชุด **Principia** ตัวอย่างผลงานที่ได้กล่าวมาแล้วเช่น การเสนอทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส เพื่อแสดงกระบวนการที่ผกผันกันของอนุพันธ์และปริพันธ์ตามที่แบร์โรว์ได้สังเกตเห็น โดยนิวตันได้ใช้ประโยชน์จากวิธีการนี้ในการแก้ปัญหาทางอนุพันธ์ (ซึ่งตอนนั้นเรียกว่า Method of tangents) และนำไปแก้ปัญหาทางปริพันธ์ (ซึ่งตอนนั้นเรียกว่า Method of quadrature) ในผลงาน Method of Fluxions ที่นิวตันได้ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ มีการใช้แนวคิดของ ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีกเช่นกัน ซึ่งนิวตันใช้สัญลักษณ์

รูปที่ 1.6: เซอร์ ไอแซก นิวตัน

$$\dot{x}$$

แทน fluxion ของ x และ

$$\ddot{x}$$

(ความเร่ง) แทน fluxion ของ fluxion ของ x (เทียบได้กับอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองที่ทราบในปัจจุบัน) แต่ระบบการดำเนินการเกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่นิวตัวใช้มีความคลุมเครือเข้าใจยากกว่าของระบบสัญลักษณ์ที่ไลบ์นิตซ์เสนอ ในผลงาน Tractatus de Quadratura Curvarum นิวตันได้ให้ระเบียบวิธีคิดเกี่ยวกับลิมิตเป็นศูนย์และการใช้อนุกรมกำลังแทนฟังก์ชันที่ทราบกันในปัจจุบัน

รูปที่ 1.7: กอทฟริด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์

ไลบ์นิตซ์ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) นอกจากจะประดิษฐ์ระบบสัญลักษณ์ที่ใช้ง่ายกว่าสำหรับศึกษาแนวคิดของอนุพันธ์ (ตามแนวคิดที่ได้จากบทพิสูจน์ของแบร์โรว์ที่กล่าวแล้วข้างต้น) ยังประดิษฐ์ระบบสัญลักษณ์ที่ใช้แทนแนวคิดของปริพันธ์ โดยใช้

$$\int$$

เป็นสัญลักษณ์แทนการบวกของ ขนาดที่แบ่งย่อยไม่ได้อีก ดังที่ได้ระบุในระเบียบวิธีที่คาวาลีเอรีเสนอ ในผลงานชิ้นหนึ่ง ไลบ์นิตซ์ได้เขียนสมการที่คุ้นเคยในปัจจุบันได้แก่

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$$

เป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสเชิงปริพันธ์ ซึ่งสมัยนั้นไลบ์นิตซ์ใช้ชื่อว่า calculus summatorius หรือ calculus integralis ในเวลาต่อมา ระบบสัญลักษณ์ของอนุพันธ์และปริพันธ์ที่เสนอโดยไลบ์นิตซ์ได้รับความนิยมและใช้กันอย่างแพร่หลาย ตามที่เห็นจนถึงปัจจุบัน

การพัฒนาแคลคูลัสในคริสต์ศักราชที่ 19 ยังอิงรากฐานทางคณิตศาสตร์จากผลงานที่สำคัญของนิวตันและไลบ์นิตซ์ มีทั้งที่อยู่บนความรู้ แบบสถิต (static phase) เช่น จากความรู้ในเรื่องการวัด แต่ยังมีการพัฒนาแคลคูลัสโดยอาศัยคณิตศาสตร์ของ infinitesimals ซึ่งตกทอดมาจากชาวกรีกโบราณ และสิ่งที่ปรับปรุงให้รัดกุมกว่าของคาวาลีเอรี ที่ชื่อ indivisible และอีกรากฐานบนความรู้แบบพลวัต (dynamic phase) เช่น การเคลื่อนที่ของจุดในปัญหาของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

1.4 คณิตศาสตร์วิเคราะห์

แต่ก็มีผู้ชี้ให้เห็นถึงจุดอ่อนของการให้เหตุผลทางตรรกในผลงานของนิวตันและไลบ์นิตซ์ เช่น เบอร์คเลย์ (George Berkeley, 1685 – 1753) จากผลงาน Analyst จากจุดนี้ทำให้แคลคูลัสต้องแสวงหารากฐานความรู้ที่รัดกุมกว่าเพื่อมารองรับแนวคิด ถือได้ว่าเป็นช่วงที่รากฐานของแคลคูลัสได้ขยับมาอยู่บนแขนงคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **คณิตศาสตร์วิเคราะห์** (Mathematical Analysis)

รูปที่ 1.8: ออกัสติน หลุยส์ โคชี

ผู้ที่มีบทบาทสำคัญในการเสนอความรู้ทางคณิต–ศาสตร์ ที่ จะ เป็น รากฐาน ที่ รัดกุม เข้ม งวด กว่า ให้ กับ แคลคูลัสคือ **โคชี (Baron Augustin–Louis Cauchy, 1789–1857)** นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศษนั่นเอง และ ความ รู้ ทาง คณิตศาสตร์ ที่ เป็น รากฐาน ดัง กล่าว คือ แนวคิดของลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งภายหลังได้มีบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันที่มีความรัดกุมยิ่งขึ้นอีก อย่างเช่น การเสนอให้เข้าถึงแนวคิดของลิมิตโดยใช้แนวคิดของ

$$\{\varepsilon, \delta\}$$

ซึ่งเสนอโดย **ไวแยร์สตราสต์ (Karl Weierstrass, 1815 – 1897)** และเชื่อว่ายังมีความจำเป็นที่จะพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสให้อยู่บนรากฐานแนวคิดของคณิตศาสตร์ที่สามารถให้เหตุผลได้รัดกุม เข้มงวด และขยายให้ครอบคลุมปัญหาต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นจากความจำเป็นต้องพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ขั้นสูง เพื่อตอบสนองการแสวงหาความรู้ใหม่ของมนุษย์ ที่ไม่มีที่สิ้นสุด

1.5 คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัส ประ–กอบด้วย เซต ค่าสัมบูรณ์ สมการและอสมการ พหุนาม ฟังก์ชัน เลขยกกำลัง ตรีโกณมิติ และ

เราขาคณิตเบื้องต้น

เซต

เซต (Set) เป็นคำอนิยาม หมายถึงคำที่ต้องยอมรับกันในเบื้องต้นว่าไม่สามารถให้ความหมายที่รัดกุมได้ คำว่าเซตจึงหมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ เมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วจะสามารถบอกได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดอยู่นอกกลุ่ม เรียกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิก (element)** ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \in A$ และถ้า a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \notin A$ เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า $1 \in A$ แต่ $4 \notin A$ เป็นต้น การเขียนเซตประกอบด้วย 2 วิธีคือ

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก (Tubular form)** การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา $\{\}$ และใช้เครื่องหมายจุลภาค $(,)$ คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น

2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก (Set builder form)** การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมายทวิภาค $(:)$ คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{\text{ สมาชิก } : \text{ เงื่อนไขของสมาชิก }\}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x : x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า } 5\}$ หมายถึง $A = \{1, 2, 3, 4\}$

สำหรับเซต A ที่มีสมาชิกทุกตัวอยู่ในเซต B จะกล่าวว่า A เป็น **เซตย่อย (subset)** ของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ ในเบื้องต้นเพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้ กำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$\mathbb{C}$	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน	$\mathbb{Q}^c$	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	แทนเซตของจำนวนจริง	$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ	$\mathbb{N}$	แทนเซตของจำนวนนับ

ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ เมื่อ $a < b$ **ช่วง (interval)** ของจำนวนจริงต่าง ๆ คือ

$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	เขียนแทนด้วย	(a, b)
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, b)$
$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$(a, b]$
$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	เขียนแทนด้วย	(a, ∞)
$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	เขียนแทนด้วย	$[a, \infty)$
$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	เขียนแทนด้วย	$(-\infty, b)$
$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	เขียนแทนด้วย	$(-\infty, b]$

สำหรับเซตที่ไม่มีสมาชิกเขียนแทนด้วย $\varnothing$ เรียกว่า **เซตว่าง (empty set)** และ **เอกภพสัมพัทธ์ (universe)** คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ เมื่อให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ นิยามการดำเนินการบนเซตดังต่อไปนี้

ยูเนียน (union)	$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ หรือ $x \in B\}$
อินเตอร์เซชัน (intersection)	$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ และ $x \in B\}$
ผลต่าง (difference)	$A - B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A$ และ $x \notin B\}$
ส่วนเติมเต็ม (complement)	$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$

สมการและอสมการ

สมบัติเบื้องต้นของการเท่ากัน ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. สมบัติสะท้อน (Reflective law) $a = a$
2. สมบัติสมมาตร (Symmetric law) ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด (Transitive law) ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

กฎไตรวิภาค (Trichotomy law) คือสัจพจน์ที่กล่าวว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1.5.1 สำหรับจำนวนจริง a, b และ c

1. ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
2. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
3. ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
4. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
5. $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

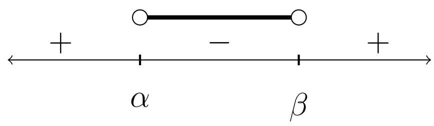
6. $a^2 + b^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ และ $b = 0$

ทฤษฎีบท 1.5.2 ให้ $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว

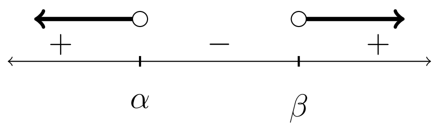
1. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
2. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
3. ถ้า $a > b$ และ $x > y$ แล้ว $a + x > b + y$
4. ถ้า $a > b$ และ $x > 0$ แล้ว $ax > bx$
5. ถ้า $a > b$ และ $x < 0$ แล้ว $ax < bx$

ให้ $+$ แทนผลคูณที่มากกว่า 0 และ $-$ แทนผลคูณที่น้อยกว่า 0 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha < \beta$ จะได้ข้อสรุปดังนี้

1. เซตคำตอบของ $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ คือ (α, β)



2. เซตคำตอบของ $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ คือ $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$



ค่าสัมบูรณ์

ในเบื้องต้น **ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)** ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางจาก x ไปยัง 0 หรือดังบทนิยาม

บทนิยาม 1.5.3 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด **ค่าสัมบูรณ์** ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

ทฤษฎีบท 1.5.4 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $|xy| = |x||y|$
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $x \leq |x|$

ทฤษฎีบท 1.5.5 อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

ทฤษฎีบท 1.5.6 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

พหุนาม

บทนิยาม 1.5.7 ให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ แล้ว

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เรียกว่า **พหุนาม (polynomial)** และ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ (coefficient)** ของ
$x^n, x^{n-1}, ..., x, 1$ ตามลำดับ ถ้า $a_n \neq 0$ เรียกว่า พหุนามดีกรี n และเขียน n แทนด้วย deg $P(x)$
เรียก $a_n \neq 0$ ว่า **สัมประสิทธิ์ตัวนำ (leading coefficient)**
กรณี $a_n = 1$ เรียก $P(x)$ ว่า **พหุนามโมนิก (monic polynomial)**

ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม แล้ว $P(x) = Q(x)$ ถ้า deg $P(x) =$ deg $Q(x)$ และอยู่ในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

ซึ่งทุกสัมประสิทธ์เท่ากันทุกคู่คือ $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ..., a_n = b_n$
หรือกล่าวอีกอย่างคือ

$$P(x) = Q(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \deg P(x) = \deg Q(x) \quad \text{และ} \quad P(x) = Q(x) \quad \text{ทุกๆ } x \in \mathbb{R}$$

ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm) สำหรับพหุนาม
ให้ $P(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $S(x)$ ไม่ใช่พหุนามศูนย์ แล้วจะมีพหุนาม $Q(x)$ และ $R(x)$ เพียงคู่เดียวที่สอดคล้องกับ

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \text{เมื่อ } R(x) = 0 \text{ หรือ } \deg R(x) < \deg S(x)$$

เรียก $Q(x)$ ว่า**ผลหาร (quotient)** และ $R(x)$ ว่า**เศษเหลือ (remainder)**
กรณี $R(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า $S(x)$ หาร $P(x)$ ลงตัว หรือ $S(x)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
ทฤษฎีบทเศษเหลือ (remainder theorem)
ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \quad \text{หาร} \quad P(x) \quad \text{เศษเหลือเท่ากับ} \quad P(c)$$

ดังนั้นถ้า $P(c) = 0$ แล้ว $x - c$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

บทนิยาม 1.5.8 ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม ถ้า $P(\alpha) = 0$ จะเรียก α ว่า**ราก (root)** ของพหุนาม $P(x)$ หรือ α เป็น**คำตอบ (solution)** ของสมการ $P(x) = 0$

ข้อสังเกต

1. α เป็นรากของก็ต่อเมื่อ $x - \alpha$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
2. ถ้า $P(x) = Q(x)S(x)$ แล้วรากทุกตัวของ $Q(x)$ และรากทุกตัวของ $S(x)$ เป็นรากของ $P(x)$

ฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.5.9 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product)** นิยามโดย

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

บทนิยาม 1.5.10 จะกล่าวว่า $f \subseteq A \times B$ เป็น**ฟังก์ชัน (function)** ก็ต่อเมื่อ

$$\text{แต่ละ } (x_1, y_1) \text{ และ } (x_2, y_2) \text{ ใน } f \text{ ถ้า } x_1 = x_2 \text{ แล้ว } y_1 = y_2$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $y = f(x)$

บทนิยาม 1.5.11 f เป็น**ฟังก์ชันจาก** A **ไป** B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$
ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $\text{Dom}(f) = A$
3. $\text{Ran}(f) \subseteq B$

เมื่อ $\text{Dom}(f) = \{x \in A : (x, y) \in f\}$ เรียกว่า **โดเมน (domain)** ของ f
และ $\text{Ran}(f) = \{y \in A : (x, y) \in f\}$ เรียกว่า **เรนจ์ (range)** ของ f

บทนิยาม 1.5.12 เรียก $f : A \to B$ ว่า**ฟังก์ชันมีขอบเขต (bounded function)** บน $D \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อมี $M > 0$ ซึ่ง $|f(x)| \le M$ ทุก ๆ $x \in D$

บทนิยาม 1.5.13 ให้ $f : A_1 \to \mathbb{R}$ และ $g : A_2 \to \mathbb{R}$ โดยที่ $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ กำหนดให้ $A = A_1 \cap A_2$ นิยาม**พีชคณิตของฟังก์ชัน (algebra of functions)** ดังนี้

$f + g : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$f - g : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(f-g)(x) = f(x) + g(x)$
$fg : A \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
$\dfrac{f}{g} : A - \{x \in A \,:\, g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$	กำหนดโดย	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

บทนิยาม 1.5.14 กำหนดให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า

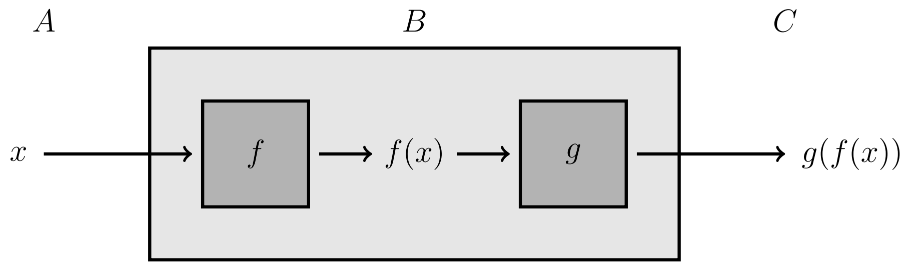
1. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injection)** หรือ ฟังก์ชัน 1–1 ก็ต่อเมื่อ

$$\text{แต่ละ } x_1, x_2 \in A \quad \text{ถ้า} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \text{แล้ว} \quad x_1 = x_2$$

2. f เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง (surjection)** ก็ต่อเมื่อ $\text{Ran}(f) = B$
3. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijection)** ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1–1 และ ทั่วถึง

บทนิยาม 1.5.15 ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ แล้ว $g \circ f : A \to C$ เรียกว่า**ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



บทนิยาม 1.5.16 ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันผกผันได้ (invertible function)** ก็ต่อเมื่อ

$$f^{-1} = \{(y, x) \,:\, (x, y) \in f\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

และเรียก f^{-1} ว่า**ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)** ของ f

ทฤษฎีบท 1.5.17 ให้ $f : A \to B$ แล้วจะได้ว่า

$$f \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1–1}$$

ชนิดของฟังก์ชันที่ควรทราบ

1. ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) $\qquad f(x) = x$

2. ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) $f(x) = ax + b$
3. ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) $f(x) = ax^2 + bx + c$
4. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute value function) $f(x) = a|x - h| + k$
5. ฟังก์ชันกำลัง (Power function) $f(x) = ax^n$
6. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
7. ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

   เมื่อ $p(x), q(x)$ เป็นพหุนาม และ $q(x) \neq 0$

โดเมนของฟังก์ชันข้อ 1 ถึง 6 คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของฟังก์ชันข้อ 7 เท่ากับ $\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$

เลขยกกำลัง

บทนิยาม 1.5.18 ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง (power of a number)** นิยามโดย

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

เมื่อ a เรียกว่า **ฐาน (basis)** และ n เรียกว่า **เลขชี้กำลัง (exopnent)**
นิยาม $a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงนิยาม $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

สมบัติเบื้องต้นของเลขยกกำลัง ให้ a เป็นจำนวนจริง และ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $(a^x)^y = a^{xy}$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ เมื่อ $a \neq 0$

ขยายแนวคิดเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งตัวหารร่วม–มากของ m และ n เท่ากับ 1 ถ้า นิยาม $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง นิยาม

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

และขยายแนวคิดไปยังจำนวนตรรกยะลบและจำนวนจริงได้ แต่ไม่ขอกล่าวในที่นี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันโดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว $y = \sqrt[n]{f(x)}$ เรียกว่า **ฟังก์ชันกรณฑ์ (radical function)**

สมบัติเบื้องต้นทางพีชคณิตที่อาจใช้ในแคลคูลัส เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. กำลังสองสัมบูรณ์

   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. กำลังสามสัมบูรณ์

   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3. ผลต่างกำลังสอง $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

4. ผลต่างกำลังสาม $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

5. ผลบวกกำลังสาม $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. ทฤษฎีบททวินาม ให้ n เป็นจำนวนนับ

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

เมื่อ $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ โดยที่ $n, r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le r \le n$
นิยาม m แฟคทอเรียล คือ $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $0! = 1$

ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียก

$$\{(x,y) : y = a^x\}$$

ว่า**ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function)** เนื่องจากฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่ามีฟังก์ชันผกผัน ดังนั้นเรียกว่าฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลังว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function)** เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$ นิยามโดย

$$y = \log_a x \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad x = a^y$$

ดังนั้น $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$ ในกรณีที่ $a = 10$ เรียกว่า **ลอการิทึมสามัญ (common logarithm)** เขียนแทนด้วย $\log x$ และกรณี $a = e$ เรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm)** เขียนแทนด้วย $\ell \text{n} x$ โดยที่ e คือ **ค่าคงตัวออยเลอร์ (Euler's constant)** ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ $2.71828182845...$

สมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

ทฤษฎีบท 1.5.19 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ m เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

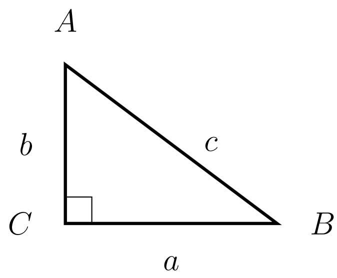
1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{y}{x}\right) = \log_a y - \log_a x$
3. $\log_a x^m = m \log_a x$
4. $a^{\log_a x} = x$

สำหรับ $a, b > 0$ และ $a, b \neq 1$ สามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมได้โดย

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ตรีโกณมิติ

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

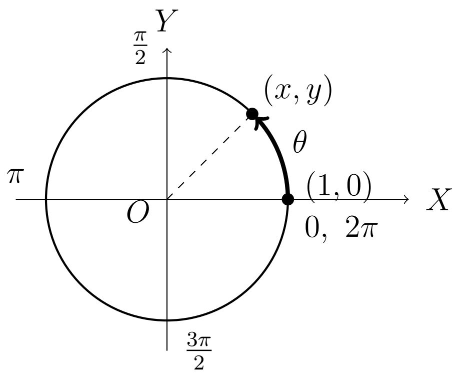


นิยามค่าตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบคือ ไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) แทนเจนต์ (tangent) โคแทนเจนต์ (cotangent) เซแคนต์ (secant) และโคเซแคนต์ (cosecant) ดังนี้

$$\sin B = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c} \qquad \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a}$$

$$\csc B = \frac{1}{\sin B} = \frac{c}{b} \qquad \sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{c}{a} \qquad \cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

ขยายแนวคิดไปยังมุม θ ซึ่งมีหน่วยเป็นเรเดียนคือความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยจุดเริ่มต้นที่ $(1,0)$ ไปสิ้นสุดที่ (x,y) เมื่อวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นบวก และวัดแบบตามเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นลบ จะได้ว่า $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ว่า 180° มีค่าตรงกับ π เรเดียน



เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

18. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

19. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

20. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

21. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

22. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

23. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

24. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

25. $\sin x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$

26. $\cos x\sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$

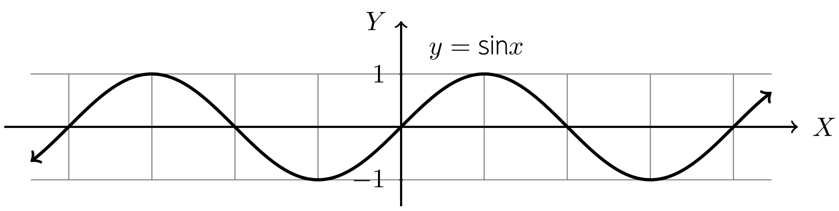
27. $\cos x\cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

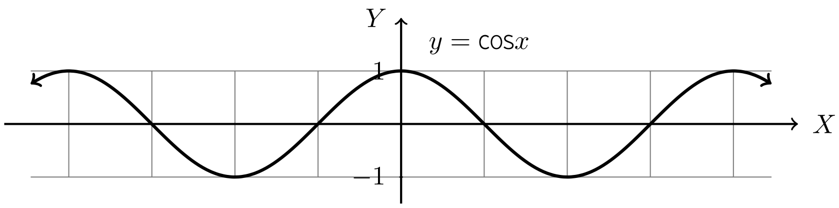
28. $\sin x\sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$

ค่าตรีโกณมิติมาตรฐานที่ควรทราบ

ตรีโกณมิติ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะเรียก $y = \sin x$ ว่า**ฟังก์ชันไซน์ (sine function)** และ $y = \cos x$ ว่า**ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function)** แสดงกราฟได้ดังนี้ โดยแกน X มีความกว้างช่องละ $\frac{\pi}{2}$





นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติอีก 4 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent fuction) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent fuction) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant fuction) และฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant fuction) ได้ในทำนองเดียวกัน เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric function)** สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
ไซน์	$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
โคไซน์	$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
แทนเจนต์	$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
โคแทนเจนต์	$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
เซแคนต์	$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
โคเซแคนต์	$y = \mathrm{arccsc}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

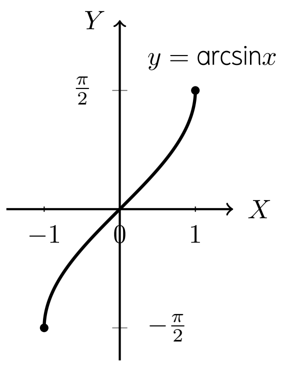
จะเห็นว่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ดังนั้นการศึกษาฟังก์ชันผกผันจึงต้องกำ–หนดโดเมนเพื่อให้เป็นฟังก์ชัน 1–1 ฟังก์ชันไซน์มีโดเมนเป็น $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และฟังก์ชันโคไซน์มีโดเมน $[0, \pi]$

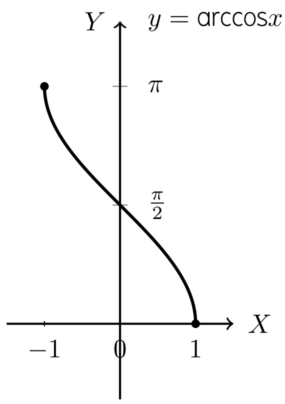
1. เรียกฟังก์ชันผกผันของไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กไซน์ (arcsine function)** เขียนแทนด้วย arcsin นิยามโดย

$$y = \arcsin x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \sin y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

2. เรียกฟังก์ชันผกผันของโคไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์ (arccosine function)** เขียนแทนด้วย arccos นิยามโดย

$$y = \arccos x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \cos y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [0, \pi]$$





ในทำนองเดียวกันฟังกชันผกผันอีก 4 ฟังก์ชันคือ อาร์กแทนเจนต์ (arctangent function) อาร์กโคแทนเจนต์ (arccotangent function) อาร์กเซแคนต์ (arcsecant function) และอาร์กโคเซแคนต์ (arccosecant function) เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric function)** สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
อาร์กไซน์	$y = \text{arcsin}x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
อาร์กโคไซน์	$y = \text{arccos}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
อาร์กแทนเจนต์	$y = \text{arctan}x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
อาร์กโคแทนเจนต์	$y = \text{arccot}x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
อาร์กเซแคนต์	$y = \text{arcsec}x$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$[0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi]$
อาร์กโคเซแคนต์	$y = \text{arccsc}x$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	$[-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2}]$

เรขาคณิตวิเคราะห์

จุดในทางคณิตศาสตร์เป็นอนิยามแต่เป็นทราบกันดีว่าจุดมีความสำคัญโดยเฉพาะการใช้บอกตำแหน่งต่าง ๆ โดยมีแกนอ้างอิง เรียกแกนในแนวนอนว่า **แกน X (X–axis)** และแกนในแนวตั้งว่า **แกน Y (Y–axis)** เรียกจุดตัดของแกนทั้งสองว่า **จุดกำเนิด (origin)** แทนด้วยคู่อันดับ $(0,0)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงจุดคือคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ระยะทาง (distance) ระหว่าง $A(x_1,y_1)$ และ $B(x_2,y_2)$ เขียนแทนด้วย AB นิยามโดย

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ความชัน (slope) ของส่วนเส้นตรงที่ลากจาก $A(x_1,y_1)$ และ $B(x_2,y_2)$ เขียนแทนด้วย m_{AB} บางครั้งถ้าไม่สนใจ A และ B จะเขียนย่อ ๆ ด้วย m นิยามโดย

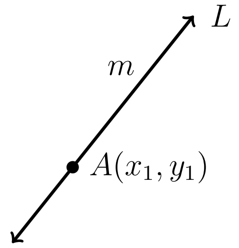
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

เมื่อ $x_1 \neq x_2$ กรณีที่ $x_1 = x_2$ ความชันไม่มีค่าและส่วนเส้นตรง A และ B จะเป็นแส้นในแนวตั้ง

ให้ $A(x_1,y_1)$ เป็นจุดและ m คือความชัน ให้ L คือเซตของจุด (x,y) โดยที่ความชันของ (x,y) และ $A(x_1,y_1)$ เท่ากับ m เรียกว่า **เส้นตรง (line)** ที่มีความชัน m ผ่านจุด A หรือหมายถึงเซต

$$L = \{(x,y) : y = m(x-x_1)+y_1\}$$

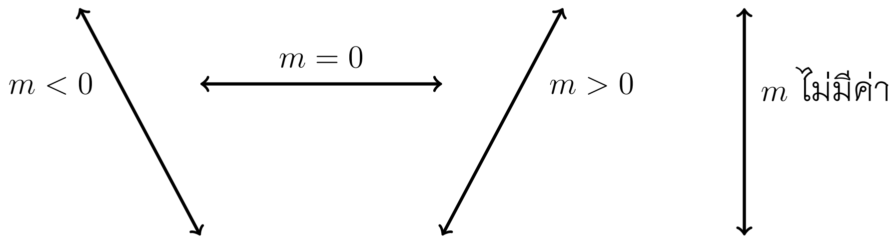
แสดงเส้นตรง L ได้ดังรูป



เรียก $y = m(x - x_1) + y_1$ ว่า **สมการเส้นตรง (equation of a line)** สามารถเขียนในรูป

$$y = mx + c$$

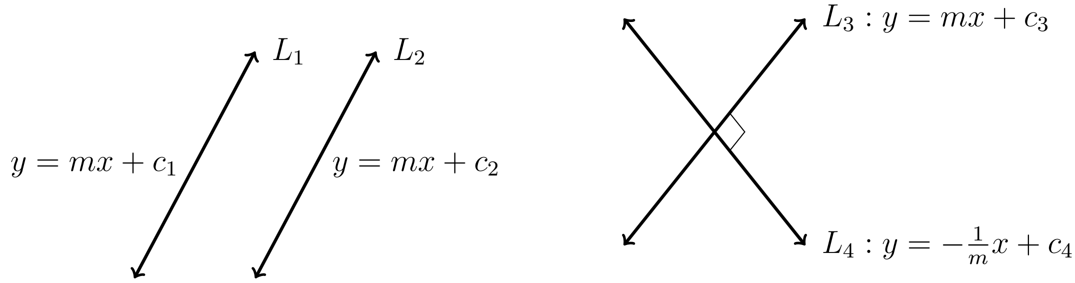
ในกรณีที่ $m = 0$ จะเรียก **เส้นตรงแนวนอน (horizontal line)** ซึ่งมีสมการเป็น $y = y_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A และในกรณีที่ m หาค่าไม่ได้ จะเรียก **เส้นตรงแนวยืน (vertical line)** ซึ่งมีสมการ $x = x_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A ดังนั้นเราอาจแบ่งเส้นตรงเป็น 4 แบบโดยใช้ความชันคือ 1. $m > 0$ 2. $m < 0$ 3. $m = 0$ และ 4. m ไม่มีค่า แสดงตัวอย่างได้ดังรูป



ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

1. L_1 **ขนาน (parallel)** กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. L_1 **ตั้งฉาก (perpendicular)** กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

อาจแสดงตัวอย่างได้ดังรูป



ในกรณีเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมขนานกับเส้นตรงใด ๆ ที่ความชันไม่มีค่าเสมอ เพราะทุกเส้นเป็นเส้นตรงแนวตั้ง และเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมตั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่มีความชันเท่ากับ 0 หรือเส้นตรงแนวนอนเสมอ

ให้ C เป็นเซตของจุด (x, y) ที่ห่างจากจุดคงที่ (h, k) ด้วยระยะคงที่ r เรียกว่า **วงกลม (circle)** ที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r ดังนั้น

$$C = \{(x, y) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

เรียก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ **สมการวงกลม (equation of a circle)**

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงอธิบายวิธีการตรวจสอบปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น 1/3 เท่าของปริมาตรของปริซึมที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน เพราะเหตุใดพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

2. พิจารณารูปหลายเหลี่ยมที่แบ่งวงกลมรัศมี 1 ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

   2.1 จงหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมเมื่อ $n = 10, 100$ และ 1000 โดยใช้เครื่องคำนวณ

   2.2 จงคาดคะเนว่าพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมดังกล่าวจะมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมต่อไปนี้ โดยใช้วิธีของอาร์คิมีดีส

   3.1 พาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 2$

   3.2 พาราโบลา $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 2x + 3$

   3.3 พาราโบลา $y = x^2 + 1$ และเส้นตรง $y = x + 3$

   3.4 พาราโบลา $y = -x^2$ และเส้นตรง $y = -x - 2$

   3.5 พาราโบลา $y = -x^2 + 2$ และเส้นตรง $y = x$

4. จากตัวอย่าง 1.1.2 จงพิสูจน์ว่า $h = 4s$

5. จงหาความชันของจุด P บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ตอบในรูป h

   5.1 $f(x) = x^2$ และ $P = (2, 4)$

   5.2 $f(x) = x^3$ และ $P = (-1, -1)$

   5.3 $f(x) = (x-1)^2$ และ $P = (2, 1)$

6. กำหนดให้ $P = (0, 0)$ และ $f(x) = \sin x$

   6.1 จงหาความชันของจุด P บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยใช้สามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ในรูป h

   6.2 จากข้อ 5.1 จงหาความชันที่จุด P เมื่อ $h = 0.1, 0.01$ และ 0.001 โดยใช้เครื่องคำนวณ

   6.3 จงคาดคะเนว่าความชันที่จุด P จะมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เมื่อ h มีค่าน้อย ๆ

7. ให้ $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} : -100 \leq x \leq 100\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์
   $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2$ หาร x ลงตัว $\}$ และ $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3$ หาร x ลงตัว $\}$
   จงหาจำนวนสมาชิกของ $A^c - B^c$

8. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   8.1 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + y = 5\}$

   8.2 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + 2y < 7\}$

8.3 $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, xy = 12\}$

8.4 $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, xy = 12\}$

8.5 $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy + x = 35\}$

8.6 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0\}$

9. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

9.2 $f(x) = |x+1| - |x-1|$

9.3 $f(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

9.4 $f(x) = \sin^2(x^2+1)$

10. จงหา $f^{-1}(x)$ ถ้ากำหนดให้ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

11. ให้ $f(x) = x^2 + 3x - 1$ จงหา $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $h > 0$

12. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

12.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 1 - 2x$

12.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^3 + 1$

12.3 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

12.4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt[3]{x}$

13. กำหนดให้ $2 < x < 3$ จงหาค่าของ $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

14. จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $|x-1| < 5$ และ $|x-2| > 2$

15. ให้ $0 < a < b$ และ $3(a^2 + b^2) = 10ab$ แล้ว $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3$ มีค่าเท่าใด

16. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ

$$P(n) = Q(n) \quad \text{สำหรับ } n = 1, 2, 3, ..., 2551 \quad \text{และ} \quad P(2552) = Q(2552) + 1$$

จงหาค่าของ $P(0) - Q(0)$

17. ให้ α, β และ γ เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3 - 9x + 5 = 0$ ค่าของ $(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\gamma)^2$ เท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ และ $x + 3$ ต่างหาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 แล้ว $a + 2b$ มีค่าเท่าใด

19. ถ้าพหุนาม $x^{2559} - ax - 1$ หารด้วย $x^2 - 1$ เหลือเศษ $r(x)$ และ $r(2) = 123$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. จงหาเซตคำตอบของสมการ

20.1 $|x+1|=4$

20.2 $|3x+\frac{1}{3}|=3$

20.3 $|x^2-20|=5$

20.4 $|x^2-4|=0$

20.5 $|3x-1|=|2x+1|$

20.6 $|x-6|=|3-2x|$

20.7 $|2x+4|=|x-4|$

20.8 $|1-x|=1-x$

20.9 $|x^2+x-6|=6-x-x^2$

20.10 $|x^2+3x-2|=3x+7$

20.11 $|2x+1|=x$

20.12 $|2x+3|=x-5$

20.13 $(|x|-4)(|x|+3)=-6$

20.14 $|x+1|+2=|3x+1|$

20.15 $|2x-1|-|3-x|=3$

21. ถ้า a,b และ c เป็นรากของสมการ $x^3-7x^2-6x+5=0$ แล้ว $(a+b)(a+c)(b+c)$ มีค่าเท่าใด

22. มีจำนวนเต็ม a ทั้งหมดกี่จำนวนที่ทำให้ $x^2+100>2ax$ และ $x^2+a^2>10x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

23. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+11<2x^2-x-4<x^2-2x+2$

24. จงหาเซตคำตอบของสมการ $|(2x-1)-(x^2+2x+3)|=|2x-1|+|x^2+2x+3|$

25. จงหาเซตคำตอบของสมการ $||x-1|+1|=||x+1|-1|$

26. จงหา y ที่เป็นจำนวนจริงซึ่ง $y=\dfrac{x|x|-x^2}{x^2-x|x|}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

27. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(|x|-1)(|x|-3)(|x|+3)(|x|-7)=150$

28. ถ้า (a,b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2-5x-6|>x^2-5x-6$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่าใด

29. ถ้า $|||x+1|+2|+3|=8$ และ $|15-|10-|5-y|||=20$ เมื่อ $x,y<0$ แล้ว $x-y$ มีค่าเท่าใด

30. ถ้า $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{|2-x|-1}{x+|x|-1}>1\right\}$ และ $A\cap[0,2]=(a,b)$ แล้ว $3a+2b$ มีค่าเท่าใด

31. จงหาจำนวนจริง x ที่มากที่สุดที่สอดคล้อง $\left|\dfrac{2x^2-4}{3}\right|\geq 2x^2$

32. กำหนดให้ x สอดคล้องอสมการ $|x-1|\leq 2$ จงหาค่ามากสุดของ $|x^2-1|$

33. ให้ A เป็นเซตคำตอบของ $\dfrac{|2x-1|}{x-1}\leq 1$ และ B เป็นเซตคำตอบของ $x^2+2x\leq x+6$ จงหาเซตของ $B\cap A^c$

34. จงหาเซตคำตอบของสมการ

34.1 $4^x=8^{2x+1}$

34.2 $4^x-5\cdot 2^x+6=0$

34.3 $2+3(15^{|x|})=5^{|x|}+25(3^{|x|+1})$

34.4 $3(9+3^{|x|+|x+4|}) = 3^{|x+4|} + 3^{|x|+4}$

34.5 $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$

34.6 $\log(x^2+1) - \log(x^2+x-1) = 0$

34.7 $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = 7 + 2\log_{64} x$

34.8 $\log_2 (x+7)^2 + 4\log_4 (x-3) = 3\log_8 (64x^2 - 256x + 256)$

35. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

35.1 $3^{2x+10} - 4(3^{x+6}) + 27 \leq 0$

35.2 $\log_x \left(\frac{2}{x-1}\right) \geq 1$

36. จงหาจำนวนจริง x ที่สอดคล้อง $(3x^2 - 11x + 7)^{3x^2+4x+1} = 1$

37. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, a+1)$ และ $(2, b+2)$

38. จงหาสมการที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 12$ และผ่านจุด $(1, -1)$

39. จงหาจุดบนเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 1)$มากที่สุด

40. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและผ่านจุด $(1, 3)$

41. จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, 4)$

42. ถ้าวงกลมหนึ่งมีจุดศูนย์กลางคือจุด A อยู่บนเส้นตรง $x+y+4 = 0$ และผ่านจุด $B(-5, -2)$ และ $C(-2, 5)$ จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

43. จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(1, 3)$ มากที่สุด

บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่อง

จุดเริ่มต้นที่สำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัสคือการรู้จักคำว่า **ลิมิต (limit)** ในบทนี้เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาในบทต่อไป

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

การให้ความหมายของคำว่าลิมิต เริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

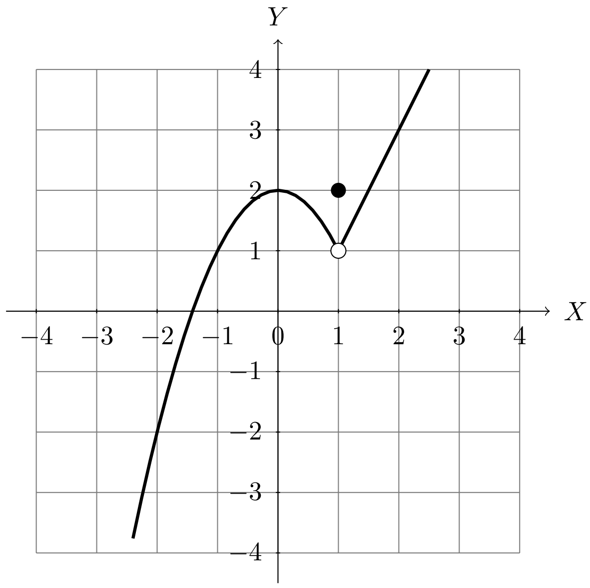
เมื่อสนใจค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่าของ x ใกล้ 1 อาจพิจารณาค่า x สำหรับบางค่าดังนี้

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.5	1.75		1.5	2
0.8	1.36		1.4	1.8
0.9	1.19		1.1	1.2
0.99	1.0199		1.01	1.02
0.999	1.001999		1.001	1.002
0.9999	1.00019999		1.0001	1.0002
0.99999	1.0000199999		1.00001	1.00002

เมื่อพิจารณา $f(x)$ จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ไม่ว่าให้ค่า x เข้าใกล้ลักษณะ $x < 1$ หรือ $x > 1$ ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวว่า **ลิมิตของฟังก์ชัน** (limit of function) $f(x)$ ขณะ x **เข้าใกล้** 1 มีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

จะเห็นได้ว่าการพิจารณาค่า x เข้าใกล้ 1 จะไม่พิจารณากรณี $x = 1$ และเมื่อแสดงฟังก์ชัน $y = f(x)$ ด้วยกราฟต่อไปนี้



ข้อสังเกตว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f(1)$

เมื่อพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เราต้องพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ใน Dom(f) ที่อยู่ใกล้ ๆ a ดังนั้นการหาลิมิตที่จุด a ต้องมีค่าอื่น ๆ ใกล้จุด a ให้พิจารณาเสมอ เราเรียกจุด a ลักษณะนี้ว่า เป็น**จุดลิมิต (limit point)** ของ Dom(f) ตัวอย่างเช่น 0 เป็นจุดลิมิตของ $(-1,1)\cup\{2\}$ แต่ 2 ไม่เป็นจุดลิมิตของ $(-1,1)\cup\{2\}$

ข้อสังเกต 2.1.1 จุดลิมิตไม่จำเป็นต้องอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันเสมอไป เช่น 0 เป็นจุดลิมิตของโดเมน $(-1,0)\cup(0,1)$ แต่ 0 ไม่เป็นสมาชิกของ $(-1,0)\cup(0,1)$

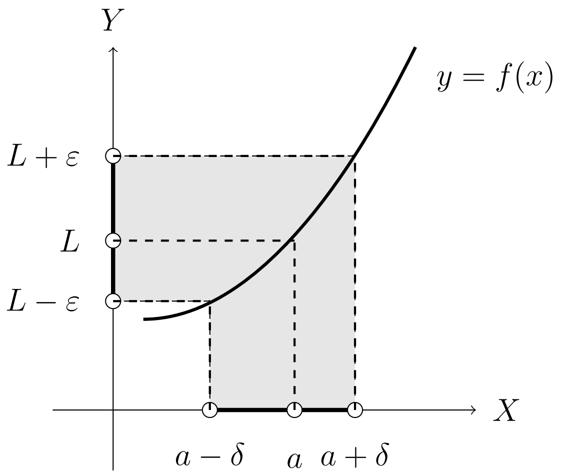
ตัวอย่าง 2.1.2 จงพิจารณาว่าจุด a เป็นจุดลิมิตของเซตต่อไปนี้หรือไม่

1. $(-1,3)$ เมื่อ $a=0$
2. $(0,3)$ เมื่อ $a=3$
3. $[1,4]$ เมื่อ $a=1$
4. $(1,2)\cup\{3\}$ เมื่อ $a=3$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{เรียกว่าลิมิตของ } f(x) \text{ ขณะ } x \text{ เข้าใกล้ } a \text{ เท่ากับ } L$$

ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$



ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ a เป็นจุดลิมิต c เป็นค่าคงตัว และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to a} c = c$ 2. $\lim_{x \to a} x = a$ 3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ a เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ เมื่อ $L, M \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
2. $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = LM$
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)| = |L|$
6. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)$
2. $\lim_{x\to -1}(2-x)(3+x)$
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1}$
4. $\lim_{x\to 1} x\sqrt{x+1}$
5. $\lim_{x\to 2}(|x|-x)$
6. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+|x|}{x-|x|}$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
3. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$
4. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$
5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$
6. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{1 - x^2}$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 2x}$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{2x} - 2^{x+1} + 1}{2^x - 1}$

ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกดีกรีสอง ถ้า $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ จงหาค่าของ $f(3)$

ตัวอย่าง 2.1.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to -3} \frac{2|x+1| - |1-x|}{x^2-9}$

ตัวอย่าง 2.1.13 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

ตัวอย่าง 2.1.14 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{4x^2+9}-5}$

3. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^2-1}{\sqrt{|1-z|}}$

ตัวอย่าง 2.1.15 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}-1}$

ตัวอย่าง 2.1.16 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2+x}}{x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{1-x}-3}$

ตัวอย่าง 2.1.17 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}$

ตัวอย่าง 2.1.18 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{x-8}}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงแสดงค่าลิมิตต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

1.1 $\lim\limits_{x \to 1} 1 - x$

1.2 $\lim\limits_{x \to -1} 2x$

1.3 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{3}$

2. จงแสดงค่าลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x \to 0} (x-1)\sqrt{2+x}$

2.2 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x|+x}{x^2-1}$

2.3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x^3-x-2}$

3.2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

3.3 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

3.4 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$

3.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}$

3.6 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{3x^3+6x^2-2x-4}$

3.7 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}}$

3.8 $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1}$

3.9 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$

3.10 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$

3.11 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^3-2x-4}$

3.12 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}{x+4}$

3.13 $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^{-3}-x^{-2}+7x^{-1}-1}{7-x}$

3.14 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{8x^{-3}+2x^{-2}-4x^{-1}-1}{x+4}$

3.15 $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

3.16 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

3.17 $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2+t}\right)$

3.18 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{x-2}-1}$

4.2 $\lim\limits_{u \to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

4.3 $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-1}}$

4.4 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^4+9x^2}+5x}{x+4}$

4.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

4.6 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$

4.7 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{4-x}}-\sqrt{5}}{x}$

4.8 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

4.9 $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

4.10 $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x-4\sqrt[3]{x}}$

4.11 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

4.12 $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

5. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

5.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

5.2 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-2}{\sqrt{x+2}-1}$

5.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

5.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-1}$

6. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-3^{x+1}+2}{3^x-1}$

6.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^{x+1}-5^x}{5^{x+2}}$

6.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot 3^x-3^x+x-1}{x-1}$

6.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{x+2}+24}{5^x-1}$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ในรูปตัวแปร x

7.1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

7.2 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

7.3 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$

7.4 $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(x+h-1)^2-x^2}{h-1}$

8. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-1|-3x+1}{|1-x|-2}$

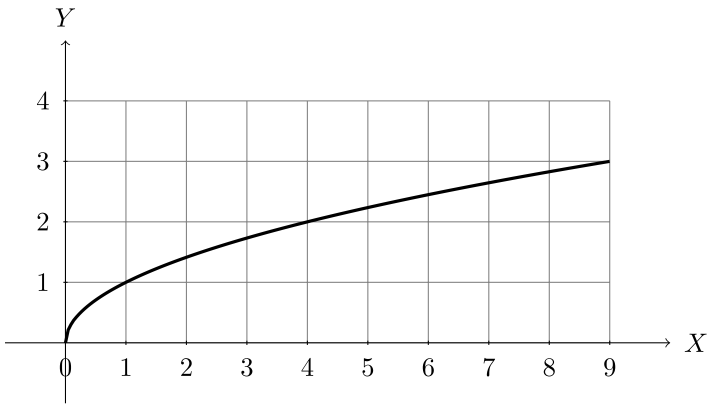
9. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x^2-1)^2(x+1)^2}{(x^2-5x+4)(x-x^3)}$

10. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}}$

11. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกดีกรีสอง ถ้า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=5$ จงหาค่าของ $f(4)$

2.2 ลิมิตด้านเดียว

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่า $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$ และจุด 0 เป็นจุดลิมิต จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อค่า x เข้าใกล้ 0 ในลักษณะ $x > 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา แต่เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0 ในลักษณะ $x < 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะไม่มีค่าในจำนวนจริง ทำให้ลิมิตของ $f(x)$ มีเพียงค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

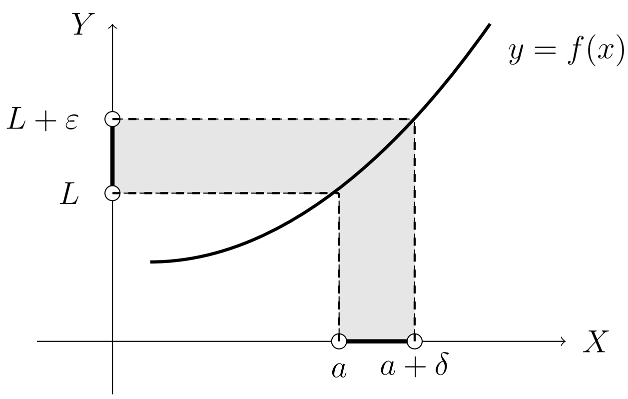
เรียกว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ในทำนองเดียวกันลิมิตของ $f(x) = \sqrt{-x}$ ที่จุด 0 จะมีค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายเท่านั้น เรียกค่าลิมิตนี้ว่าลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 เรียกลิมิตทั้งสองแบบนี้ว่า **ลิมิตด้านเดียว (One-sided limit)**

บทนิยาม 2.2.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (a, \infty)$ แล้ว

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

เรียกว่า**ลิมิตขวา (right-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D, \quad a < x < a + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

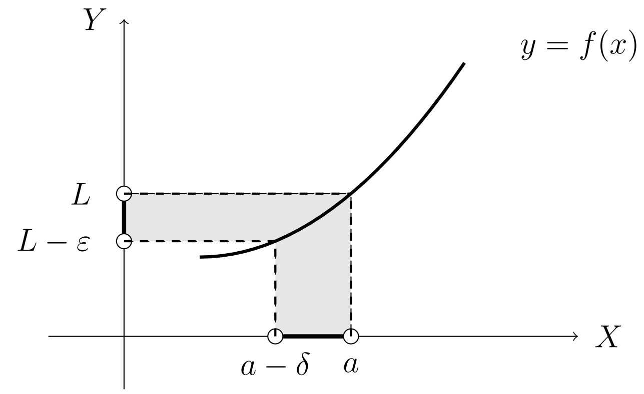


บทนิยาม 2.2.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ แล้ว

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

เรียกว่า**ลิมิตซ้าย (left-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ

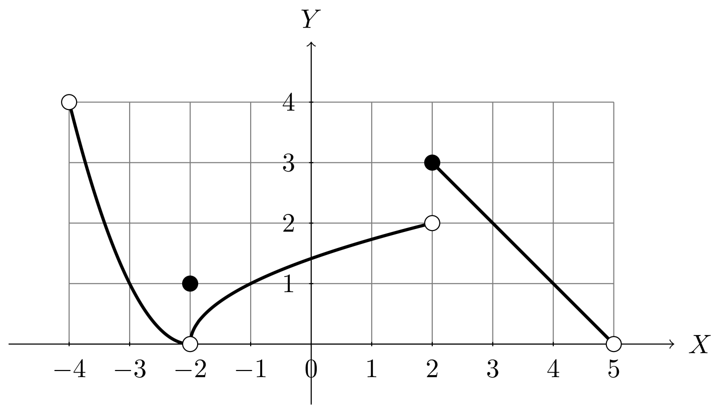
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D, \quad a - \delta < x < a \to |f(x) - L| < \varepsilon$$



ทฤษฎีบท 2.2.3 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ และ $D \cap (a, \infty)$ และ $L \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน $(-4, 5)$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



จงหาลิมิตที่ $x = -4, -2, 2, 3$ และ 5

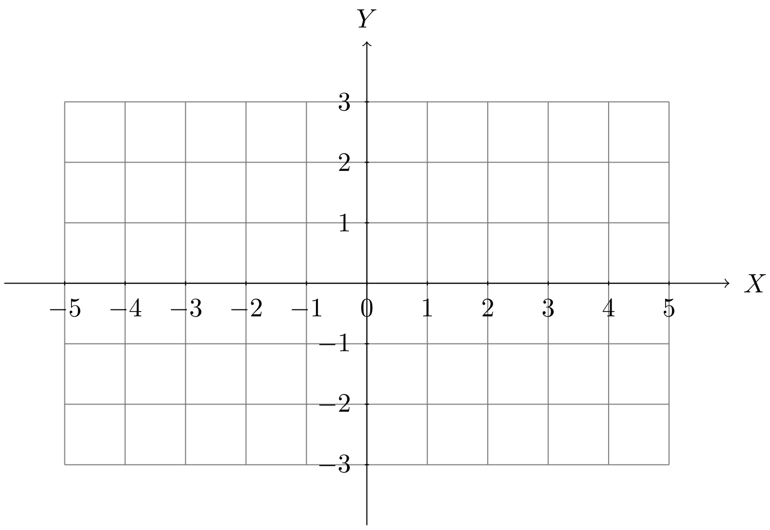
วิธีทำ จากกราฟ แสดงค่าต่าง ๆ ของลิมิต ได้ดังตารางต่อไปนี้

a	$\lim_{x \to a^-} f(x)$	$\lim_{x \to a^+} f(x)$	$\lim_{x \to a} f(x)$
-4			
-2			
2			
3			
5			

ตัวอย่าง 2.2.5 ฟังก์ชันซิกนัม (signum function) เขียนแทนด้วย sgn นิยามโดย

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จงวาดกราฟของฟังก์ชันซิกนัม และพิจารณาค่าของลิมิตของ sgn(x) ที่จุด 0



ตัวอย่าง 2.2.6 พิจารณาค่ามิลิต $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 4-x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.2.7 พิจารณาค่ามิลิต $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16} & \text{เมื่อ } x > 4 \\ 3x+1 & \text{เมื่อ } x \le 4 \end{cases}$$

จากนิยามค่าสัมบูรณ์

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$
สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $|x^2| = x^2$
2. $|-x| = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $|x+y| \leq |x| + |y|$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงตรวจสอบลิมิต $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ ว่าลิมิตมีค่าหรือไม่

ตัวอย่าง 2.2.9 จงตรวจสอบ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x| - x}{|x|}$ ว่าลิมิตมีค่าหรือไม่

ตัวอย่าง 2.2.10 จงตรวจสอบ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|x^2 - x - 6|}{x+2}$ ว่าลิมิตมีค่าหรือไม่

ตัวอย่าง 2.2.11 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

ตัวอย่าง 2.2.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{|x^2-x-2|}{2-\sqrt[3]{x^2+4}}$

ตัวอย่าง 2.2.13 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left(1-\dfrac{2x^3}{x^2+1}\right)$

ตัวอย่าง 2.2.14 ถ้า $\lim_{x\to 0} \dfrac{|5x+1|-|5x-1|}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} = 80$ จงหาค่าของ a

ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด (greatest integer function) นิยามโดย

$$[x] = \text{จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } x$$

เช่น $[1.5] = 1$, $[-1.1] = -2$, $[3] = 3$
จากนิยามสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+}[x] = a \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a^-}[x] = a-1$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k < a < k+1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to a}[x] = \lim_{x\to a^+}[x] = \lim_{x\to a^-}[x] = k$$

ตัวอย่าง 2.2.15 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} x + [x]$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} x + [x]$

3. $\lim\limits_{x\to 1.5} x + [x]$

ตัวอย่าง 2.2.16 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]+x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{[x]+1}{x}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1.1 $\lim\limits_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

1.2 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0.5^+}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

1.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

1.6 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{x}\right)$

2. ให้ c เป็นค่าคงตัว จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[x-1]}{x-1}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

2.5 $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]$

2.6 $\lim\limits_{x\to 0^+}[\sin x]$

2.7 $\lim\limits_{x\to 1}[x]+[-x]$

2.8 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-[x]}{x-1}$

3. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^3-1} & \text{เมื่อ} \quad x\neq 1\\ 4-2x & \text{เมื่อ} \quad x=1\end{cases}$
จงตรวจสอบค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

4. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^3-2x+5 & \text{เมื่อ } |x|\le 2\\ \dfrac{x+7}{x-1} & \text{เมื่อ } |x|>2\end{cases}$
จงตรวจสอบค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|1+x-x^2|}{\sqrt{x+3}-2}$

6. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2}$

7. จงหาจำนวนจริง k ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ มีค่า เมื่อ $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{เมื่อ } x<-3\\ kx^2+2 & \text{เมื่อ } x\ge -3\end{cases}$

8. จงหาจำนวนจริง a และ b ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$

9. จงหาจำนวนจริง a ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a}(x^3-4x^2+x+10)=4$

10. ถ้า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-8}{x-1}=10$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

2.3 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวนี้นี้จะกล่าวถึงการหาลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$
3. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$
4. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ $a, k, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to a} \sin(kx+c) = \sin(ka+c)$
2. $\lim\limits_{x\to a} \cos(kx+c) = \cos(ka+c)$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$
2. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x}{x}$

เราอาจจะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้มาช่วยในการหาค่าลิมิตในรูปแบบต่าง ๆ

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
3. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
4. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

   $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
6. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$
7. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$
8. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
9. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
10. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
11. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

ตัวอย่าง 2.3.4 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x - \sin x}$

ตัวอย่าง 2.3.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{(\cot^3 x - 1)(\csc^2 x)}{1 + \cos 2x - 2\sin^2 x}$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ทฤษฎีบทการบีบ (Squeeze Theorem)
ให้ f, g, h เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ ถ้า

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{ทุกๆ } x \text{ ที่มีค่าใกล้ ๆ } a$$

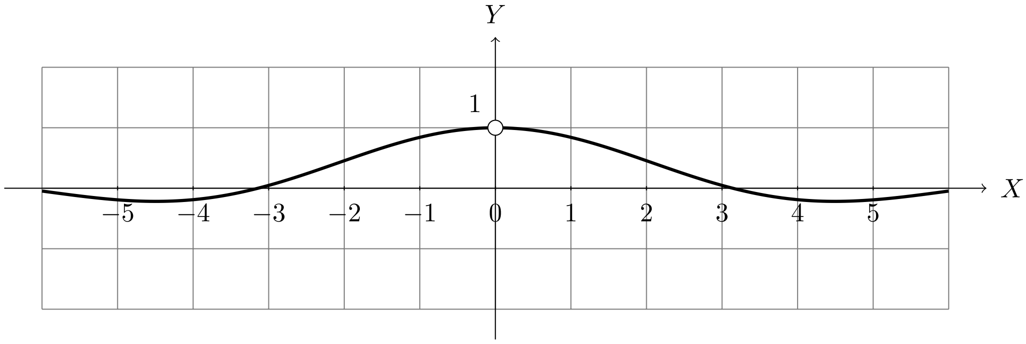
และ $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ตัวอย่าง 2.3.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to 0} \sin^2 x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



และคำควณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่าของ x ใกล้ ๆ 0 สำหรับบางค่าดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.1	0.998334166468282		−0.1	0.998334166468282
0.01	0.999983333416666		−0.01	0.999983333416666
0.001	0.999999833333342		−0.001	0.999999833333342
0.0001	0.999999998333333		−0.0001	0.999999998333333
0.00001	0.999999999983333		−0.00001	0.999999999983333

ทำให้สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ หรือกล่าวอีกนัยว่า $\sin x$ จะมีค่าประมาณ x เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ 0 และสามารถพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทการบีบดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

ตัวอย่าง 2.3.10 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

ตัวอย่าง 2.3.11 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin x}$

ตัวอย่าง 2.3.12 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - \cos x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

บทแทรก 2.3.13 ให้ u เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x และมีค่าเมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ a

$$\text{ถ้า} \quad \lim_{x\to a} u(x) = 0 \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

ตัวอย่าง 2.3.14 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{5x^2}$

ตัวอย่าง 2.3.15 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\tan x}$

ตัวอย่าง 2.3.16 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1.1 $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{x^2\pi}{x}\right)$

1.2 $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{x\pi}{x^2}\right)$

1.3 $\lim_{x\to 0} \tan^2 x\cos\left(\frac{3}{x-1}\right)$

1.4 $\lim_{x\to 0} \cos x\sqrt{\sin^2 x}$

1.5 $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x^3}\cos\left(\frac{x+1}{\pi}\right)$

1.6 $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

2.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x}$

2.2 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

2.3 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$

2.4 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x\cos x}$

2.5 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 5x}$

2.6 $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 3x}$

2.7 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

2.8 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x}$

2.9 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^2}$

2.10 $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(12-6x)}{5-10x}$

2.11 $\lim_{x\to -3} \frac{\sin(x+3)}{x^2+2x-3}$

2.12 $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

2.13 $\lim_{x\to 0} \frac{x+\tan x}{\sin x}$

2.14 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

2.15 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos^3 x}$

2.16 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+\sin x}{x}$

2.17 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x^2}$

2.18 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

2.19 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-\cos\sqrt{x}}$

2.20 $\lim_{x\to 0} x^2\cot x$

2.21 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin x}$

2.22 $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

2.23 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{3x^4}$

2.24 $\lim_{x\to 0} x^2\sin^2\frac{1}{x}$

2.25 $\lim_{x\to 0} x^6\cos\frac{\pi}{x}$

2.26 $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\sin\frac{1}{x}}$

2.27 $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

3.1 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x\cos x+\sin x}$

3.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x-2\cos^2 x-\cos x+2}{x^2}$

3.3 $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x}$

3.4 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sin^2 x-\cos^2 x}{x^3}$

3.5 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$

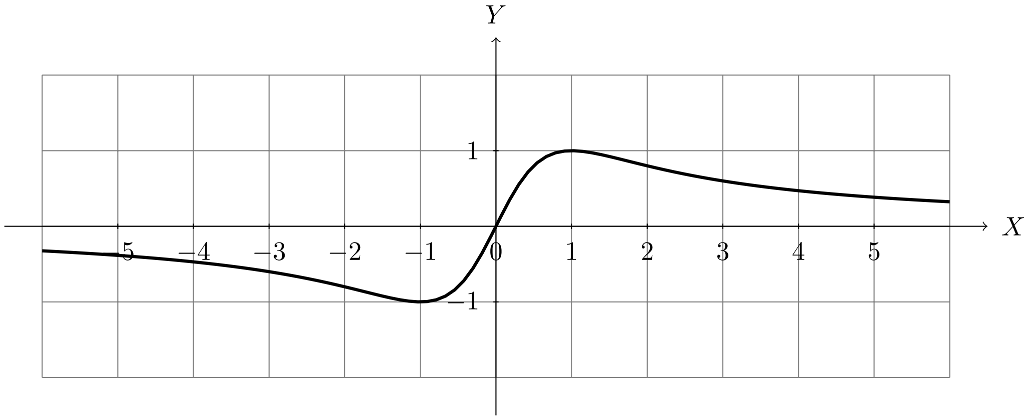
3.6 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x-\cos x}$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1+\cos x}$

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim_{x\to 0} f(x)\cos x = 0$ จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

2.4 ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

และเมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall\varepsilon > 0\,\exists N > 0\,\forall x \in D, \quad x > N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

บทนิยาม 2.4.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (-\infty, a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall\varepsilon > 0\,\exists N < 0\,\forall x \in D, \quad x < N \quad \to \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

ทฤษฎีบท 2.4.4 ให้ r เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ เมื่อ $L, M \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = L + M$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = LM$
3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim_{x\to\infty} cf(x) = c\lim_{x\to\infty} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |\lim_{x\to\infty} f(x)| = |L|$
6. $\lim_{x\to\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

สำหรับลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ $-\infty$ ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.4.5 แต่ไม่ขอเขียนไว้ ณ ที่นี้ แต่นำไปใช้ได้เช่นกัน

สำหรับ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ จะกล่าวได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } \lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) \quad \text{อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด}$$

เขียนแทนด้วย $I.F.\dfrac{\infty}{\infty}$ และ $I.F.\infty - \infty$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.4.6 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-4}{2x^2+x^3}$

2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x}{x+x^3+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}} - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{10x+3}{\sqrt{25x^2-6}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}+x}{3x^2-1}$

ตัวอย่าง 2.4.7 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x+1\right)$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)$

ต่อไปนี้จะขยายแนวคิดมากจากทฤษฎีบทการบีบ ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกันเรียกว่า ทฤษฎีบทการบีบสำหรับลิมิตที่อนันต์

ทฤษฎีบท 2.4.8 ทฤษฎีบทการบีบสำหรับลิมิตที่อนันต์
ให้ f, g, h เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x > N \text{ สำหรับบางค่า } N > 0$$

และ $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = L = \lim\limits_{x \to \infty} h(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x < K \text{ สำหรับบางค่า } K < 0$$

และ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = M = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = M$

ตัวอย่าง 2.4.9 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}\cos x$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5\sin x}{7x + 2x^2}$

ทฤษฎีบท 2.4.10 ให้ u เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$
2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

ตัวอย่าง 2.4.11 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2. $\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

3. $\lim_{x\to-\infty} x\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$

4. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$

บทนิยาม 2.4.12 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
   ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M > 0\, \exists N > 0\, \forall x \in D, \quad x > N \quad \to \quad f(x) > M$
2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M > 0\, \exists N < 0\, \forall x \in D, \quad x < N \quad \to \quad f(x) > M$
3. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
   ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M < 0\, \exists N > 0\, \forall x \in D, \quad x > N \quad \to \quad f(x) < M$
4. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M < 0\, \exists N < 0\, \forall x \in D, \quad x < N \quad \to \quad f(x) < M$

ทฤษฎีบท 2.4.13 ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้ว

1. ถ้า $\exists M > 0,\ f(x) > 0$ ทุก ๆ $x > M$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
2. ถ้า $\exists M > 0,\ f(x) < 0$ ทุก ๆ $x > M$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
3. ถ้า $\exists M < 0,\ f(x) > 0$ ทุก ๆ $x < M$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
4. ถ้า $\exists M < 0,\ f(x) < 0$ ทุก ๆ $x < M$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.14 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 3}{x^2 + x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - x}{1 + x^{\frac{3}{4}}}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x^2 - x^4}{x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x + 1}$

ทฤษฎีบท 2.4.15 ให้ u เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$

1. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to\infty} \text{arctan} u(x) = \frac{\pi}{2}$$

2. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctan} u(x) = \frac{\pi}{2}$$

3. ถ้า $D = (a, \infty)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -\infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to\infty} \text{arctan} u(x) = -\frac{\pi}{2}$$

4. ถ้า $D = (-\infty, b)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว และ $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$ แล้ว
$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctan} u(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่าง 2.4.16 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \text{arctan}(1 + x^2)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{arctan}(1 - x^2)$

บทนิยาม 2.4.17 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad f(x) > M$

บทนิยาม 2.4.18 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
ก็ต่อเมื่อ $\quad \forall M < 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \to \quad f(x) < M$

ตัวอย่าง 2.4.19 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

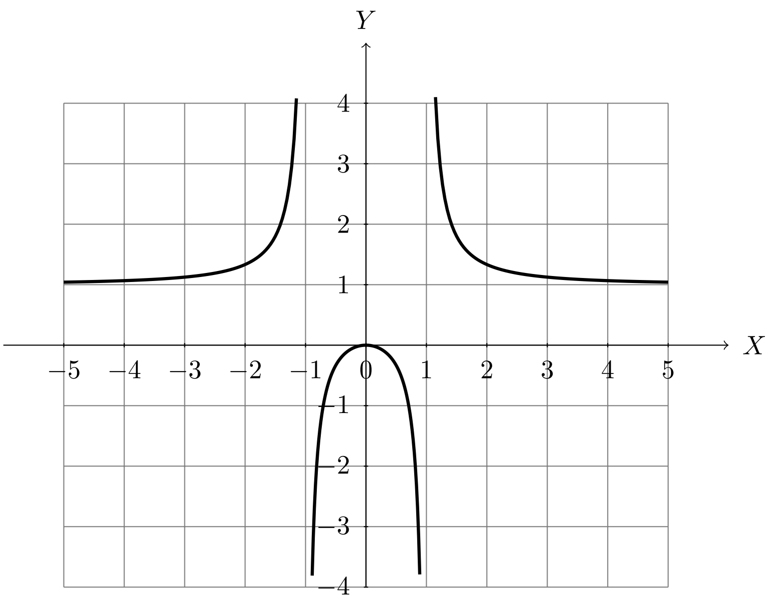
1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x$

ตัวอย่าง 2.4.20 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ แสดงดังนี้



จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

6. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

ทฤษฎีบท 2.4.21 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

1. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
2. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
3. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a, a+\delta) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$
4. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a, a+\delta) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
5. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$
6. ถ้า $\exists\delta > 0,\ f(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a) \cap D$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.4.22 พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.4.21.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1-x}{x^2-4}$

ตัวอย่าง 2.4.23 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

3. $\lim\limits_{y\to 0^+}(\cot y-\csc y)$

แบบฝึกหัด 2.4

1. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}+3\right)$

1.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9+\sqrt[5]{x}}{4+\sqrt[3]{x}}$

1.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+5)^5(x-8)^7}{(x^3-2)^2(3x+1)^4}$

1.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+4}{7x+x^2-2x^3}$

1.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{4+x^2+3x^3}$

1.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3-8x^2}{x(x+2)}}$

1.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-4}{2x^4+x}$

1.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}}{2x-5}$

1.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}$

1.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-|x|}{|x^3-2x^2-x+2|}$

1.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

1.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

1.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

1.14 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

1.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

1.16 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

1.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

1.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{2x+3}$

1.19 $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{\sqrt{8+z^2}}{z+4}$

1.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

1.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

1.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3x-10}$

1.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+2x-1}$

1.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+6x^2-7x}{4x^3-x^2+1}$

1.25 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x+6}{3x^2-x}$

1.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6-x^4}}{x^2+x-12}$

1.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-x^2}{\sqrt{2x^2-x+1}}$

1.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}$

2. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan(\ln x)$

2.2 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}$

2.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

2.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)-1\right]$

2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(e^x)$

2.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x\sin x}{\cos 3x-2x^2}$

2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$

2.8 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

2.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x\sin 3x}{\ln(-x)}$

3. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

3.2 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x^3-8}$

3.3 $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{1}{\sqrt{-x-3}}$

3.4 $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-5}{x-4}$

3.5 $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2x+x^{\frac{4}{3}}}{x^2-8x-9}$

3.6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3}{x^2-2x+1}$

3.7 $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+x+4-3}{x^2+x-2}$

3.8 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+6}{x^2+10x+25}$

3.9 $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{[x]-x}{5-x}$

3.10 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x+6}{x^2+2x-15}$

4. พิจารณาค่าของลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

4.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x-1)}{3x-3}$

4.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2\sin\left(\dfrac{2}{x^2}\right)$

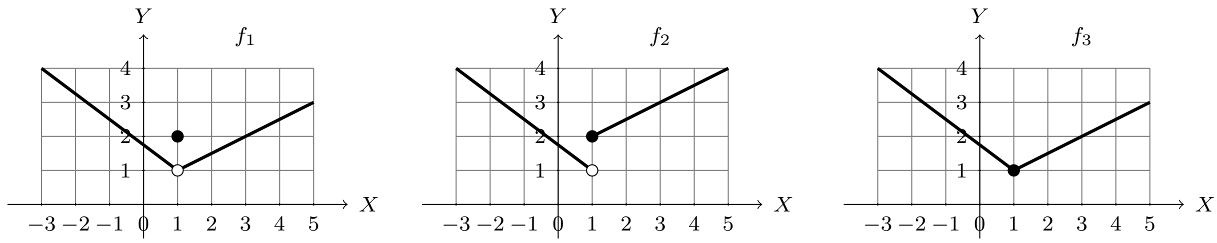
4.4 $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-\pi)\tan\left(\dfrac{\pi}{x-\pi}\right)$

5. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-3x+x^2}\right)$

6. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

2.5 ความต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันซึ่งมีความสำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัส จะเริ่มต้นจากการพิจารณาลักษณะของกราฟต่อไปนี้



จากกราฟเห็นได้ว่าฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ไม่มีต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ f_3 มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$

บทนิยาม 2.5.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in D$ แล้ว f มี**ต่อเนื่อง**ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่าง 2.5.2 จงตรวจสอบว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 + x & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ |x| - 1 & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$; $a = -1$

3. $f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$; $a = 0$

4. $f(x) = [x]$; $a = 1$

ตัวอย่าง 2.5.3 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ เมื่อ $x \neq 2$ ต้องนิยาม $f(2)$ ให้มีค่าเท่าใด เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ทฤษฎีบท 2.5.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ c เป็นค่าคงตัว แล้วฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด a

1. $f + g$
2. $f - g$
3. fg
4. cf
5. $\dfrac{f}{g}$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

บทนิยาม 2.5.5 ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องทางขวา** (continuous from the right) ที่จุด a ถ้า

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

และ f **ต่อเนื่องทางซ้าย** (continuous from the left) ที่จุด a ถ้า

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

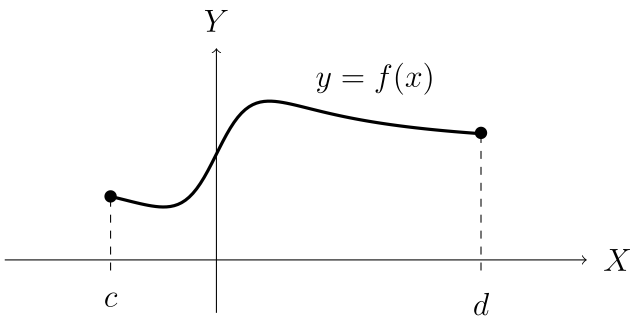
บทนิยาม 2.5.6 ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน ให้ $I \subseteq \text{Dom}(f)$

1. กรณีที่ $I = (c, d)$, $[c, d]$, $(c, d]$ หรือ $[c, d)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด d และ f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด c

2. กรณีที่ $I = (c, \infty)$ หรือ $[c, \infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, \infty)$ และ
   f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด c

3. กรณีที่ $I = (-\infty, d)$ หรือ $(-\infty, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (-\infty, d)$ และ
   f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด d

4. กรณีที่ $I = (-\infty, \infty)$ หรือ $\mathbb{R}$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in \mathbb{R}$



ตัวอย่าง 2.5.7 ถ้า $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$ หรือไม่ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของ f หรือไม่

ทฤษฎีบท 2.5.8 ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.5.9 ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนโดเมนของฟังก์ชันนั้น

1. ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)
2. ฟังก์ชันกรณฑ์ (radical functions)
3. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential functions)
4. ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic functions)
5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric functions)
6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric functions)

ตัวอย่าง 2.5.10 จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2. $f(x) = \text{arcsin}\left(\frac{x^2-1}{3}\right)$

3. $f(x) = \frac{\ell\text{n}x + \text{arctan}x}{x^2-1}$

ตัวอย่าง 2.5.11 กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} kx^2+1 & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 3x-1 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหา k

ทฤษฎีบท 2.5.12 ให้ f, g เป็นฟังก์ชัน และ $b \in \text{Dom}(f)$ โดยที่ a เป็นจุดลิมิตของ $\text{Dom}(f)$ และ $\text{Dom}(g)$ ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด b และ $\lim_{x\to a} g(x) = b$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$$

หรือจะกล่าวได้อีกอย่างคือ

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

ทฤษฎีบท 2.5.13 ให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $g(a)$ แล้ว $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a

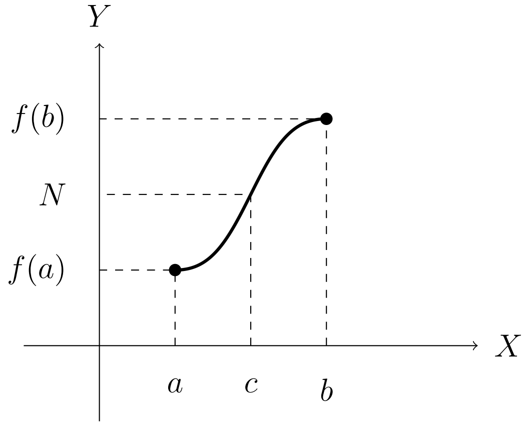
ตัวอย่าง 2.5.14 จงหาลิมิต $\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

ตัวอย่าง 2.5.15 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริงและ $f(1) = 1, f(2) = 2$ โดยที่

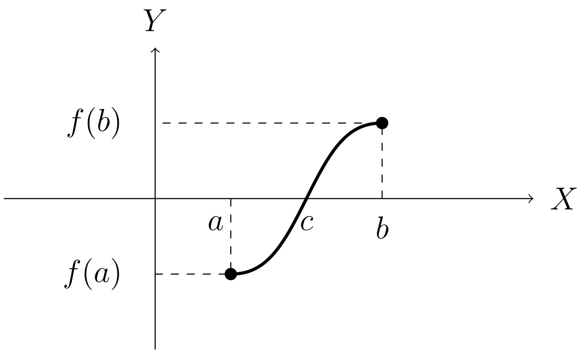
$$\ln f(x) = f(x+1) + f(x+2)$$

จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

ทฤษฎีบท 2.5.16 ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value Theorem: IVT)
ให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และให้ N เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ เมื่อ $f(a) \neq f(b)$ แล้วจะได้ว่ามี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(c) = N$



บทแทรก 2.5.17 กำหนดให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $f(a)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายต่างกัน แล้วจะได้ว่ามี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(c) = 0$



ตัวอย่าง 2.5.18 จงแสดงว่า $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ มีรากในช่วง $[0,3]$

ตัวอย่าง 2.5.19 จงแสดงว่า $x^5 - x^3 - x + 1 = 0$ มีรากในช่วง $[-2,2]$

แบบฝึกหัด 2.5

1. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

   1.1 $a = -2;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{เมื่อ } x \neq -2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = -2 \end{cases}$

   1.2 $a = 0;\quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$

   1.3 $a = 1;\quad f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ 2-x^3 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$

   1.4 $a = 1;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

   1.5 $a = 3;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} & \text{เมื่อ } -4 \leq x < -1 \\ |x|+1 & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-x^2}{2x^2-5x+3} & \text{เมื่อ } \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$
   ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $x = -1$ หรือไม่

3. จงขยายโดเมนเพื่อทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

   3.1 $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

   3.2 $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

   3.3 $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$

4. จงหาค่า c ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} cx^2+2x & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x^3-cx & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

5. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x < 2 \\ ax^2-bx+3 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \\ 2x-a+b & \text{เมื่อ } x \geq 3 \end{cases}$$

6. จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

6.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

6.2 $f(x) = x^2 + \sqrt{2x-1}$

6.3 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$

6.4 $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

6.5 $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

6.6 $f(x) = \arctan(1+e^{-x^2})$

6.7 $f(x) = \ell n(1+\cos x)$

6.8 $f(x) = \ell n(\sin x - \frac{1}{2})$

7. จงใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง แสดงว่ามีรากในช่วงที่กำหนดให้

7.1 $x^4 + x - 3 = 0,\qquad [1,2]$

7.2 $\sqrt[3]{x} = 1 - x,\qquad [0,1]$

7.3 $e^x = 3 - 2x,\qquad [0,1]$

7.4 $\sin x = x^2 - x,\qquad [1,2]$

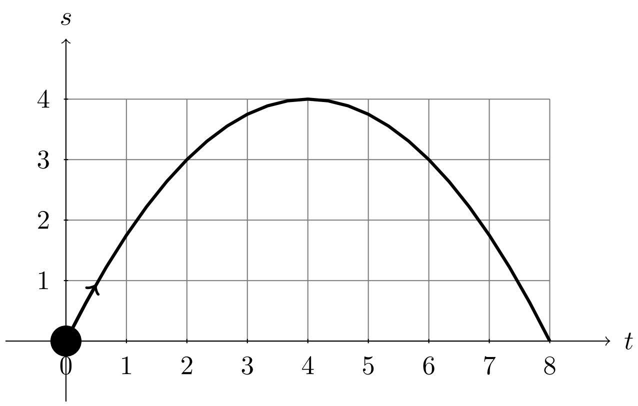
บทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การศึกษาเส้นสัมผัสเส้นโค้งเริ่มต้นโดยแฟร์มาต์ และถูกพัฒนาอย่างจริงจังโดยแบร์โรว์ซึ่งคำนวณโดยอาศัยสามเหลี่ยมผลต่างของแบร์โรว์ ปัจจุบันความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P เรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ P ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันและสมบัติที่เกี่ยวข้อง

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งกับเวลาที่มีสมการเป็น $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$ เมตร และเวลา t ในหน่วยวินาที



เมื่อสนใจความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้สามารถหาได้จาก

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่}}$$

หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } t_1 \text{ ถึง } t_2 = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

เช่น ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในช่วงเวลา 1 วินาที ถึง 3 วินาที คือ

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } 1 \text{ ถึง } 3 = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = 1 \text{ เมตร/วินาที}$$

เราจะใช้แนวคิดนี้ในการนิยาม **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** (average rate of change) ของฟังก์ชันอื่น ๆ ดังนิยาม

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว

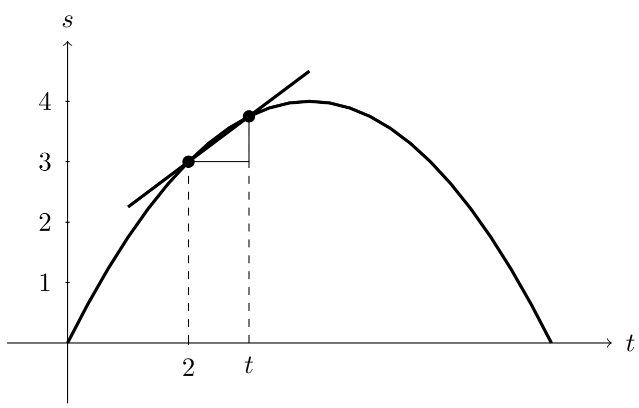
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

เรียกว่า**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** ของ y เทียบกับ x บนช่วง $[x_1, x_2]$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วงที่กำหนดให้

1. $f(x) = x^3 - x^2 + x$ บนช่วง $[-1, 1]$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ บนช่วง $[0, 3]$

ต่อไปเราสนใจ **ความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริง** ของการเคลื่อนที่เรียกว่า **ความเร็วชั่วขณะ** ตัวอย่างเช่น ความเร็ว ขณะ $t = 2$ ของ $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$



อาจพิจารณาจากความเร็วเฉลี่ยบนช่วง $[2, t]$ เมื่อ t ใกล้ ๆ 2 นั่นคือ $t - 2 = \Delta t \to 0$ แล้ว

$$\text{ความเร็วขณะ } t = 2 \text{ คือ } \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

จะได้ว่า

ขยายแนวคิดนี้ไปยังฟังก์ชันอื่น ๆ เรียกว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change)** ของฟังก์ชัน f ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง** ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0 นิยามโดย

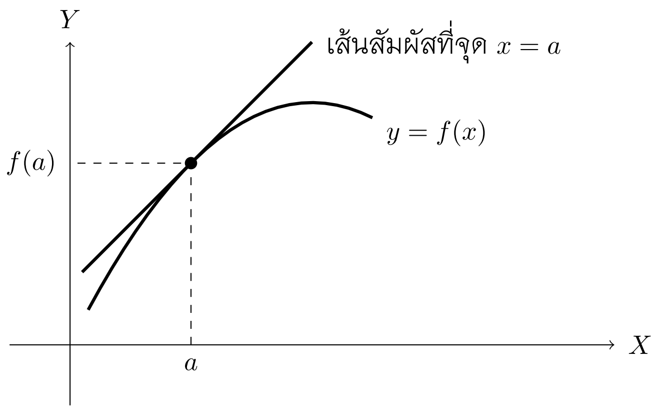
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ตัวอย่าง 3.1.4 อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x$ ที่จุด $x = 1$

บทนิยาม 3.1.5 เส้นสัมผัส (tangent line) กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ผ่านจุด P จะมีค่าความชันเท่ากับ

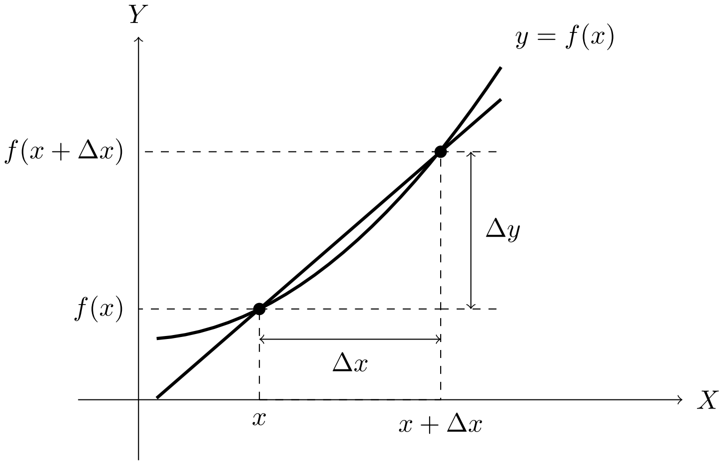
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{ถ้าลิมิตนี้มีค่า}$$

และสมการเส้นสัมผัสคือ $y = m(x - a) + f(a)$



ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \dfrac{2}{x}$ ที่จุด $P(2, 1)$

จากแนวคิดอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ พิจารณากราฟ



อัตราการเปลี่ยนแปลงของของฟังก์ชัน $y = f(x)$ กับการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอิสระของ x ในช่วง x กับ $x + \Delta x$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ 0 จะเรียก $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
โดยไลบ์นิซได้ใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ เรียกว่า สัญกรณ์ไลบ์นิซ (Leibniz notation)
และลากรองจ์ได้ใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$ เรียกว่า สัญกรณ์ลากรองจ์ (Lagrange notation)

บทนิยาม 3.1.7 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $y = f(x)$ เรียก

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ว่า**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (derivative of function)** ของ f เทียบกับ x หรือกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)** ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(x) \quad \text{หรือ} \quad y' \quad \text{หรือ} \quad D_x f(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad \frac{df}{dx}$$

ถ้า $a \in \mathrm{Dom}(f)$ แล้วอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ นั่นคือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ถ้าให้ $h = \Delta x$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ f เทียบกับ x คือ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

สำหรับอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ ถ้าให้ $x = a + \Delta x$ จะได้ $\Delta x = x - a$ ดังนั้น

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{หรือ} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x$

ตัวอย่าง 3.1.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่จุด $x = 2$

ตัวอย่าง 3.1.10 จงตราจสอบว่าฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 1$ หรือไม่

บทนิยาม 3.1.11 ฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์ทางขวา (differentiable from the right)** ที่จุด a ถ้า

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{หาลิมิตได้}$$

และ f **มีอนุพันธ์ทางซ้าย (differentiable from the left)** ที่จุด a ถ้า

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{หาลิมิตได้}$$

ทฤษฎีบท 3.1.12 ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

f มีอนุพันธ์ทางขวาและมีอนุพันธ์ทางซ้าย ที่จุด a และ $f'(a^+) = f'(a^-) = f'(a)$

ตัวอย่าง 3.1.13 จงหาอนุพันธ์ทางขวาและอนุพันธ์ทางซ้าย ที่จุด $x = 0$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

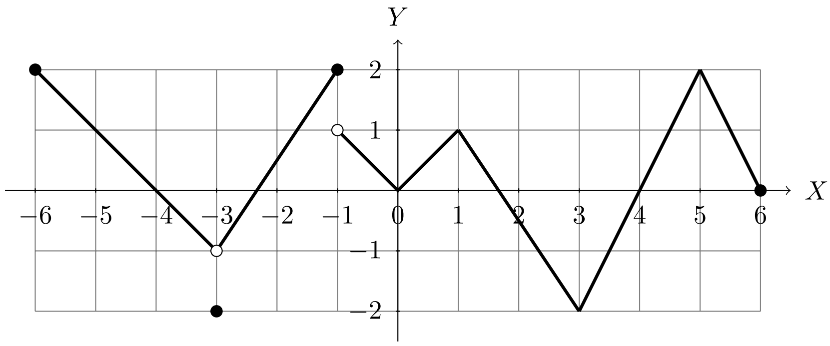
1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = x|x|$

ตัวอย่าง 3.1.14 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \sqrt{x}$ มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด 0 หรือไม่

ทฤษฎีบท 3.1.15 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด a

ตัวอย่าง 3.1.16 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 3.1.15

ตัวอย่าง 3.1.17 กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[-6, 6]$ ดังกราฟ



จงหาอนุพันธ์ของ f ของแต่ละจุดดังตารางต่อไปนี้

จุด	ค่าอนุพันธ์ทางขวา	ค่าอนุพันธ์ทางซ้าย	ค่าอนุพันธ์
$x = -6$			
$x = -5$			
$x = -3$			
$x = -1$			
$x = 0$			
$x = 3$			
$x = 4$			
$x = 5$			
$x = 6$			

บทนิยาม 3.1.18 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$

1. กรณีที่ $I = (c, d)$, (c, ∞), $(-\infty, d)$ หรือ $(-\infty, \infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in I$

2. กรณีที่ $I = [c, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด d และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด c

3. กรณีที่ $I = [c, d)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด c

4. กรณีที่ $I = (c, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, d)$ และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด d

5. กรณีที่ $I = (-\infty, d]$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (-\infty, d)$ และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด d

6. กรณีที่ $I = [c, \infty)$
   จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีอนุพันธ์บนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in (c, \infty)$ และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด c

ข้อสังเกต 3.1.19 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง I และ J แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $I \cup J$

ตัวอย่าง 3.1.20 จงตรวจสอบว่า $f(x) = \sqrt{x}$ มีอนุพันธ์บนโดเมนของ f หรือไม่

ตัวอย่าง 3.1.21 จงตรวจสอบว่า

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$$

มีอนุพันธ์บน $(-\infty, \infty)$ หรือไม่

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

1.1 $f(x) = 3x - x^2$ บนช่วง $[-2, 2]$ 1.3 $f(x) = x|x|$ บนช่วง $[-3, 1]$

1.2 $f(x) = \cos x$ บนช่วง $[0, \pi]$ 1.4 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ บนช่วง $[1, 5]$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = \sqrt{x}$ 2.2 $f(x) = 1 - 3x^2$ 2.3 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 2.4 $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

3. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ หรือไม่

3.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$; $a = 0$

3.2 $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{เมื่อ } x \ne 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

3.3 $f(x) = x|x^3|$; $a = 0$

3.4 $f(x) = [x]$; $a = -1$

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$ หรือไม่

4.1 $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \ne 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$ 4.2 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \ne 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

5. พิจารณาอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x = 1$ และร่างกราฟของ f เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \ge 1 \end{cases}$$

6. ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ x^3 - ax + b & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$
หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง จงหาค่าของ a และ b

7. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$

7.1 $f(x) = x^3$; $a = 2$ 7.3 $f(x) = 1 + x^2$; $a = -1$

7.2 $f(x) = \sin x$; $a = \pi$ 7.4 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

3.2 กฎของอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกฎพื้นฐานที่สำคัญของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งจะนำไปใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 3.2.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัว (Derivative of a constant function)

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่}$$

ทฤษฎีบท 3.2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Derivative of the identity function)

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

ทฤษฎีบท 3.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันกำลัง (Derivative of a power function)

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

บทแทรก 3.2.4 ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ x^n เป็นจำนวนจริง

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ทฤษฎีบท 3.2.5 กฎการคูณด้วยค่าคงตัวสำหรับอนุพันธ์ (Constant multiplication law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบท 3.2.6 กฎการบวกสำหรับอนุพันธ์ (Ssum law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

บทแทรก 3.2.7 กฎผลต่างสำหรับอนุพันธ์ (Different law for derivatives)

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่าง 3.2.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$
2. $y = 2\sqrt{x} - x + \pi$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$
5. $f(x) = (x-1)(x+1)$
6. $y = (x+2)(x-2)(x-1)$

ทฤษฎีบท 3.2.9 กฎการคูณสำหรับอนุพันธ์ (Product law for derivatives)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x+1)(x^2-1)$
2. $y = (\sqrt{x}-1)(x^3+1)$

บทแทรก 3.2.11 ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$[fgh]'(x) = [f'gh + fg'h + fgh'](x)$$

ตัวอย่าง 3.2.12 ให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ จงหา $f'(0)$

ทฤษฎีบท 3.2.13 กฎการหารสำหรับอนุพันธ์ (Quoteint law for derivatives)
ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0$$

ตัวอย่าง 3.2.14 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
2. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 3.2.15 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(1, \frac{1}{2})$

ตัวอย่าง 3.2.16 จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = x^{10} + x^7 - x$

   1.2 $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$

   1.3 $f(x) = x^{-2} - x^{-1} - 1$

   1.4 $f(x) = (x^3 - 1)(2 - x - x^2)$

   1.5 $f(x) = x^5 + 2x + \pi^2$

   1.6 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

   1.7 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

   1.8 $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 3$

   1.9 $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x-1}$

   1.10 $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{2x-1}$

   1.11 $y = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}+1}$

   1.12 $y = \dfrac{(x^2-1)(x^3+x)}{x^2+1}$

2. ให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ จงหา $f'(0)$

3. ให้ $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$ จงหา $f'(0)$

4. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^4 - 6x^2 + 4$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

5. ถ้า f, g, h และ k เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงแสดงว่า

$$[fghk]'(x) = [f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'](x)$$

6. จงหาอนุพันธ์ของ f ทุก ๆ จุดที่มีอนุพันธ์

   6.1 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

   6.2 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

7. พิจารณาว่าฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่จุดใดบ้าง พร้อมทั้งร่างกราฟ g และ g'

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

8. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ mx + b & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

   จงหาค่าของ m และ b ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง

3.3 กฎลูกโซ่

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g คือ $f \circ g$ โดยที่ $f \circ g(x) = f(g(x))$ ในหัวข้อนี้จะศึกษาว่าถ้า f แล้ว g มีอนุพันธ์ แล้ว $f \circ g$ มีอนุพันธ์ด้วยและ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

เรียกว่า **กฎลูกโซ่ (Chain rule)** ซึ่งถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์เลื่องชื่อชาวสก็อตแลนด์นามว่า เจมส์ เกร็กกอรี (James Gregory, 1638–1675)

ทฤษฎีบท 3.3.1 กฎลูกโซ่
จุด x และ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x และเขียนแทนด้วย $(f \circ g)'$ คือ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้ $f(x^3 + 1) = x^3 + x - 1$ จงหา $f'(2)$

ตัวอย่าง 3.3.3 กำหนดให้ $f(g(x) + x) = 2x^2 - x + 1$ เมื่อ $g(0) = g'(0) = 1$ จงหา $f'(1)$

ตัวอย่าง 3.3.4 กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ และ $g(x) = x^2 + x - 1$ จงหา $(f \circ g)'(-1)$

เมื่อกำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 3.3.5 กำหนดให้ $y = u^2 + 3u - 1$ และ $u = x^2 - x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = 1$

ตัวอย่าง 3.3.6 กำหนดให้ $y = u + \dfrac{1}{u}$, $u = x^2 + 1$ และ $x = 2t + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาอนุพันธ์ของ $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ทฤษฎีบท 3.3.8 กฎทั่วไปของอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันกำลัง
ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x^3 - 1)^{100}$

2. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

3. $g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

4. $k(x) = (1-x)^5(x^3+2)^4$

ทฤษฎีบท 3.3.10 กฎอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ผกผันได้ และมีอนุพันธ์ไม่เป็นศูนย์ที่ x แล้ว $f^{-1}(y) = x$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

ตัวอย่าง 3.3.11 ให้ $y = \dfrac{1}{x+1}$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$ ในรูป y

ตัวอย่าง 3.3.12 ให้ $f(x) = x^3 + 1$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ f

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

   1.1 $y = u^3 - 2u$ และ $u = \sqrt{x}$

   1.2 $y = (u+1)^2$ และ $u = x + \dfrac{1}{x}$

   1.3 $y = \sqrt{u^2+3}$ และ $u = x - 2x^2$

   1.4 $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ และ $u = \dfrac{1}{2x}$

2. จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ

   2.1 $y = u - u^2$, $u = x - x^3$ และ $x = \sqrt{t} + 1$

   2.2 $y = 5 + 3u^{-2}$, $u = \sqrt{x}$ และ $x = t^2$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-1}$

   3.2 $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

   3.3 $F(x) = (4x - x^2)^{99}$

   3.4 $F(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x + 1}$

   3.5 $f(x) = (x + \sqrt{x})^5$

   3.6 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - x}}$

   3.7 $f(x) = (1 + x^4)^{\frac{2}{3}}$

   3.8 $g(t) = \dfrac{1}{(t^4+1)^3}$

   3.9 $f(x) = (2x-3)^4(x^2+x)^3$

   3.10 $g(x) = (x+1)^{\frac{4}{3}}(x^2+1)^4$

   3.11 $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^2+3}}$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง (bullet-nose) $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{2-x^2}}$ ที่จุด $(1,1)$

5. ให้ $F(x) = f \circ g(x)$ เมื่อ $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2$ และ $g'(5) = 6$ จงหา $F'(5)$

6. ถ้า $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ เมื่อ $f(1) = 7$ และ $f'(1) = 4$ จงหา $h'(1)$

7. ให้ $r(x) = f(g(h(x)))$ เมื่อ $h(1) = 2, g(2) = 3, h'(1) = 4, g'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $r'(1)$

8. ให้ $F(x) = f(3f(4f(x)))$ เมื่อ $f(0) = 0$ และ $f'(0) = 2$ จงหา $F'(0)$

9. ให้ $F = f(xf(xf(x)))$ เมื่อ $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $F'(1)$

10. ให้ $y = f\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ เมื่อ $f'(0) = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$

11. ให้ $y = f(1 + \sqrt{u})$, $u = 2 - x^2$ เมื่อ $f'(2) = -3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$

12. ให้ $y = w\left(\dfrac{3+u}{3-u}\right)$, $u = \sqrt{7-3x}$, $x = 1 + t^2$ เมื่อ $w'(2) = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$

13. ให้ $y = \dfrac{f(1+\sqrt{x})}{g(1-\sqrt{x})}$, $x = 3 + t^2$ เมื่อ $f(3) = 2,\ g(-1) = 4,\ f'(3) = -2,\ g'(-1) = -1$ จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$

3.4 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 3.4.1 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher order derivatives)
ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ f' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว f'' จะเรียกว่า อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ f นิยามโดย

$$f''(x) = (f'(x))' \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $f^{(0)} = f$ อนุพันธ์อันดับ n ของ f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นิยามโดย

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ตัวอย่าง 3.4.2 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 3$ จงหา $f''(x)$ และ $f''(2)$

ตัวอย่าง 3.4.3 ให้ $f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 5x + 5$ จงหา $f'''(x)$

ตัวอย่าง 3.4.4 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่ง $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาสมการความเร่ง และความเร่งที่ขณะ 2 วินาที

ตัวอย่าง 3.4.5 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$

ตัวอย่าง 3.4.6 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

ตัวอย่าง 3.4.7 ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ จงหา $f^{(2561)}(0)$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาอนุพันธ์อันดับสองและอันดับสาม ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = x^5 + 6x^3 + x^2 + 3$

   1.2 $f(x) = x^{10} + x^7 - x$

   1.3 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

   1.4 $f(x) = (x-1)(x+1)$

   1.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   1.6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

   1.7 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

2. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาอนุพันธ์ของ n ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = x^{-n}$

   2.2 $f(x) = \sqrt{x}$

   2.3 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   2.4 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   2.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

   2.6 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

3. สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่ง $s = t^3 + 2t^2 - t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาสมการความเร่ง และความเร่งที่ขณะ 1 วินาที

4. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ จงหา $f^{(2018)}(1)$

3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังโดยเริ่มต้นจาก $f(x) = e^x$ เมื่อ e คือ **ค่าคงตัวออยเลอร์** (Euler's constant) ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะที่คำนวนได้จากอนุกรมกำลัง

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

หรือ

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

และเรียกฟังก์ชันผกผันของ f ว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ นั่นคือ $f^{-1}(x) = \ell\text{n}x$ จะเห็นว่า $e^0 = 1$ และ $\ell\text{n}1 = 0$ โดยสมบัติเลขยกกำลังจะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ x, y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $(e^x)^y = e^{xy}$
2. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
3. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

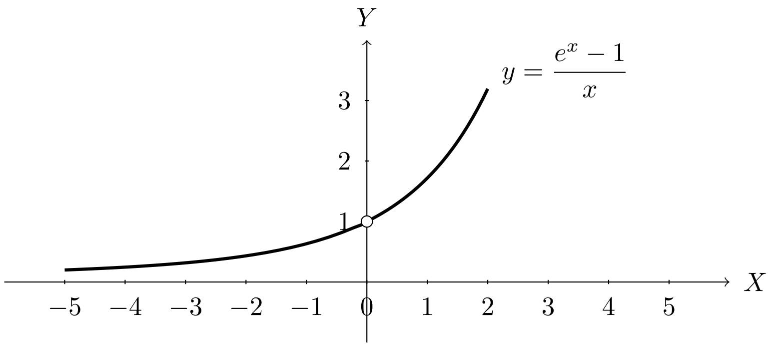
ทฤษฎีบท 3.5.2 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $m \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. $\ell\text{n}xy = \ell\text{n}x + \ell\text{n}y$
2. $\ell\text{n}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ell\text{n}y - \ell\text{n}x$
3. $\ell\text{n}x^m = m\ell\text{n}x$
4. $e^{\ell\text{n}x} = x$

พิจารณาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^x$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x f'(0) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \dfrac{e^x-1}{x}$



เมื่อ x ใกล้ ๆ 0 ค่าของ $\dfrac{e^x-1}{x}$ จะเข้าใกล้ 1 เราจึงกำหนดให้ $f'(0) = 1$ ดังนั้น $f'(x) = e^x$ สรุปได้ว่า

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ทฤษฎีบท 3.5.3 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}e^{u(x)} = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

ทฤษฎีบท 3.5.4 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ถ้า $a^x = e^{x\ell\text{n}a}$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{n}a$$

ทฤษฎีบท 3.5.5 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และ $u = u(x)$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}a^{u(x)} = a^{u(x)}\ell\text{n}a \cdot u'(x)$

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = e^x + e^{-x} + e^{e^x}$

2. $f(x) = 3^{x^2} + e^{x^2+2x}$

3. $f(x) = (e^x + x)(e^{2x} + 1)$

4. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

พิจารณาฟังก์ชัน $y = e^x$ เมื่อ $x > 0$ จะได้ว่า โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผันจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\ell\text{n}x = \frac{1}{x}$$

ทฤษฎีบท 3.5.7 ให้ $u = u(x) > 0$ จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}\ell\text{n}u(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

ตัวอย่าง 3.5.8 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{n}(x^2 + 1)$

2. $f(x) = \ell\text{n}(1 - x - x^2)$

ตัวอย่าง 3.5.9 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{n}(x+1)(x+2)(x+3)$

2. $f(x) = \ell\text{n}\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

ทฤษฎีบท 3.5.10 ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และ $u = u(x)$ ถ้า $\ell\text{og}_a x = \dfrac{\ell\text{n}x}{\ell\text{n}a}$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{og}_a|x| = \dfrac{1}{x\ell\text{n}a}$

2. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{og}_a|u(x)| = \dfrac{1}{u(x)\ell\text{n}a} \cdot u'(x)$

ตัวอย่าง 3.5.11 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = \ell\text{og}_2(x^3+x)$

2. $f(x) = \ell\text{og}_3(x^2+2)(1-x)$

ตัวอย่าง 3.5.12 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

1. $y = (x^3+1)^5(x-1)^7(x^2-4)^9$

2. $y = \dfrac{(x+1)^9(x^2-4)^4}{(1-2x)\sqrt{x^2-1}}$

3. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^4\sqrt{7x+1}}{(2x^3-5)^9}}$

ตัวอย่าง 3.5.13 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = x^x$

2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $y = x^e + e^x$

1.2 $y = 2^{1-x} + 3^{\ell\text{n} x} - e^{3x}$

1.3 $y = 2^{1-x} + 3^{\ell\text{n} x} - e^{3x}$

1.4 $y = (1+\pi)^{x+\pi}$

1.5 $y = \ell\text{og}_2(x^2 + \ell\text{n} x)$

1.6 $y = \ell\text{og}_3(2^x + 3^x)$

1.7 $y = (1+\sqrt{2})^x$

1.8 $y = (1+e)^{1+e^x}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $y = x^{x^2}$

2.2 $y = x^{2^x}$

2.3 $y = (1+e^x)^x$

2.4 $y = (\ell\text{n} x)^x$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $y = x^2 \ell\text{n}^2(3x+1)$

3.2 $y = \sqrt{x^e + e^x}$

3.3 $y = (x+1)^9(x+2)^8(x+3)^7(x+4)^6$

3.4 $y = (x^2+1)^9 \ell\text{n}^2(4x+1)\sqrt{(x+1)^{11}}$

3.5 $y = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)\ell\text{n}|x^3+x|}{(2x-3)^3}}$

3.6 $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^3\sqrt{5x-6}}{(2x^2-1)^5}}$

3.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวนี้จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันคือ ไซน์ โคไซน์ แทนจเจนต์ โคแทนเจนต์ เซแคนต์ และโคเซแคนต์ ซึ่งมีองค์ประกอบและมีเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	**โดเมน**	**เรจน์**
ไซน์ (Sine)	$y = \text{sin}x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
โคไซน์ (Cosine)	$y = \text{cos}x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
แทนเจนต์ (Tangent)	$y = \text{tan}x = \dfrac{\text{sin}x}{\text{cos}x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
โคแทนเจนต์ (Cotangent)	$y = \text{cot}x = \dfrac{\text{cos}x}{\text{sin}x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
เซแคนต์ (Secant)	$y = \text{sec}x = \dfrac{1}{\text{cos}x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
โคเซแคนต์ (Cosecant)	$y = \text{arccsc}x = \dfrac{1}{\text{sin}x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\text{sin}x\text{csc}x = 1$
2. $\text{cos}x\text{sec}x = 1$
3. $\text{cot}x\text{tan}x = 1$
4. $\text{sin}^2x + \text{cos}^2x = 1$
5. $\text{sec}^2x - \text{tan}^2x = 1$
6. $\text{csc}^2x - \text{cot}^2x = 1$
7. $\text{sin}(-x) = -\text{sin}x$
8. $\text{cos}(-x) = \text{cos}x$
9. $\text{tan}(-x) = -\text{tan}x$
10. $\text{sin}(x \pm y) = \text{sin}x\text{cos}y \pm \text{cos}x\text{sin}y$
11. $\text{cos}(x \pm y) = \text{cos}x\text{cos}y \mp \text{sin}x\text{sin}y$
12. $\text{tan}(x \pm y) = \dfrac{\text{tan}x \pm \text{tan}y}{1 \mp \text{tan}x\text{tan}y}$
13. $\text{sin}(2x) = 2\text{sin}x\text{cos}x = \dfrac{2\text{tan}x}{1 + \text{tan}^2x}$
14. $\text{cos}2x = \text{cos}^2x - \text{sin}^2x$

    $\text{cos}2x = 1 - 2\text{sin}^2x$

    $\text{cos}2x = 2\text{cos}^2x - 1$
15. $\text{tan}(2x) = \dfrac{2\text{tan}x}{1 - \text{tan}^2x}$
16. $\text{cos}^2x = \dfrac{1}{2}(1 + \text{cos}2x)$
17. $\text{sin}^2x = \dfrac{1}{2}(1 - \text{cos}2x)$
18. $\text{tan}x = \dfrac{\text{sin}2x}{1 + \text{cos}2x} = \dfrac{1 - \text{cos}2x}{\text{sin}2x}$
19. $\text{sin}3x = 3\text{sin}x - 4\text{sin}^3x$
20. $\text{cos}3x = 4\text{cos}^3x - 3\text{cos}x$

ทฤษฎีบท 3.6.1 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\text{sin}x = \text{cos}x$
2. $\dfrac{d}{dx}\text{sin}u(x) = \text{cos}u(x) \cdot u'(x)$

ทฤษฎีบท 3.6.2 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\text{cos}x = -\text{sin}x$
2. $\dfrac{d}{dx}\text{tan}x = \text{sec}^2x$
3. $\dfrac{d}{dx}\text{sec}x = \text{sec}x\text{tan}x$
4. $\dfrac{d}{dx}\text{cot}x = -\text{csc}^2x$
5. $\dfrac{d}{dx}\text{csc}x = -\text{csc}x\text{cot}x$
6. $\dfrac{d}{dx}\text{cos}u(x) = -\text{sin}u(x) \cdot u'(x)$
7. $\dfrac{d}{dx}\text{tan}u(x) = \text{sec}^2u(x) \cdot u'(x)$
8. $\dfrac{d}{dx}\text{sec}u(x) = \text{sec}u(x)\text{tan}u(x) \cdot u'(x)$
9. $\dfrac{d}{dx}\text{cot}u(x) = -\text{csc}^2u(x) \cdot u'(x)$
10. $\dfrac{d}{dx}\text{csc}u(x) = -\text{csc}u(x)\text{cot}u(x) \cdot u'(x)$

ตัวอย่าง 3.6.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

2. $f(x) = \sin 2x \cos 5x$

3. $f(x) = \tan(\ell n x) + \ell n(\tan x)$

ตัวอย่าง 3.6.4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sec x} + \sec^2 x\right)$

2. $\dfrac{d}{dx}\cot^2(x^2)$

3. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$

ตัวอย่าง 3.6.5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sin x \sin^2 2x \sin^3 3x$

ตัวอย่าง 3.6.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = (\sin x)^x$
2. $y = (\tan x)^{\cos x}$

ตัวอย่าง 3.6.7 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x\cos(\pi x^2)$ ที่จุด $(1, -1)$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x) = \text{cot}x\text{sec}^2x$

   1.2 $f(x) = \text{sin}2x + x\text{cos}x$

   1.3 $f(x) = e^x\text{tan}e^x$

   1.4 $f(x) = e^{-\text{cot}x^2}$

   1.5 $f(x) = \sqrt{e^{-x^2} + \text{cos}x}$

   1.6 $f(x) = 2^{\text{sec}x}\text{cot}(xe^x)$

   1.7 $f(x) = \dfrac{\text{sin}(2e^x)}{1 + \text{tan}(x^{-1})} + e^{\text{tan}x}$

   1.8 $f(x) = xe^{e^x} + \text{sin}^2x + \text{sin}x^2\text{cos}(e^x)$

   1.9 $f(x) = \text{sin}(\text{sec}\sqrt{x})$

   1.10 $f(x) = e^{\text{tan}x} + \text{sin}^5x$

   1.11 $f(x) = \text{sin}x^2 + \text{cos}(1 - x^2)$

   1.12 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\text{sec}^2x + \text{tan}x^2}}$

   1.13 $f(x) = 2^{\text{sin}x}\text{tan}(\text{cos}x)$

   1.14 $f(x) = e^{x^2}\text{sin}^2(\text{tan}^2x^2)$

   1.15 $f(x) = e^x(\text{cos}x + \text{sin}x)$

   1.16 $f(x) = x^2[\text{cos}(\ell\text{n}x) + \text{sin}(\ell\text{n}x)]$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = x^{\text{cos}x}$

   2.2 $f(x) = (\text{tan}x)^{\text{cot}x}$

   2.3 $f(x) = (1 + x)^{\ell\text{n}x}$

   2.4 $f(x) = (\ell\text{n}x)^{e^x}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $y = \sqrt{\dfrac{(x^2-1)^5(1-x-x^3)^9}{\text{tan}^3x\text{cos}^7\ell\text{n}x}}$

   3.2 $y = (1 + \sqrt{x})^{10}\text{sec}^5(\text{cos}x)\text{tan}^7x$

   3.3 $y = \left(\dfrac{\text{cos}x(x^2 - \text{sec}x)^{14}}{(x + \text{cos}x)^3(x+1)^5}\right)^3$

   3.4 $y = \sqrt[3]{\dfrac{\ell\text{n}x^2(\text{sin}x)^5}{(1-x^2)^9}}$

4. ให้ $y = \text{sin}u\text{cos}u$ และ $u = e^{\text{sec}x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

5. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^x\text{cos}(\pi e^x)$ ที่จุด $(0, -1)$

6. จงแสดงว่า $y = 2\text{cos}x + 3\text{sin}x$ สอดคล้องสมการ $y'' + y = 0$

3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

เมื่อเราทราบอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ต่อมาจะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันทั้ง 6 ฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	**โดเมน**	**เรจน์**
อาร์กไซน์ (Arcsine)	$y = \text{arcsin}x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
อาร์กโคไซน์ (Arccosine)	$y = \text{arccos}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
อาร์กแทนเจนต์ (Arctangent)	$y = \text{arctan}x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
อาร์กโคแทนเจนต์ (Arccotangent)	$y = \text{arccot}x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
อาร์กเซแคนต์ (Arcsecant)	$y = \text{arcsec}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
อาร์กโคเซแคนต์ (Arccosecant)	$y = \text{arccsc}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

ทฤษฎีบท 3.7.1 ให้ $u = u(x)$ จะได้ว่า

1. $\frac{d}{dx}\text{arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}\text{arccos}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}\text{arctan}x = \frac{1}{1+x^2}$
4. $\frac{d}{dx}\text{arccot}x = -\frac{1}{1+x^2}$
5. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
6. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}\,x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
7. $\frac{d}{dx}\text{arcsin}u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}u'(x)$
8. $\frac{d}{dx}\text{arccos}u(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}u'(x)$
9. $\frac{d}{dx}\text{arctan}u(x) = \frac{1}{1+[u(x)]^2}u'(x)$
10. $\frac{d}{dx}\text{arccot}u(x) = -\frac{1}{1+[u(x)]^2}u'(x)$
11. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}u(x) = \frac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$
12. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}u(x) = -\frac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

ตัวอย่าง 3.7.2 จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\text{arcsin}x\text{arccos}x\right)$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\text{arctan}x}\right)$

3. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\text{arccsc}x}\right)$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{arctan}x+1}{\text{arccot}x+1}\right)$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \text{arcsin}x^2 + \text{arcsin}^2 x$

2. $f(x) = \ell\text{n}(\text{arcsec}(e^x))$

3. $f(x) = x\text{arctan}(\ell\text{n}x)$

4. $f(x) = \dfrac{\text{arctan}x}{\sqrt{\text{arctan}x^2}}$

ตัวอย่าง 3.7.4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^{\arcsin x}$

ตัวอย่าง 3.7.5 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \ell n(\arctan x)$ ที่จุด $x = 1$

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = \text{arcsin}(x^2+1)$

1.2 $f(x) = \sqrt{x - \text{arccos} x^2}$

1.3 $f(x) = x^3 \text{arcsin}(e^x + x)$

1.4 $f(x) = \text{arccsc}^3 x$

1.5 $f(x) = \text{cos}(\text{arctan} x)\text{sin} 2x$

1.6 $f(x) = \text{arccot} 3x \text{arctan} 4x$

1.7 $f(x) = \dfrac{\text{arcsin}(e^x)}{2x + \text{arccos} x}$

1.8 $f(x) = \text{arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1.9 $f(x) = \sqrt[3]{\text{arccsc} x^2}$

1.10 $f(x) = \text{arcsec}\sqrt{x}$

1.11 $f(x) = \text{arctan}\dfrac{x}{2} + \text{arccot}\dfrac{2}{x}$

1.12 $f(x) = \text{arctan}(\ell\text{n}(\text{tan} x))$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = x^{\text{arctan} x}$

2.2 $f(x) = (\text{arcsin} x)^x$

2.3 $f(x) = (\text{arccos} x)^{\text{arcsin} x}$

2.4 $f(x) = (\sqrt{x})^{\text{arccos} x}$

3. จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = e^{\text{arctan} x}$ ที่จุด $x = 1$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \ell\text{n}(e^{x+1} + \text{arccos} x)$ ที่จุด $x = 0$

5. กำหนดให้ $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\text{arcsin} x}$ จงหา $f'(0)$

6. จงพิสูจน์ว่า

6.1 $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

6.2 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

6.3 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

6.4 $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec} u(x) = \dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

6.5 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc} u(x) = -\dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

6.6 $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc} u(x) = -\dfrac{1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}u'(x)$

3.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ เราจะเรียกฟังก์ชันลักษณะแบบนี้ว่า**ฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function)** แต่ในหัวข้อนี้จะศึกษาการอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$F(x, y) = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรที่ขึ้นกับ x เรียกฟังก์ชันแบบนี้ว่า **ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function) อนุพันธ์ของฟังก์ชันลักษณะนี้เรียกว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย** (differentiation of implicit function) และหาอนุพันธ์ดังกล่าวโดยอาศัยกฎลูกโซ่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8.1 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

1. $x^3 + y^3 = xy$

2. $x^3 + y^2x + x^2y = 5$

3. $xe^y + ye^x = 1$

ตัวอย่าง 3.8.2 จงหา $\frac{dy}{dx}$

1. $\sqrt{xy+y} = x^2y$

2. $\sin(xy) = x\cos y$

3. $\arctan(x+y) = x\ln y$

ตัวอย่าง 3.8.3 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, 4)$

ตัวอย่าง 3.8.4 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $\arctan(xy) + xy = \sqrt{xy} + \frac{\pi}{4}$ ที่จุด $(1, 1)$

ตัวอย่าง 3.8.5 กำหนดให้ $y\sin x = xe^y$ จงหา y''

แบบฝึกหัด 3.8

1. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   1.1 $4x^2 + 9y^2 = 36$

   1.2 $y^2 - x^2 = 1$

   1.3 $y\cos x + xy = y^2$

   1.4 $2x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 3y = 10$

   1.5 $\sqrt{x\sin y} + \sqrt{y} = 0$

   1.6 $\sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{y + \sqrt{x}} = 1$

   1.7 $(x^2y^3 + x^3y^2)^2 = xy^2 - yx^2 + 3$

   1.8 $e^{xy} + \cos(xy) = x\tan y$

   1.9 $\ell n xy + \arctan x^2 y = \sec^2 xy$

   1.10 $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$

   1.11 $\cos^2 xy = \sin xy^2$

   1.12 $e^{\arctan xy} + \sin(\csc xy) = \cot(\ell n y)$

2. จงหา y''

   2.1 $\arctan y = xy$

   2.2 $\sqrt{xy} - 1 = x + y$

   2.3 $y\sec x = y + \cot x$

   2.4 $x = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}}$

3. กำหนดให้ $y = x^y$ จงหา y'''

4. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $yx^2 + xy^2 = 2xy$ ที่จุด $(1, 1)$

5. จงสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x\ell n y + 9 = 5x - xy^2 + \cos\pi x$ ที่จุด $(2, 1)$

บทที่ 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ คือ การประมาณค่าเชิงเส้น การร่างกราฟ การหาค่าสูงสุดต่ำสุด อัตราสัมพัทธ์ และหลักเกณฑ์ลอปีตาล จะทำให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงประโยชน์ของอนุพันธ์และเห็นตัวอย่างในการประยุกต์ในเบื้องต้น

4.1 การประมาณค่าเชิงเส้น

บทนิยาม 4.1.1 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ Δx เป็นส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ x แล้ว **ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential)** ของ x เขียนแทนด้วย dx หมายถึง Δx นั่นคือ $\Delta x = dx$ **ค่าเชิงอนุพันธ์**ของ y เขียนแทนด้วย dy กำหนดโดย

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{หรือ} \qquad df = f'(x)dx$$

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x$ จงหา dy เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม 4.1.1

1. $d(\text{sin}x)$

2. $d(\text{arctan}x)$

3. $d(xe^x)$

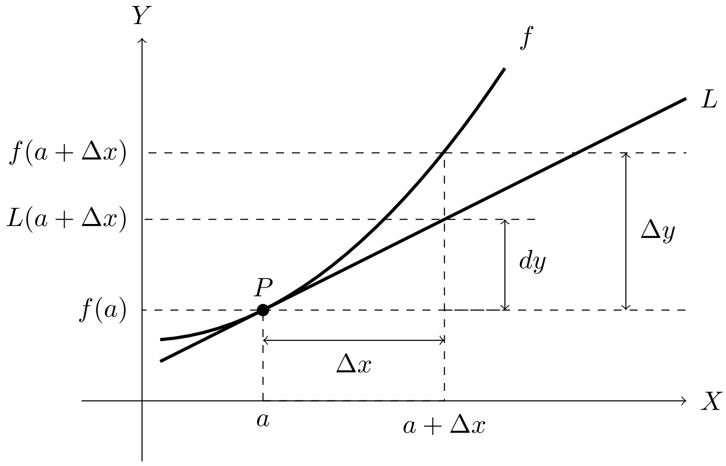
ทฤษฎีบท 4.1.4 กำหนดให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงตัว และ r เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

1. $dc = 0$
2. $d(cu) = cdu$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$
4. $d(uv) = udv + vdu$
5. $d(u^r) = ru^{r-1}du$
6. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - vdu}{v^2}$ เมื่อ $v \neq 0$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $d(x^2 + e^x + \ell\text{n}x)$
2. $d(x\text{sin}x)$
3. $d(\text{cos}^2 x)$
4. $d\left(\dfrac{x}{e^x}\right)$

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $x = a$ และ Δy คือส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ dy คือส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y บนเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ดังรูป



สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ คือ

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

กำหนดให้ $L(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ จะเรียก L ว่า**ฟังก์ชันเชิงเส้นของ** f **(linear function of** f**)** ที่จุด $x = a$ เมื่อพิจารณากราฟ f และ L จะเห็นว่ากราฟทั้งสองที่จุด $x = 1$ มีค่าใกล้เคียงกัน ถ้า Δx มีค่าใกล้ ๆ ศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$f(a + \Delta x) \approx L(a + \Delta x)$$

เนื่องจาก

$$L(a + \Delta x) = f'(a)(a + \Delta x - a) + f(a) = f(a) + f'(a)\Delta x$$

และ

$$\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \approx (f(a) + f'(a)\Delta x) - f(x) = f'(a)\Delta x = df$$

นั่นคือ $\Delta f \approx df$ สรุปได้ว่า

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

จะเรียกว่า **การประมาณค่าเชิงเส้น (linear approximation)** ของ f ที่จุด a

ตัวอย่าง 4.1.6 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\sqrt{16.001}$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\sqrt[3]{7.998}$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\tan 50^\circ$

ในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการวัด กำหนดให้

1. u เป็นปริมาณที่ต้องการวัด
2. $|du|$ เป็น**ค่าคลาดเคลื่อน (error)** ในการวัดของ u
3. $\left|\dfrac{du}{u}\right|$ เป็น**ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error)** เมื่อ $u \neq 0$ และ

   $\left|\dfrac{du}{u}\right| \times 100$ เป็น**ร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (percent of relative error)**

ตัวอย่าง 4.1.9 เมื่อวัดด้านของลูกบาศก์ลูกหนึ่งยาว 25 เซนติเมตร พบว่าวัดความคลาดเคลื่อนไปด้านละไม่เกิน 0.04 เซนติเมตร จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าความคลาดเคลื่อนเป็นกี่เปอร์เซนต์ของปริมาตรนี้

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $d(\text{tan}x)$
   1.2 $d(x\text{cot}x)$
   1.3 $d(e^x\text{sin}x)$
   1.4 $d(\text{arctan}^3 x)$

2. ให้ $f(x) = 3x^2 + 1$ จงหา Δy, dy และ $|\Delta y - dy|$ เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = -0.01$

3. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้สำหรับค่า a และ Δx ที่กำหนดให้

   3.1 $f(x) = 2x^2 + 1$; $a = 1$ และ $\Delta x = 0.1$
   3.2 $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$ และ $\Delta x = 0.02$
   3.3 $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; $a = 4$ และ $\Delta x = -0.2$
   3.4 $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$; $a = 3$ และ $\Delta x = 0.03$

4. จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ

   4.1 $\sqrt{81.03}$
   4.2 $\sqrt[3]{15.89}$
   4.3 $\sqrt[4]{127}$
   4.4 $(33)^{\frac{2}{5}}$
   4.5 $\text{sin}(0.03)$
   4.6 $(8.1)^{\frac{4}{3}} + (8.1)^{\frac{2}{3}}$
   4.7 $\sqrt[3]{26.5}$
   4.8 $\text{sin}46^\circ$
   4.9 $e^{0.02}$

5. ถังใบรูปทรงกระบอกใบหนึ่งไม่มีฝา ต้องการทาสีด้านนอกรอบถังโดยทาสีหนา 0.25 เซนติเมตร ถ้าวัดรัศมีภายนอกได้ 75 เซนติเมตร และถังสูง 150 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของสีที่ใช้ทาถังโดยการประมาณค่าเชิงเส้น

6. ในการวัดด้านของรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสรูปหนึ่งซึ่งยาว 16 นิ้ว พบว่าวัดคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 นิ้ว เราจะคำนวณพื้นที่คลาดเคลื่อนไปไม่เกินเท่าใด และจงหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และค่าความคลาดเคลื่อนคิดเป็นร้อยละของพื้นที่นี้

7. เมื่อวัดรัศมีวงกลมและคำนวณปริมาตรพบว่า ปริมาตรมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 3 ลูกบาศก์เมตร รัศมีที่วัดได้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 เมตร จงหารัศมีที่ยาวที่สุดที่วัดได้ และหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

4.2 ค่าสุดขีด

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงค่าสุดขีดซึ่งหมายถึงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งใช้การตรวจสอบจากอนุพันธ์โดยการแปลความหมายทางเรขาคณิต และนั่นหมายถึงการนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดที่มักพบในโลกจริงได้

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

   สำหรับ x_1 และ x_2 ใน I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

2. f เป็น**ฟังก์ชันลด (decreasing function)** บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

   สำหรับ x_1 และ x_2 ใน I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

ข้อสังเกต 4.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (ฟังก์ชันลด) บนช่วง I และ J แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (ฟังก์ชันลด) บนช่วง $I \cup J$

ตัวอย่าง 4.2.3 จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาช่วงที่ทำให้ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันลด

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหา a ที่ทำให้ $f(x) = \ell\text{n}(e^x + a)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนจำนวนจริง

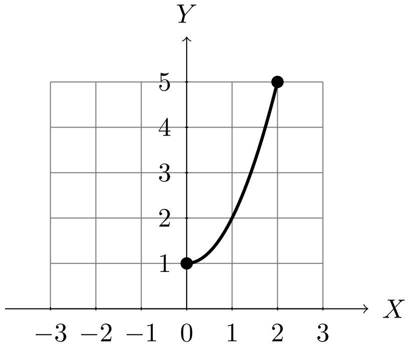
บทนิยาม 4.2.8 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุด (maximum value)** หรือ**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$
2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุด (minimum value)** หรือ**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$
3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีด (extreme value)** บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ f บน S

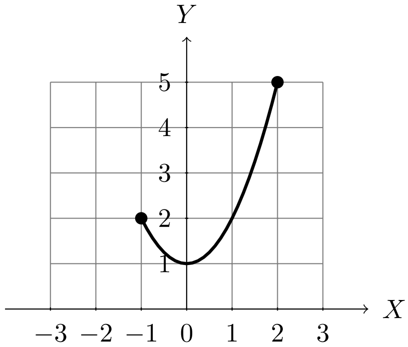
ตัวอย่าง 4.2.9 จงแสดงว่า $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.2.10 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วงที่กำหนดโดยใช้กราฟ

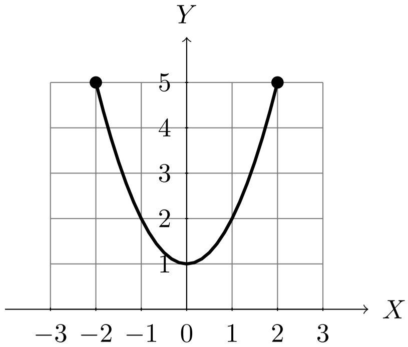
1. $[0, 2]$



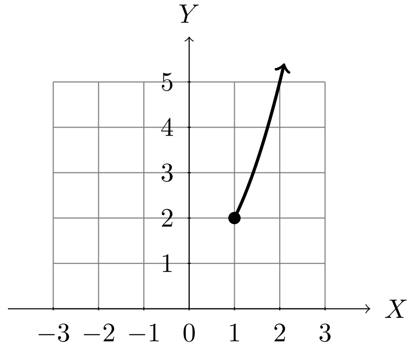
2. $[-1, 2]$



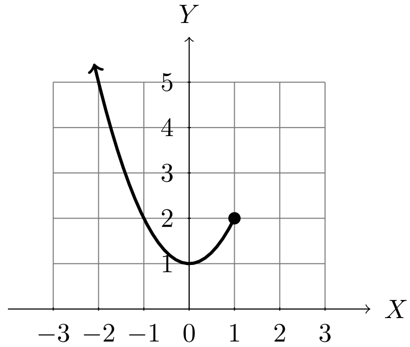
3. $[-2, 2]$



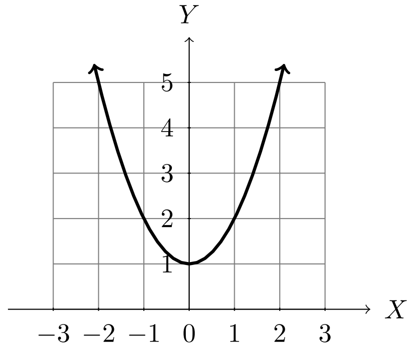
4. $[1, \infty)$



5. $(-\infty, 1]$

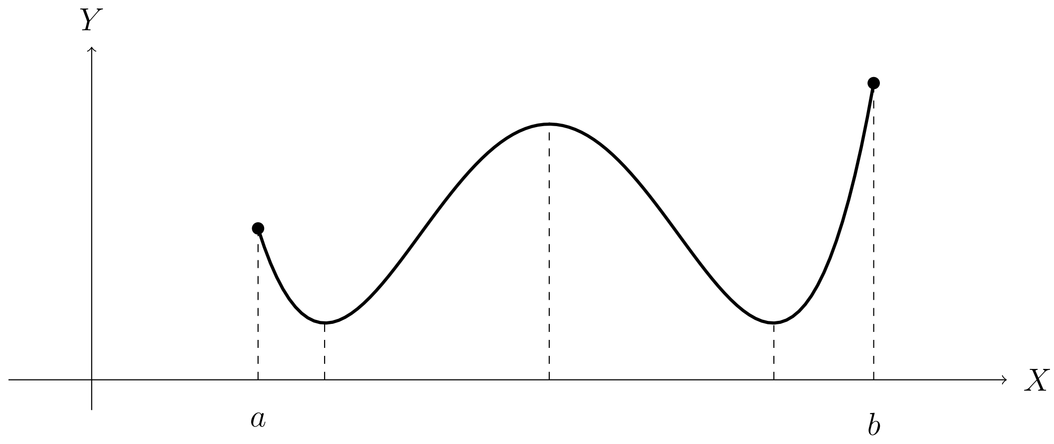


6. $(-\infty, \infty)$



บทนิยาม 4.2.11 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \geq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$
2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \leq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$
3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extreme value)** บน S ก็ต่อเมื่อ
$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S



ตัวอย่าง 4.2.12 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

ทฤษฎีบท 4.2.13 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ แล้ว

ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 4.2.14 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ แล้วจะเรียก

c ว่า**จุดวิกฤต (critical point)** ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 4.2.15 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

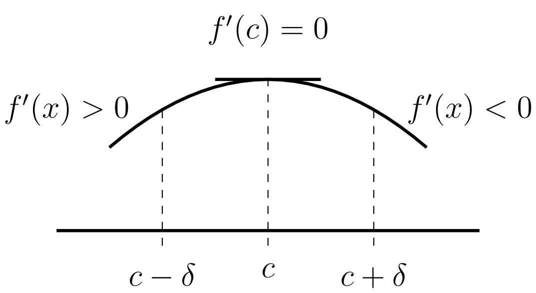
4. $f(x) = xe^x$

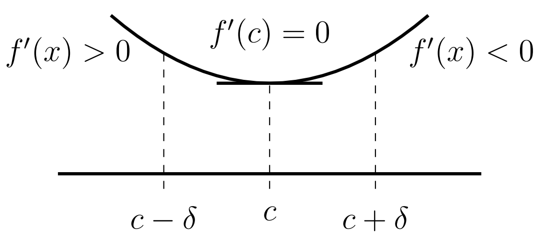
โดยทฤษฎีบท 4.2.13 สรุปได้ว่าการจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ย่อมต้องหาจุดวิฤตเป็นอันดับแรก จากนำจุดวิกฤตมาตรวจสอบว่าจุดนั้นให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ทำได้โดย 2 วิธี คือ การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และ การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ทฤษฎีบท 4.2.16 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative Test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง S และ $c \in S$ เป็นจุดวิกฤตของ f แล้ว มี $\delta > 0$ ซึ่ง

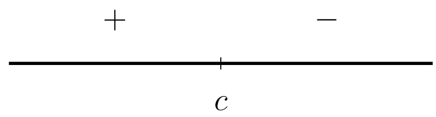
1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

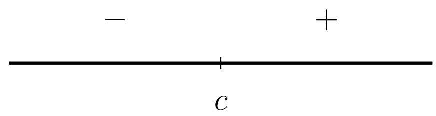




อาจพิจารณาเครื่องหมายของ f' โดยแทน $+$ เมื่อ $f'(x) > 0$ และ $-$ เมื่อ $f'(x) < 0$ บนเส้นจำนวน จะได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อสอดคล้อง



$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อสอดคล้อง



ถ้าเครื่องหมายไม่สอดคล้องทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่าจุดวิกฤตนั้นไม่ใช่จุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.2.17 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

2. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

ทฤษฎีบท 4.2.18 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivative Test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ หาค่าได้ แล้ว

1. $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่าง 4.2.19 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2. $f(x) = x(x-1)^4$

3. $f(x) = xe^x$

ตัวอย่าง 4.2.20 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^2 - x^{\frac{3}{2}} + 1$

2. $f(x) = (x^3 - 1)^{\frac{2}{3}}$

3. $f(x) = x^2 e^x$

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีด

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) หาค่าสุดขีดได้ดังนี้

1. หาจุดวิกฤติ c ของ f
2. หาค่า $f(c)$ ทั้งหมด $f(a)$ และ $f(b)$
3. เปรียบเทียบค่าในขั้นตอนที่ 2 โดย
   - ค่ามากที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของ f บน $[a, b]$
   - ค่าน้อยที่สุด จะเป็นค่าต่ำสุดของ f บน $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.2.21 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 12x + 5$ บนช่วง $[-3, 3]$

ตัวอย่าง 4.2.22 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x + \cos x$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

การนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด โดยทั่วไปเรามักจะจำลองปัญหาดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน เช่นให้

$y = f(x)$ แทนฟังก์ชันของปัญหาดังกล่าว

เราอาจจะต้องหาค่าสุดขีดของ y เมื่อ x เป็นค่า ๆ หนึ่ง โดยใช้กระบวนการหาดังขั้นตอนการหาค่าสุดขีด ดังจะแสดงตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.23 เมื่อนำจำนวนจริงสองจำนวนมารวมกันได้เท่ากับ 16 จงหาผลคูณที่มากที่สุดของสองจำนวนนั้น

ตัวอย่าง 4.2.24 มีไม้ทำรั้วยาว 800 เมตร นำมาล้อมรั้วบ้านเป็นรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้า โดยใช้บ้านเป็นรั้วด้านหนึ่ง จงหาพื้นที่มากสุดที่ล้อมรั้วนี้ได้

ตัวอย่าง 4.2.25 จงหาด้านของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงไปในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ a และ b

ตัวอย่าง 4.2.26 จงหาส่วนสูงของกรวยกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุในทรงกลมรัศมี r หน่วย

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด พร้อมหาจุดวิกฤติ

1.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1.2 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

1.3 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

1.4 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

1.5 $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

1.6 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1.7 $f(x) = (6-x)x^{\frac{1}{5}}$

1.8 $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

2. จงหาค่าสุดขีดบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 2x - x^2$; $[0, 1]$

2.2 $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$; $[-1, 5]$

2.3 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $[\frac{1}{2}, 5]$

2.4 $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$; $[-5, 5]$

3. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

3.2 $f(x) = x^4 + 2x^3$

3.3 $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6$

3.4 $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$

3.5 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

3.6 $f(x) = x\sqrt[3]{5-x}$

3.7 $f(x) = (1-x^2)(1-x)$

3.8 $f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}$

3.9 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$

3.10 $f(x) = x^2(1+x)^{\frac{1}{3}}$

3.11 $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

3.12 $f(x) = \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

4. จงหาพื้นที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านที่เท่ากันทั้งสองด้านยาวเท่ากับ 12 หน่วย

5. จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด ที่บรรจุในกรวยกลมซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 นิ้ว และสูง 30 นิ้ว โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

6. กระป๋องรูปทรงกระบอกกลมตรงมีปริมาตร 125 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฝาปิดหัวท้าย ฝาปิดทำจากแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และผิวด้านข้างทำจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหารัศมีและความสูงของกระป๋องที่ทำให้ใช้ปริมาณโลหะน้อยที่สุด

7. โรงเรียนแห่งหนึ่งนำนักเรียนไปทัศนศึกษา โรงเรียนเก็บเงินนักเรียนคนละ 150 บาท ถ้ามีนักเรียนไม่เกิน 150 คน แต่ถ้านักเรียนไปเกิน 150 คนจะเก็บลดลง 50 สตางค์คูณด้วยจำนวนคนที่เกินจากจำนวน 150 คน นักเรียนควรไปทัศนศึกษากี่คนจึงจะทำให้โรงเรียนเก็นเงินได้มากสุด

4.3 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

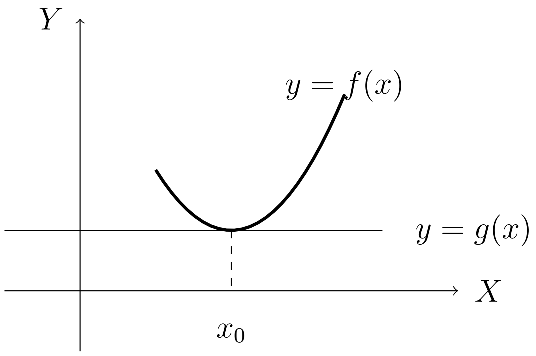
บทนิยาม 4.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x_0 และ $y = g(x)$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด x_0

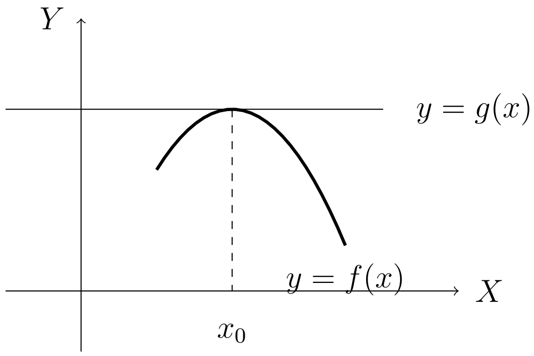
1. f มีความ**เว้าล่าง (concave downward)** ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) < g(x) \text{ ทุกๆ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ ๆ } x_0$$

2. f มีความ**เว้าบน (concave upward)** ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) > g(x) \text{ ทุกๆ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ ๆ } x_0$$





ตัวอย่าง 4.3.2 จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ มีความเว้าบนที่จุด 0

บทนิยาม 4.3.3 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $S \subseteq D$

1. f มีความ**เว้าล่าง** บน S ก็ต่อเมื่อ

$$f \text{ มีความเว้าล่างที่ทุก ๆ } x \in S$$

2. f มีความ**เว้าบน** บน S ก็ต่อเมื่อ

$$f \text{ มีความเว้าบนที่ทุก ๆ } x \in S$$

ข้อสังเกต 4.3.4 ถ้า f มีความเว้าบน (เว้าล่าง) บนช่วง S และ T แล้ว f มีความเว้าบน (เว้าล่าง) บนช่วง $S \cup T$

บทนิยาม 4.3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 เรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่า**จุดเปลี่ยนเว้า (inflection point)** ก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ซึ่งเปลี่ยนจากความเว้าแบบหนึ่งบนช่วง $(x_0 - \delta, x_0)$ ไปเป็นความเว้าอีกแบบหนึ่งบนช่วง $(x_0, x_0 + \delta)$

การตรวจสอบความเว้าบน ความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า ของบางฟังก์ชันโดยใช้นิยามอาจมีความยุ่งยาก จะมีทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสองมาช่วยการตรวจสอบดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ แล้ว

1. ถ้า $f''(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าบนบนช่วง (a, b)
2. ถ้า $f''(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f มีความเว้าล่างบนช่วง (a, b)
3. ถ้า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f แล้ว $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 4.3.7 ให้ $f(x) = x^4 - 4x^3$ จงหาช่วงของ f ที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้าของ f

ตัวอย่าง 4.3.8 จงหาช่วงที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = xe^{-2x}$

2. $f(x) = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

แบบฝึกหัด 4.3

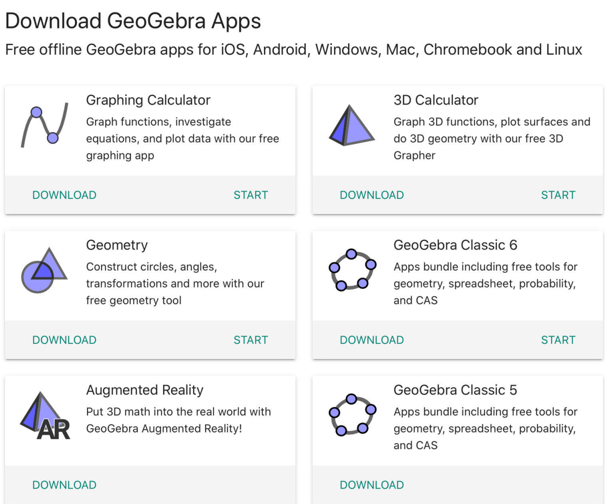
จงหาช่วงที่มีความเว้าบน มีความเว้าล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$
2. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$
3. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$
4. $f(x) = x^6 - 15x^2 + 5$
5. $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}$
6. $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$
7. $f(x) = (2-x)x^{\frac{1}{5}}$
8. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
10. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
11. $f(x) = (x-1)e^{-x}$
12. $f(x) = e^{-x^2}$

4.4 การร่างกราฟ

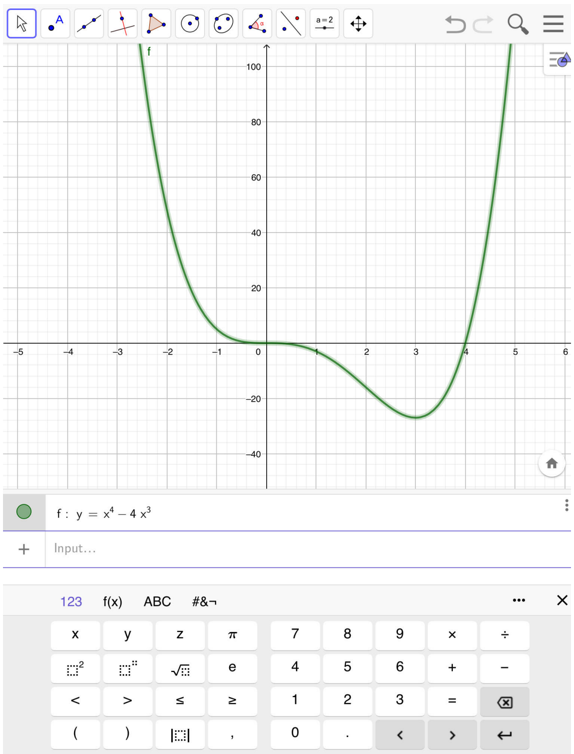
การสร้างกราฟของฟังก์ชันในปัจจุบันทำได้ง่ายเพียงแค่พิมพ์สมการลงในโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น GSP และ GeoGebra เป็นต้น โดยเฉพาะโปรแกรม GeoGebra ซึ่งผู้ผลิตทำออกมาให้ใช้ฟรีสำหรับการศึกษาโดยเฉพาะ มีให้ใช้ในรูปแบบออนไลน์และออฟไลน์ ทั้งในรูปโปรแกรม และในรูปของแอพพลิเคชั่น โดยแบ่งออกเป็นหลายชนิดให้เหมาะกับการใช้งานแต่ละชนิด ดังรูป 4.1 สามารถเข้าใช้งาน และโหลดโปรแกรมหรือแอพพลิเคชั่นได้ที่ www.geogebra.org สำหรับแอพพลิเคชั่นมีให้ดาวโหลดใน App Store และ Google Play ใช้กับมือถือหรือแท็บเล็ต โดยการออกแบบการที่ใช้งานที่ง่ายทำให้เป็นที่นิยมใช้กันทั่วโลก ถ้าผู้อ่านสนใจสามารถศึกษาการใช้ได้จากเวปไซต์ดังกล่าว

รูปที่ 4.1: ตัวอย่าง Download GeoGebra Apps



ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน $y = x^4 - 3x^3$ โดยใช้แอพพลิเคชั่น Geogebra Classic 5 แสดงดังรูป 4.2 จะเห็นได้ว่ากราฟของฟังก์ชันที่เกิดขึ้นได้จากการพิมพ์สมการ ในช่องด้านล่างโดยอาศัยแป้นพิมพ์ที่มีให้ในแอพพลิเคชั่น แต่ถ้าไม่มีเครื่องมือเหล่านั้น เราอาจร่างกราฟของฟังก์ชันได้ถ้าเราทราบองค์ประกอบต่าง ๆ เช่น โดเมน จุดตัดแกน เส้นกำกับ (ถ้ามี) ช่วงที่ทำให้เกิดฟังก์ชันเพิ่มและลด ช่วงที่ทำให้เกิดความเว้าบนและอยู่ล่าง เป็นต้น ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการร่างกราฟ โดยอาศัยการประกอบกันขององค์ประกอบต่าง ๆ

รูปที่ 4.2: ตัวอย่างกราฟจาก GeoGebra Classic 5



บทนิยาม 4.4.1 เส้นตรง $x = a$ เป็น **เส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)** ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

บทนิยาม 4.4.2 เส้นตรง $y = b$ เป็น **เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote)** ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

บทนิยาม 4.4.3 เส้นตรง $y = ax + b$ เป็น **เส้นกำกับแนวเอียง (slant asymptote)** ของกราฟของฟังก์ชัน f ถ้า $f(x) = (ax + b) + g(x)$ และ $a \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to \infty} g(x) = 0$$

ข้อสังเกต 4.4.4 ถ้ากราฟมีเส้นกำกับแนวเอียงแล้วจะไม่มีเส้นกำกับแนวนอน

ตัวอย่าง 4.4.5 จงหาเส้นกำกับแนวยืน เส้นกำกับแนวนอน และ เส้นกำกับแนวนอนเอียง (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

2. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

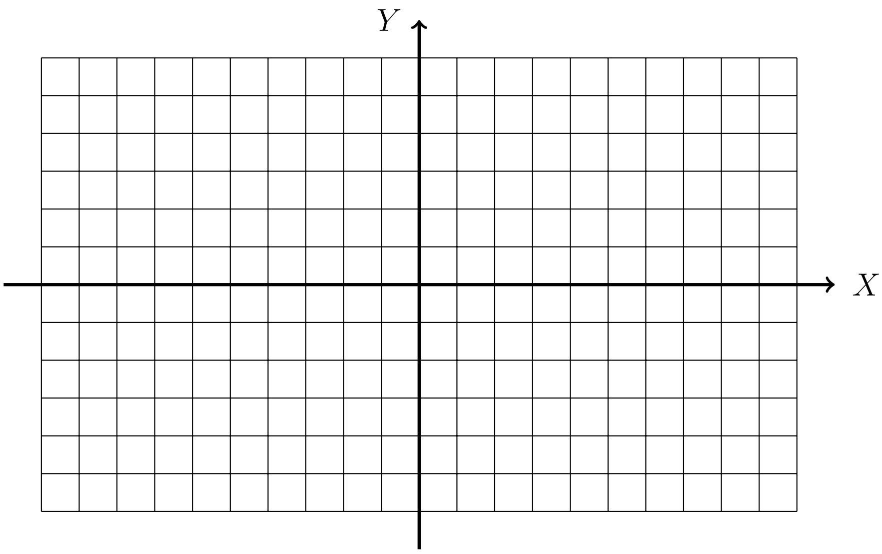
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$

การวิเคราะห์กราฟและร่างกราฟ

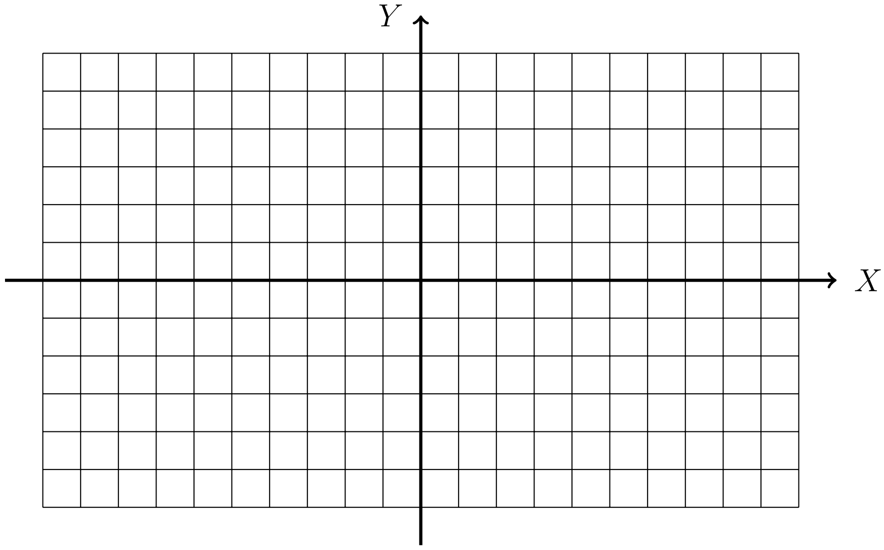
การร่างกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$ เราควรวิเคราะห์ข้อมูลประกอบการร่างกราฟ และทำตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ตรวจโดเมนของ f และหาเส้นกำกับ (ถ้ามี) พร้อมดูพฤติกรรมของกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$
2. หาจุดตัดแกน X และ Y (ถ้ามี)
3. หา $f'(x)$ และจุดวิกฤตของ f พร้อมหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด
4. หา $f''(x)$ และจุดที่มีโอกาสเป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f พร้อมหาช่วงที่ f มีความเว้าบน และช่วงที่ f มีความเว้าล่าง
5. ร่างกราฟของฟังก์ชันโดยใช้ข้อมูลจากข้อ 1 ถึง 4

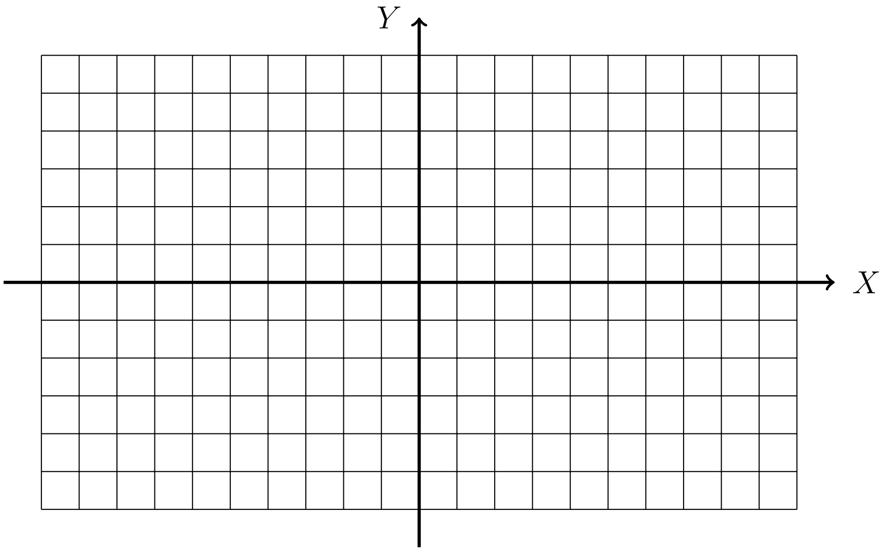
ตัวอย่าง 4.4.6 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^4 - 4x^3$



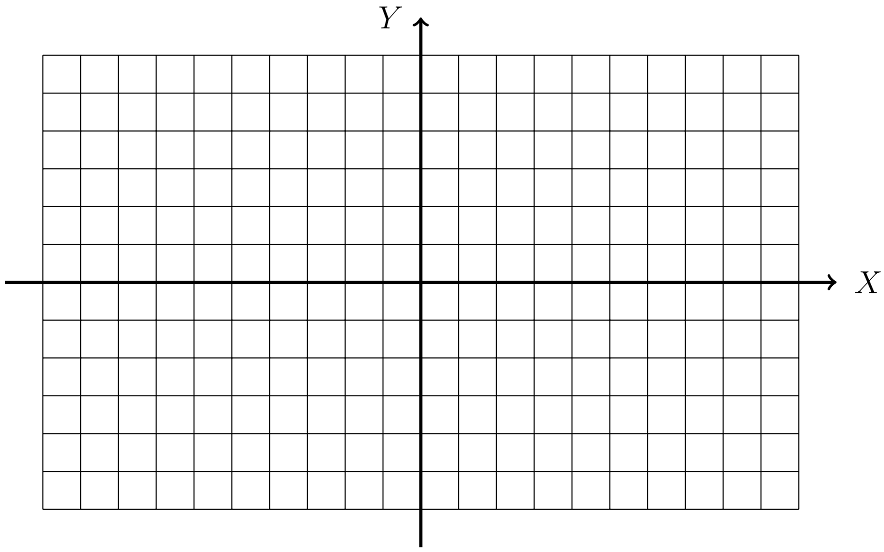
ตัวอย่าง 4.4.7 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$



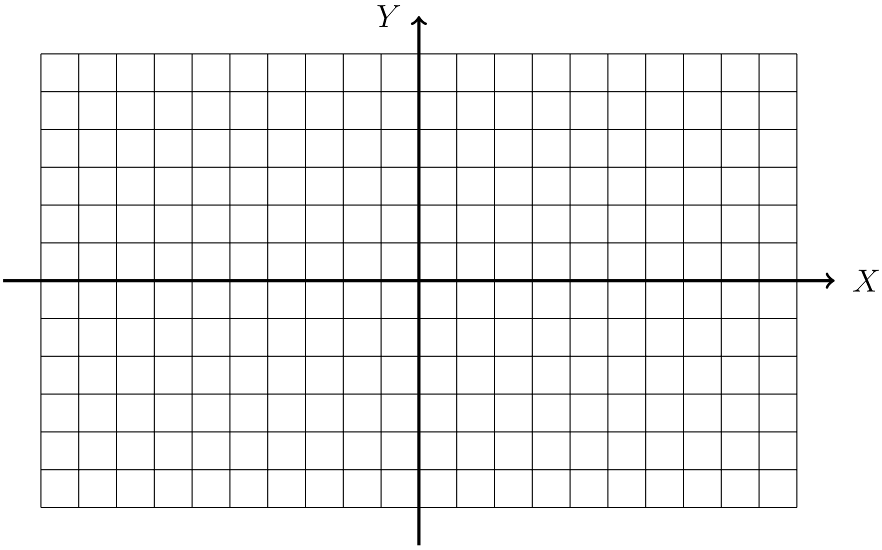
ตัวอย่าง 4.4.8 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$



ตัวอย่าง 4.4.9 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$



ตัวอย่าง 4.4.10 จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$



แบบฝึกหัด 4.4

จงวิเคราะห์และร่างกราฟของเส้นโค้งต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
2. $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$
3. $f(x) = 2 - (x-3)^{\frac{1}{3}}$
4. $f(x) = x^2e^{-3x}$
5. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$
7. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = x(4-x)^{\frac{1}{3}}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$
10. $f(x) = 5x^{\frac{1}{5}} - 2x$
11. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$
12. $f(x) = e^{-x^2}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-3}$
14. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$

4.5 อัตราสัมพัทธ์

ในหัวนี้เราจะศึกษาการประยุกต์อนุพันธ์เพื่อใช้หาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณต่าง ๆ เทียบกับเวลา ซึ่งเรียกว่า **อัตราสัมพัทธ์ (relative rate)** ทำให้เราสนใจปัญหากับผลกระทบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวอื่น ๆ เทียบกับเวลา เราเรียกปัญหาแบบนี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์** (relative rate problem)

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่ขึ้นกับเวลา
2. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในข้อ 1 (ถ้าเขียนได้)
3. สร้างสมการระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ที่ขึ้นกับเวลา
4. หาอนุพันธ์ของข้อ 3 เทียบกับเวลา
5. แทนค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนด และคำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 4.5.1 ชายคนหนึ่งเดินเข้าหาฐานหอคอยที่มีความสูง 60 ฟุต ด้วยอัตราเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าชายผู้นี้จะเคลื่อนที่เข้าใกล้ยอดของหอคอยด้วยอัตราเร็วเท่าใด ในขณะเขาอยู่ห่างจากฐานของหอคอยเป็นระยะทาง 80 ฟุต

ตัวอย่าง 4.5.2 ถังน้ำรูปกรวยกลมตรง มีเส้นผ่านศูนย์กลางที่ปากถังยาว 1 เมตร และสูง 2 เมตร ไขน้ำเข้าถังด้วยอัตราเร็ว 50 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำในถังจะสูงขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อความสูงของน้ำในถังเป็น 80 เซนติเมตร

ตัวอย่าง 4.5.3 สมชายยืนบนท่าเรือซึ่งสูงกว่าระดับน้ำ 10 ฟุต สาวเชือกดึงเรือบดเข้าหาฝั่งด้วยความเร็วของเชือก 15 ฟุตต่อนาที จงหาว่ามุมที่เชือกทำกับแนวระดับจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยความเร็วเท่าใด ขณะที่เชือกผูกเรือ ยาว 20 ฟุต (มุมหน่วยเป็นเรเดียน)

แบบฝึกหัด 4.5

1. โยนก้อนหินก้อนหนึ่งลงในสระ จะทำให้เกิดน้ำเป็นละลอกแผ่ออกไปเป็นวงกลมมีจุดศูนย์–กลางอยู่ที่จุดของก้อนหินตกรัศมีของวงกลมวงนอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 50 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาพื้นที่ของวงกลมที่จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด หลังจากที่ก้อนหินตกถึงผิว–น้ำ 5 วินาที

2. จรวดลำหนึ่งถูกยิงขึ้นจากพื้นดินตามแนวดิ่ง ขณะที่จรวดเคลื่อนที่ขึ้นไปได้มีเรดาห์ซึ่งอยู่ห่างจากฐานยิงจรวดไปตามพื้นดินเป็นระยะ 3 กิโลเมตร คอยสังเกตการเคลื่อนที่ จงหาอัตราเร็วของจรวดขณะเมื่อระยะทางจากเรดาห์ถึงจรวดมีค่าเท่ากับ 5 กิโลเมตร โดยระยะทางนี้กำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 5,000 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

3. บันไดยาว 13 ฟุต วางพิงกำแพงไว้ ถ้าฐานบันไดกำลังเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ม 0.1 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด และจงหาอัตราเร็วของมุมที่บันไดทำกับพื้นดินขณะที่ยอดอยู่สูงจากพื้น 12 ฟุต

4. อากาศถูกอัดใส่ในลูกโป่งรูปทรงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว 10 ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที จงหาอัตราเร็วของพื้นที่ผิวของลูกโป่งที่เพิ่มขึ้น ขณะที่รัศมีของลูกโป่งเป็น 5 นิ้ว

5. ถ้ามุมเงยของดวงอาทิตย์เป็น 45 องศา และกำลังลดลงด้วยอัตรา 0.25 เรเดียนต่อวินาที จงหาว่าเงาของเราซึ่งสูง 5 ฟุต ที่ทอดบนพื้นดินจะยาวขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

6. ถังรูปทรงกระบอกกลมมีรัศมี 4 ฟุต และสูง 6 ฟุต บรรจุน้ำเต็ม ถ้าด้านล่างของถังเจาะรูไขน้ำออก โดยที่ อัตราเร็วของน้ำที่ไหลออกขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำ ถ้า h เป็นความสูงของระดับน้ำ อัตราเร็วของน้ำที่ไหลออก จะเท่ากับ h/2 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการลดลงของระดับน้ำ เมื่อเหลือน้ำ 1/2 ของถัง

7. ถังน้ำมันทรงกระบอกถังหนึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 เซนติเมตร มีรูรั่วที่ทำให้น้ำมันไหลออกมา ด้วยอัตรา 8 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าระดับน้ำมันในถังจะลดลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด

8. แผ่นโลหะกลมเมื่อได้รับคว้าร้อนจะขยายตัว เส้นรอบวงยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 2 เซน–ติเมตรต่อนาที พื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่เส้นรอบวงยาว 10 เซนติเมตร

9. เติมน้ำลงแท็งก์น้ำรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยอัตราคงที่ 6 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที แท็งน้ำมีฐานกว้าง 3 เมตร ยาว 4 เมตร และสูง 5 เมตร จงหาว่าระดับน้ำในแท็งก์น้ำสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด

10. เครื่องแปรรูปแผ่นยางพาราเครื่องหนึ่งทำการยืด/หดยางพารารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยอัตราดังนี้ ยืด ด้านกว้างขึ้นด้วยอัตราเร็ว 1 เซนติเมตร/วินาที หดด้านยาวลงด้วยอัตราเร็ว 2 เซนติเมตร/วินาที จงหาอัตราการ เปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของยางพาราในขณะที่ด้านกว้างเท่ากับด้านยาวมีค่าเป็น 60 เซนติเมตร

4.6 หลักเกณฑ์ลอปีตาล

การหาลิมิตในบทที่ 2 อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดสำหรับฟังก์ชันตรรกยะ หรือฟังก์ชันที่สามารถเปลี่ยนรูป หรือใช้บางทฤษฎีบทมาช่วยในการหาค่าลิมิต แต่ฟังก์ชันที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นอาจใช้วิธีดังกล่าวไม่ได้เช่น

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ell\text{n}x+x-1}{\sqrt{x}-1}$$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง **หลักเกณฑ์ลอปีตาล (l' Hospital's rule)** ซึ่งถูกเขียนไว้ในหนังสือชื่อ *Analyse des Infiniment Pertits* ในปี 1696 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสนามว่า มาควิส เดอ โลปีตาล (Marquis de l' Hospital, 1661–1704) แต่ผู้คนพบกฎนี้คือ จอห์น แบร์นูลลี (John Bernoulli, 1667–1748) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส

ทฤษฎีบท 4.6.1 หลักเกณฑ์ลอปีตาล

1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $S=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ สำหรับบางค่า $\delta>0$ $g(x)\neq 0$ และ $g'(x)\neq 0$ ทุก ๆ $x\in S$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x>N$ สำหรับบางค่า $N>0$ และ $g'(x)\neq 0$ ทุก ๆ $x>N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x<N$ สำหรับบางค่า $N<0$ และ $g'(x)\neq 0$ ทุก ๆ $x<N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะใช้กับรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น แต่เราอาจประยุกต์ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาลกับรูปแบบยังไม่กำหนดอื่น ๆ ดังต่อไปนี้

$$\infty-\infty \qquad 0\cdot\infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

แต่จะไม่พิสูจน์หลักเกณฑ์ลอปีตาลในวิชานี้ ผู้สนใจอาจศึกษาได้จากแคลคูลัสขั้นสูง

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 6x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x+e^x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ell n x}{\cot x}$

ตัวอย่าง 4.6.3 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+e^x(x-1)}$

ตัวอย่าง 4.6.4 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2\ell n(\cos x)}{2-2\cos x-x^2}$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะกล่าวถึงรูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$ และ $0 \cdot \infty$ เราสามารถเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบ $I.F. \ \dfrac{0}{0}$ หรือ $I.F. \ \dfrac{\infty}{\infty}$ ดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.5 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cot x - \csc x)$
2. $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ell n x} \right)$

ตัวอย่าง 4.6.6 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x} \right)$

ตัวอย่าง 4.6.7 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ell\text{n}x$

ตัวอย่าง 4.6.8 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$

สุดท้ายจะกล่าวถึงรูปแบบยังไม่กำหนด 0^0, ∞^0 และ 1^∞ นั่นคือพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน $[f(x)]^{g(x)}$ จากนั้นกำหนดให้ $y = [f(x)]^{g(x)}$ จะได้

$$\ell \text{n} y = (g(x)) \ell \text{n}[f(x)]$$

แล้วหาลิมิตของ $\ell \text{n} y$ และหาค่าลิมิตของ y จากสมบัติของลิมิตที่ว่า

$$\lim_{x \to a} \ell \text{n} y = \ell \text{n} \left(\lim_{x \to a} y \right)$$

ดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.9 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x$

ตัวอย่าง 4.6.10 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{x \to \infty} (2^x + x)^{\frac{2}{x}}$

แบบฝึกหัด 4.6

จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos^2 x}{x\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x + \sin x}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\ell n x}{x^2 + 1}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x}{\ell n(x + e^x)}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot 3x}{\cot 2x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\ell n x}{x + \ell n x}$
13. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2e^{2x} + \ell n x}{e^{2x} + x^2}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - 3e^x - e^{-3x}}{4x^2}$
15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ell n x}{x - 1}$
16. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^8}{e^x}$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x)\ell n(\sin x)$
19. $\lim\limits_{x\to \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$
20. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\tan 5x$
22. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2 - \sec\dfrac{1}{x}\right)2^{-x^2}$
23. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$
24. $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x}{\ell n x}\right)$
25. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\csc^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$
26. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$
27. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ell n x} + \dfrac{x}{x-1}\right)$
28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan 5x - \tan x)$
29. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x}{x} - \csc x\right)$
30. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right)$
31. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
32. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$
33. $\lim\limits_{x\to 1^-} (\sqrt{2 - x^2} - 1)^{x-1}$
34. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)^{\ell n x}$
35. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}$
36. $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{2}{x}}$
37. $\lim\limits_{x\to 0^-} (\cos x - \sin x)^{\frac{1}{x}}$
38. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$
39. $\lim\limits_{x\to \infty} (e^x + x)^{\frac{e}{x}}$
40. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^3}\right)^x$
41. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot x}$
42. $\lim\limits_{x\to \infty} (2^x + x^2)^{\frac{1}{x}}$
43. $\lim\limits_{x\to 0} (e^{x^2}\cos x)^{\frac{4}{x^4}}$
44. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x\tan x)^{\cos x}$
45. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{3}{x}}$

บทที่ 5

ปริพันธ์

5.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ในหัวข้อนี้เราจะการดำเนินการย้อนกลับของการหาอนุพันธ์เรียกว่า **การหาปริพันธ์ (integration)**

บทนิยาม 5.1.1 เรียกฟังก์ชัน f ว่าหาปฏิยานุพันธ์ได้บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน F ซึ่ง

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก F ว่าเป็น**ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative)** ของฟังก์ชัน f บนช่วง I

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ อย่างน้อย 2 ฟังก์ชัน

1. $f(x) = 3x^2$
2. $f(x) = \sin x$

ทฤษฎีบท 5.1.3 ถ้า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f บนช่วง I แล้วมี C ซึ่ง

$$G(x) = F(x) + C \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก $F(x) + C$ ว่า**ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป (general antiderivative)** ของ f บนช่วง I

บทนิยาม 5.1.4 ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral)** ของ f เขียนแทนด้วย $\int f(x)\,dx$ จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

เรียก $\int$ ว่าเครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)

เรียก $f(x)$ ว่าตัวถูกปริพันธ์ (integrand)

เรียก x ว่าตัวแปรของปริพันธ์ (variable of integral)

เรียก C ว่าค่าคงตัวของปริพันธ์ (constant of integral)

ทฤษฎีบท 5.1.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้ และ k เป็นค่าคงตัวแล้ว

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
4. $\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

จากความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\int 1\,dx &= x + C \\
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{เมื่อ } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ell\text{n}|x| + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C \\
\int \text{sin}x\,dx &= -\text{cos}x + C \\
\int \text{cos}x\,dx &= \text{sin}x + C \\
\int \text{sec}x\text{tan}x\,dx &= \text{sec}x + C \\
\int \text{sec}^2x\,dx &= \text{tan}x + C \\
\int \text{csc}x\text{cot}x\,dx &= -\text{csc}x + C \\
\int \text{csc}^2x\,dx &= -\text{cot}x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \text{arcsin}x + C = -\text{arccos}x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \text{arctan}x + C = -\text{arccot}x + C \\
\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \text{arcsec}\,x + C = -\text{arccsc}x + C
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int 3x^2 + x - 1\,dx$

2. $\int 2e^x - 2^{x+1} - \cos x\,dx$

3. $\int \dfrac{2+x^2}{1+x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$

2. $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3. $\int \dfrac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 5.1.8 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{1+\text{sin}x}{\text{cos}^2 x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{1}{1-\text{cos}x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.1.10 จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1,2)$ โดยที่ความชันที่จุด (x,y) ใดๆเป็น $\dfrac{x^4-x}{x^2}$

ตัวอย่าง 5.1.11 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$\sqrt{t}+\sin t-5 \quad \text{ฟุต/วินาที}^2$$

เมื่อ $t=0$ อนุภาคอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้าย 30 ฟุต และอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 ฟุต/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาฟังก์ชัน f ที่มีปฏิยานุพันธ์เป็น F ต่อไปนี้

   1.1 $F(x) = 5$

   1.2 $F(x) = (2x+1)^{10}$

   1.3 $F(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2-1}$

   1.4 $F(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

   1.5 $F(x) = \arctan(\ell\text{n}x + \sin x)$

   1.6 $F(x) = \sin^2(\cos e^x)$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

   2.1 $\displaystyle\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

   2.2 $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

   2.3 $\displaystyle\int (x+1)^3\,dx$

   2.4 $\displaystyle\int (1+\frac{1}{t})^2\,dt$

   2.5 $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

   2.6 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

   2.7 $\displaystyle\int \cos x(\sec x + 3\tan x)\,dx$

   2.8 $\displaystyle\int \sec x(\tan x - 2\cos x)\,dx$

   2.9 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

   2.10 $\displaystyle\int \frac{2-x^2-x^4}{4+4x^2}\,dx$

   2.11 $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

   2.12 $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

3. จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(-1,2)$ โดยที่ความชันที่จุด (x,y) ใดๆเป็น $\dfrac{x^3-x^2}{x^5}$

4. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งตามแนวแกน X ขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$6t + \cos t \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

   เมื่อ $t = 0$ วัตถุอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวา 20 เมตร และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

5.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

ทฤษฎีบท 5.2.1 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า (Integration by substitution)
ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และมีเรจน์เป็นช่วง I และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้บน I แล้ว

$$\int \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int f(u)\, du$$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int (2x+1)^{10}\, dx$

2. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \sin(1-3x)\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx$

โดยกฎของค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

1. $kdv(x) = d[kv(x)]$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $d(v(x)+b) = dv(x)$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

อาจใช้ $dx = \frac{1}{k} \cdot kdx = \frac{1}{k}d(kx) = \frac{1}{k}d(kx+b)$ เมื่อ k, b เป็นค่าคงตัวซึ่ง $k \neq 0$ ในการหาปริพันธ์เช่น

$$\int (kx+b)^n \, dx =$$

ทฤษฎีบท 5.2.7 ให้ k และ b เป็นค่าคงตัว โดยที่ $k \neq 0$ และ $n \neq -1$ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\int (kx+b)^n \, dx = \frac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{kx+b} \, dx = \frac{1}{k}\ell\text{n}|kx+b| + C$
3. $\displaystyle\int e^{kx+b} \, dx = \frac{e^{kx+b}}{k} + C$
4. $\displaystyle\int a^{kx+b} \, dx = \frac{a^{kx+b}}{k\ell\text{n}a} + C$
5. $\displaystyle\int \sin(kx+b) \, dx = -\frac{\cos(kx+b)}{k} + C$
6. $\displaystyle\int \cos(kx+b) \, dx = \frac{\sin(kx+b)}{k} + C$
7. $\displaystyle\int \sec(kx+b)\tan(kx+b) \, dx = \frac{\sec(kx+b)}{k} + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2(kx+b) \, dx = \frac{\tan(kx+b)}{k} + C$
9. $\displaystyle\int \csc(kx+b)\cot(kx+b) \, dx = -\frac{\csc(kx+b)}{k} + C$
10. $\displaystyle\int \csc^2(kx+b) \, dx = -\frac{\cot(kx+b)}{k} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(kx+b)^2}} \, dx = \frac{\arcsin(kx+b)}{k} + C$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+(kx+b)^2} \, dx = \frac{\arctan(kx+b)}{k} + C$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{|kx+b|\sqrt{(kx+b)^2-1}} \, dx = \frac{\text{arcsec}(kx+b)}{k} + C$

ตัวอย่างการหาปริพันธ์โดยทฤษฎีบท 5.2.7

1. $\displaystyle\int \cos(2x+3)\,dx =$

2. $\displaystyle\int e^{5-x}\,dx =$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{3x-1}\,dx =$

4. $\displaystyle\int \sec^2(5-2x)\,dx =$

5. $\displaystyle\int \sec(3x)\tan(3x)\,dx =$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx =$

ตัวอย่าง 5.2.8 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx$

การหาปริพันธ์โดยอาศัยกฎของค่าเชิงอนุพันธ์ที่ว่า

$$u'(x)dx = du(x)$$

เช่น $e^x dx = (e^x)'dx = d(e^x)$ และ $2xdx = (x^2)'dx = d(x^2)$ เป็นต้น ดังเช่นตัวอย่าง

$$\int x\sin(x^2)\,dx\,dx =$$

ตัวอย่าง 5.2.9 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int e^{-\cos x}\sin x\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

ทฤษฎีบท 5.2.11 ปริพันธ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์

1. $\int \tan x\, dx = \ell n|\sec x| + C$
2. $\int \cot x\, dx = \ell n|\sin x| + C$

ตัวอย่าง 5.2.12 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\, dx$

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางรูปแบบอาจจะอาศัยเอกลักษณ์

1. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
2. $\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
3. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
4. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

ตัวอย่าง 5.2.13 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \sin x \sin 2x \, dx$
2. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$
3. $\int \cos 2x \cos 4x \, dx$
4. $\int \sin^2 x \, dx$

ตัวอย่าง 5.2.14 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$

ตัวอย่าง 5.2.15 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \sin x[\cos(2x) + \cos(3x)] \, dx$

ตัวอย่าง 5.2.16 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \sin x \sin(2x) \sin(3x) \, dx$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดโดยการกำหนดตัวแปรต่อไปนี้

1.1 $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ ให้ $u = 1-x$

1.2 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx$ ให้ $u = \sqrt{x}+1$

1.3 $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx$ ให้ $u = x+\cos x$

1.4 $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ ให้ $u = \ln x$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

2.2 $\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

2.3 $\int (1+\frac{1}{t})^2\,dt$

2.4 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

2.5 $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

2.6 $\int \sqrt[3]{3x+1}\,dx$

2.7 $\int (x+1)^2\sqrt{1-x}\,dx$

2.8 $\int (x^2-2x+1)^{10}\,dx$

2.9 $\int \frac{4x^2+6x+1}{\sqrt{1-2x}}\,dx$

2.10 $\int \sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,dx$

2.11 $\int \frac{2x+3}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

2.12 $\int x\sqrt{3x^2+2}\,dx$

2.13 $\int \frac{1}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+2}}\,dx$

2.14 $\int \frac{1}{x\ln x^4}\,dx$

2.15 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

2.16 $\int \frac{\sin e^{-x}}{e^x\cos e^{-x}}\,dx$

2.17 $\int \sec x(\tan x - 2\cos x)\,dx$

2.18 $\int \sin 6x\cos 2x\,dx$

2.19 $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx$

2.20 $\int \cos 2x\cos 6x\,dx$

2.21 $\int \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\,dx$

2.22 $\int \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$

2.23 $\int \csc 5t\cot 5t\,dt$

2.24 $\int \cos x\tan^2(\sin x)\,dx$

5.3 ปริพันธ์จำกัดเขต

ในหัวข้อนี้จะให้แนวคิดของการหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันโดยอาศัยการแบ่งพื้นที่ย่อย ๆ แล้วรวมเป็นพื้นที่ที่ต้องการ นั่นคือแนวคิดที่มีมาช้านานที่เรียกว่า ระเบียบวิธีเกษียณ แต่ในแคลคูลัสปัจจุบันต้องอาศัยความรู้เรื่องอนุกรมและลิมิตอนันต์ ดังนั้นเริ่มต้นด้วยสัญลักษณ์แทนการบวกที่เรียกว่า**ซิกมา** $\sum$ (sigma) นิยามโดย

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

มีสมบัติเบื้องต้นดังนี้

1. $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

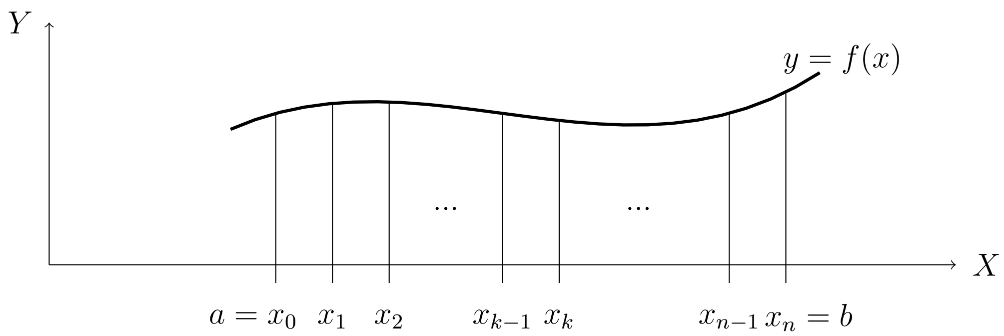
และมีผลบวกที่สำคัญดังนี้

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ สูตรของเกาส์ (Gauss' formula)
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

บทนิยาม 5.3.1 เรียกเซต $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ว่า**ผลแบ่งกั้น (partition)** ของช่วง $[a, b]$ ซึ่งจุดใน P แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงคือ

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3], ...,\ [x_{n-1}, x_n]$$

นั่นคือ $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$ เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$



บทนิยาม 5.3.2 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ..., n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า

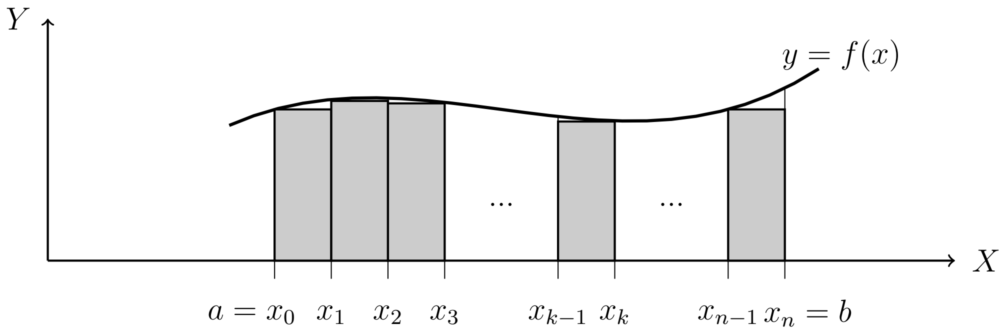
m_k เป็นค่าของ f ที่น้อยที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$
M_k เป็นค่าของ f ที่มากที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

และให้

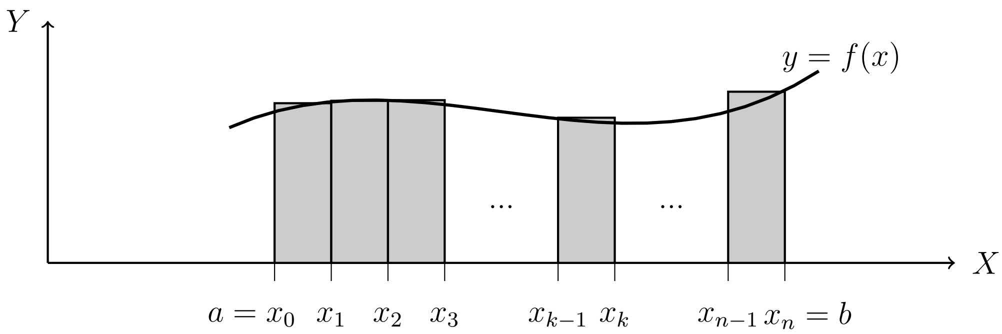
$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad \text{และ} \qquad U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

จะเรียก $L(P,f)$ ว่า**ผลบวกล่าง (lower sum)** ของ f บนช่วง $[a,b]$ เทียบกับผลแบ่งกัน P และเรียก $U(P,f)$ ว่า**ผลบวกบน (upper sum)** ของ f บนช่วง $[a,b]$ เทียบกับผลแบ่งกัน P

อาจแสดงผลบวกล่างและผลบวกบนได้ดังรูปต่อไปนี้



$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$



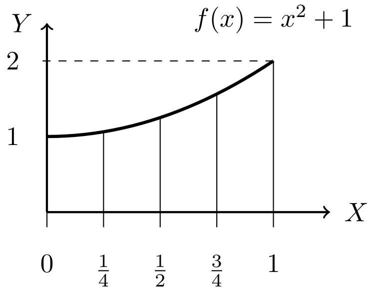
$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

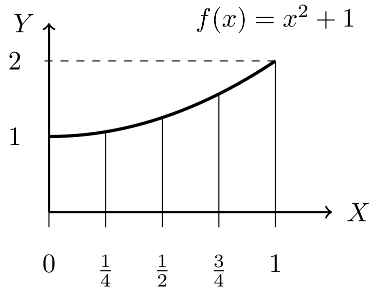
ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a,b]$ สรุปได้ว่า

$$L(P,f) \leq A \leq U(P,f)$$

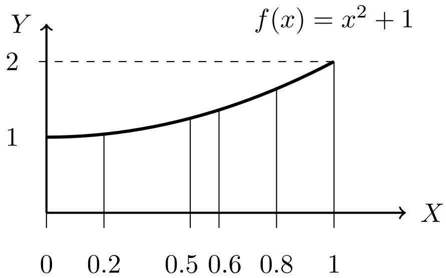
ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0, 1]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(P, f)$ เมื่อ P คือ

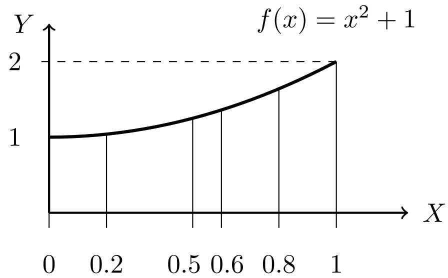
1. $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$



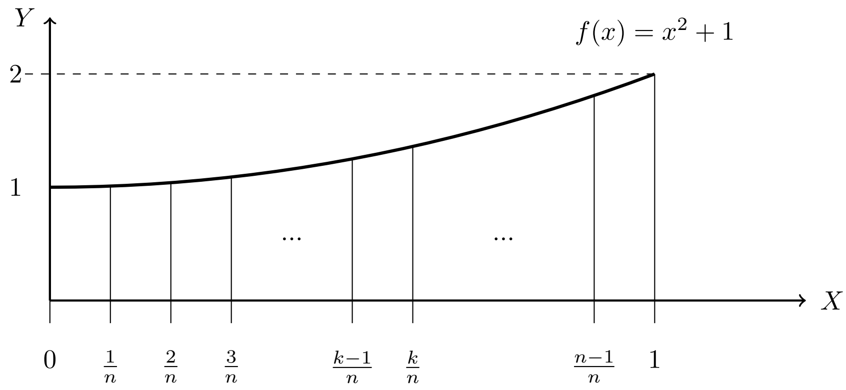


2. $P = \{0, 0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 1\}$





ตัวอย่าง 5.3.4 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0, 1]$ จงหา $L(P, f)$ และ $U(P, f)$ ในรูป n เมื่อ P เป็นผลแบ่งกั้นโดยแบ่ง $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่องเท่า ๆ กัน



บทนิยาม 5.3.5 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a, b]$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ..., n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ หรือ $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$ แล้ว

$$S^*(P, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

เรียก $S^*(P, f)$ ว่า**ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)** ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกัน P

จากการบทนิยามผลบวกรีมันน์จะได้ว่า

$$L(P, f) \leq S^*(P, f) \leq U(P, f)$$

ตัวอย่าง 5.3.6 ให้ $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[0, 1]$ และ

P เป็นผลแบ่งกันที่แบ่งช่วง $[0, 1]$ เป็น n ช่องเท่า ๆ กัน

จงหา

1. $S^*(P, f)$ เมื่อ x_k^* เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง $[x_{k-1}, x_k]$
2. $\lim_{n\to\infty} L(P, f)$, $\lim_{n\to\infty} U(P, f)$ และ $\lim_{n\to\infty} S^*(P, f)$

ทฤษฎีบท 5.3.7 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \|P\| = 0$ โดยที่

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| \,:\, i = 1, 2, 3, ..., n\}$$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} L(P,f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S^*(P,f)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} U(P,f)$ มีค่า และ

$$\lim_{n\to\infty} L(P,f) = \lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = \lim_{n\to\infty} U(P,f) = A$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 5.3.8 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = L$$

จะกล่าวว่า f **หาปริพันธ์ได้ (integrable)** บน $[a,b]$ และเรียกค่าลิมิต L ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)** ของ f บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

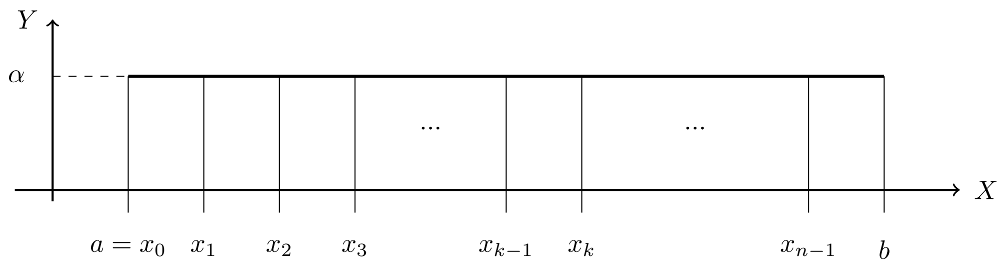
เรียก a และ b ว่า**ลิมิตล่าง (lower limit)** และ**ลิมิตบน (upper limit)** ตามลำดับ

จากตัวอย่าง 5.3.6 จะได้ว่า

$$\int_0^1 x^2 + 1\,dx =$$

ตัวอย่าง 5.3.9 กำหนดให้ $f(x) = \alpha$ สำหรับค่า $x \in [a,b]$ เมื่อ α เป็นค่าคงตัว จงแสดงว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha(b-a)$$



จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตคำนวณได้ยาก เนื่องจากต้องเลือกผลแบ่งกั้นที่เหมาะสมและใช้กฎเกี่ยวกับอนุกรมจนสุดท้ายหาลิมิตอนันต์ของผลบวกนั้น ถ้าฟังก์ชันที่สนใจไม่สามารถหาผลลัพธ์ของอนุกรมในรูปของ n อาจทำให้การหาปริพันธ์จำกัดเขตไม่ได้ด้วยบทนิยามดังกล่าว แต่อาจใช้ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตซึ่งเท่ากับพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a, b]$ โดยให้ค่า**พื้นที่เหนือแกน X มีเครื่องหมายบวก** และค่า**พื้นที่ใต้แกน X มีเครื่องหมายลบ**

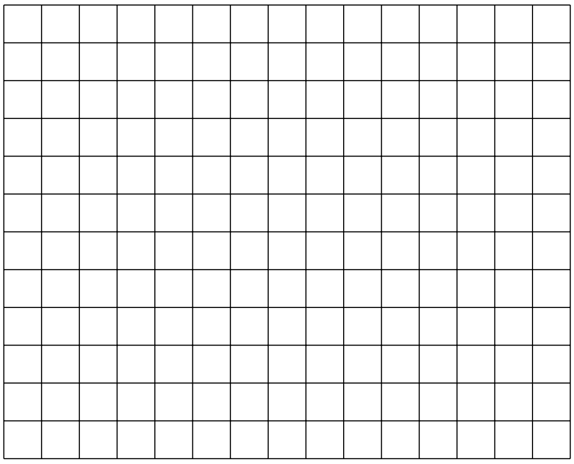
ตัวอย่าง 5.3.10 จงหา $\displaystyle\int_{-1}^{3} 4\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 5.3.11 จงหา $\displaystyle\int_{0}^{3} (4-2x)\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 5.3.12 จงหา $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 5.3.13 จงหา $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 5.3.14 จงหา $\displaystyle\int_0^3 4-\sqrt{9-x^2}\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ



ทฤษฎีบท 5.3.15 กำหนดให้ f และ g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว

1. $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$ เมื่อ $c \in [a,b]$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in [a,b]$
7. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
8. ถ้า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
9. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

ตัวอย่าง 5.3.16 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,5]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 8 \quad \text{และ} \quad \int_0^5 f(x)\,dx = 10$$

จงหา

1. $\int_3^3 f(x)\,dx$
2. $\int_5^1 f(x)\,dx$
3. $\int_3^5 f(x)\,dx$
4. $\int_5^3 f(x)\,dx$
5. $\int_3^1 f(x)\,dx$
6. $\int_0^1 f(x)\,dx$

ตัวอย่าง 5.3.17 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,4]$ โดยที่

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 5, \quad \int_0^1 g(x)\,dx = -2 \quad \text{และ} \quad \int_4^0 f(x)\,dx = 3$$

จงหา

1. $\int_0^1 f(x)\,dx$
2. $\int_0^1 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหา $L(P,f)$, $U(P,f)$ และ $S^*(P,f)$ เลือก x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง

   1.1 $f(x) = x+1, \quad x \in [0,1]$ $\qquad P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

   1.2 $f(x) = x^2 - x, \quad x \in [-1,1]$ $\qquad P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

   1.3 $f(x) = x^3 + 1, \quad x \in [0,1]$ $\qquad P = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 1\right\}$

   1.4 $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,2]$ $\qquad P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

2. กำหนดให้ $f(x) = 1 - x^2$ สำหรับ $x \in [0,1]$ ให้ P เป็นผลแบ่งกันที่แบ่งช่วง $[0,1]$ เป็น n ช่องเท่าๆกัน จงหา $L(P,f)$, $U(P,f)$ และ $S^*(P,f)$ เลือก x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง

3. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ สำหรับค่า $x \in [a,b]$ จงแสดงว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

4. กำหนดให้ $\int_1^5 f(x)\,dx = 5$, $\int_3^5 f(x)\,dx = 8$ และ $\int_1^{10} f(x)\,dx = 15$ จงหาค่าของ

   4.1 $\int_1^3 f(x)\,dx$ $\qquad$ 4.3 $\int_5^{10} f(x)\,dx$ $\qquad$ 4.5 $\int_5^3 f(x)\,dx$

   4.2 $\int_5^1 f(x)\,dx$ $\qquad$ 4.4 $\int_3^{10} f(x)\,dx$ $\qquad$ 4.6 $\int_5^5 f(x)\,dx$

5. ให้ m, M เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ โดยที่

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [a,b]$$

   จงแสดงว่า

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

6. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

   6.1 $\int_{-3}^{4} (2x+8)\,dx$ $\qquad$ 6.5 $\int_a^b |x-a| + |x-b|\,dx$ $\qquad$ 6.9 $\int_0^3 4 + \sqrt{9-x^2}\,dx$

   6.2 $\int_1^2 |3x-2|\,dx$ $\qquad$ 6.6 $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ $\qquad$ 6.10 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

   6.3 $\int_{-2}^{3} |x+1| + |x|\,dx$ $\qquad$ 6.7 $\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx$ $\qquad$ 6.11 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} - |x|\,dx$

   6.4 $\int_{-2}^{2} x + |x|\,dx$ $\qquad$ 6.8 $\int_0^3 3 + \sqrt{4-x^2}\,dx$ $\qquad$ 6.12 $\int_0^2 4 - \sqrt{4-x^2}\,dx$

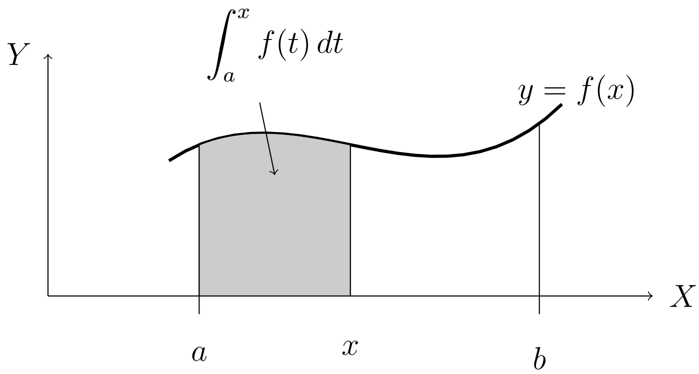
5.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสที่ถูกนำเสนอโดยนิวตัน แต่เขาเองได้รับอิทธิพลของทฤษฎีบทนี้มาจากแนวคิดของแบร์โรว์ ประกอบด้วย 2 ทฤษฎีบทคือ

1. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส (The First Fundamental Theorem of Calculus)
2. ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส (The Second Fundamental Theorem of Calculus)

เนื่องจากการพิสูจน์ต้องใช้ความรู้หลายอย่าง ดังนั้นในวิชานี้จะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์ แต่จะนำทฤษฎีบทไปใช้เพื่อให้เห็นถึงประโยชน์ของทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

พิจารณาฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ ทุกๆ $x \in [a,b]$ พื้นที่ใต้กราฟของ f บน $[a,x]$ แสดงได้ดังรูป



ทฤษฎีบท 5.4.1 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ กำหนดให้

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{เมื่อ} \quad x \in [a,b]$$

แล้วจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $[a,b]$ และ

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [a,b]$$

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt =$
2. $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_{-2}^s \sin(t^2)\,dt =$
3. $\dfrac{d}{dw}\displaystyle\int_w^e e^{\cos x}\,dx =$

ทฤษฎีบท 5.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_c^u f(t)\,dt = f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $[a,b]$

ตัวอย่าง 5.4.3 จงหา $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_1^{x^2+1} t\cos t\,dt$

ตัวอย่าง 5.4.4 ให้ $\displaystyle F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+e^t}\,dt$ จงหา $F(1)$ และ $F'(1)$

ทฤษฎีบท 5.4.5 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ตัวอย่าง 5.4.6 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 x^2 + 1\,dx$

ตัวอย่าง 5.4.7 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x - x + 1\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.4.8 จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|+1}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^2 ||x|-1|\,dx$

ตัวอย่าง 5.4.9 จงหาค่าของ

1. $\int_0^{\pi} \sin t \cos 3t \, dt$

2. $\int_1^3 \frac{x}{x^2+1} \, dx$

3. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} \, dx$

ตัวอย่าง 5.4.10 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t(1-\sin t)^2\,dt$

2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ell\mathrm{n}x}\,dx$

ทฤษฎีบท 5.4.11 ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และมีเรจน์เป็นช่วง $[a, b]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้บน $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du$$

ตัวอย่าง 5.4.12 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{x^3+3x}\, dx$

2. $\displaystyle\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1}\, dx$

ตัวอย่าง 5.4.13 กำหนดให้ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 10$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(2t)\,dt$

2. $\displaystyle\int_0^1 f(1-y)\,dy$

3. $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(3-2s)\,ds$

แบบฝึกหัด 5.4

1. กำหนดให้ $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$ จงหา

1.1 $F(1)$ 1.2 $F'(1)$ 1.3 $F''(1)$

2. จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

2.1 $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

2.2 $F(x) = \int_x^3 \cos t^2\,dt$

2.3 $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} e^t \arctan t\,dt$

2.4 $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\cos x} t\ln(\tan t)\,dt$

3. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

3.1 $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + x\right) dx$

3.2 $\int_1^3 \sqrt{x}\left(3 - x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx$

3.3 $\int_0^1 |3-4x|\,dx$

3.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$

3.5 $\int_{-2}^1 |x^2+3x+2|\,dx$

3.6 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\,dx$

3.7 $\int_{-1}^4 ||x-2|-1|\,dx$

3.8 $\int_{-1}^2 \sqrt{2+|x|}\,dx$

3.9 $\int_1^4 \sqrt{x}(x-1)^2\,dx$

3.10 $\int_0^2 |1-x|\,dx$

3.11 $\int_{-1}^1 ||x|+x|\,dx$

3.12 $\int_0^{\pi} |1-\sin x|\,dx$

3.13 $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

3.14 $\int_{-1}^0 t^2(t^3+1)^{10}\,dt$

3.15 $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4-3t}}\,dt$

3.16 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^2\,dx$

3.17 $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+|x|)^3}\,dx$

3.18 $\int_1^8 \frac{1}{(\sqrt[3]{t}+1)^4}\,dt$

3.19 $\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\,dy$

3.20 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x\,dx$

3.21 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{1+\sin x}\,dx$

3.22 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3z}{\sqrt{7-2\sin 3z}}\,dz$

4. กำหนดให้ $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ จงหาค่าต่อไปนี้

4.1 $\int_{0.5}^1 f(2t)\,dt$

4.2 $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$

บทที่ 6

เทคนิคการหาปริพันธ์

การหาปริพันธ์นั้นขึ้นกับตัวถูกปริพันธ์ ถ้าปฏิยานุพันธ์ของตัวถูกปริพันธ์ที่จะหาทำได้ยาก เราอาจจะต้องอาศัยวิธีการและเทคนิคที่แตกต่างกัน ดังจะกล่าวในบทนี้

6.1 การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

ให้ $u = u(x)$ และ $v = v(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x โดยกฎการคูณของค่าเชิงอนุพันธ์ $d(uv) = udv + vdu$ จะได้ว่า

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

เรียกวิธีการนี้ว่า **การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน** (integration by part)

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\displaystyle\int xe^x\,dx$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int x\cos 2x \, dx$
2. $\int \ln x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหา $\int x^5 \arctan(x^2) \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_1^2 x^2 \ell \text{n} x \, dx$

2. $\int_0^1 \text{arctan} x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาปริพันธ์ $\int x^2 e^x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาปริพันธ์ $\int x^3 \sin x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาปริพันธ์ $\int e^x \sin x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาปริพันธ์ $\int e^x \cos x \, dx$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาปริพันธ์ $\int xe^x \sin x \, dx$

การใช้วิธีการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนทำให้ทราบปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันบางส่วนดังนี้

ทฤษฎีบท 6.1.10

1. $\int \ell\text{n}x\,dx = x\ell\text{n}x - x + C$
2. $\int \text{arcsin}x dx = x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$
3. $\int \text{arccos}x dx = x\text{arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$
4. $\int \text{arctan}x dx = x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$
5. $\int \text{arccot}x dx = x\text{arccot}x + \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int x\sin x\,dx$

1.2 $\int x^2 2^x\,dx$

1.3 $\int (x^3+x)e^{x^2}\,dx$

1.4 $\int x^3\cos x\,dx$

1.5 $\int \csc^3 x\,dx$

1.6 $\int x^n \ln x\,dx$ เมื่อ $n \neq -1$

1.7 $\int x\sin x\,dx$

1.8 $\int \ln(3x+5)\,dx$

1.9 $\int (\ln x)^2\,dx$

1.10 $\int e^{-x}\sin x\,dx$

1.11 $\int \frac{\operatorname{arccot}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

1.12 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\,dx$

1.13 $\int x\tan^2 x\,dx$

1.14 $\int x^2\arctan x\,dx$

1.15 $\int \cos(\ln x)\,dx$

1.16 $\int \ln(x^2+5)\,dx$

1.17 $\int \sin x\ln(\cos x)\,dx$

1.18 $\int (x^2+3x+1)\cos x\,dx$

1.19 $\int (x+1)^2\sin x\,dx$

1.20 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

1.21 $\int \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.22 $\int e^x\sin^2 x\,dx$

1.23 $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

1.24 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$

1.25 $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$

1.26 $\int xe^{\sqrt{2-x}}\,dx$

1.27 $\int x\ln^3 x\,dx$

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}}\,dx$

2.2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x\cot x\csc x\,dx$

2.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos 2x\,dx$

2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$

2.5 $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

2.6 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2.7 $\int_1^{e} (\ln x)^2\,dx$

2.8 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$

2.9 $\int_0^1 x\operatorname{arccot} x\,dx$

6.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหา **ปริพันธ์ฟังก์ชันตรรกยะ (integral of rational function)** $f(x)$ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามในรูปแบบ

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{โดยที่} \quad \deg p(x) < \deg q(x)$$

สามารถเขียนในรูป

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

โดยแต่ละ $p_i(x)$ และ $q_i(x)$ มีระดับขั้นน้อยกว่า $p(x)$ และ $q(x)$ ตามลำดับ
เรียกแต่ละ $\dfrac{p_i(x)}{q_i(x)}$ ว่า**เศษส่วนย่อย (partial fraction)** ของ $f(x)$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$
โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันตรรกยะ (ไม่พิสูจน์ในวิชานี้) เขียนได้ 3 รูปแบบคือ

1. $q(x)$ มี n รากที่ไม่ซ้ำกัน
2. $q(x)$ มีรากซ้ำ
3. $q(x)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

รูปแบบที่ 1. $q(x)$ มี n รากที่ไม่ซ้ำกัน

ให้ $q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ เมื่อ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน แล้ว

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} =$
2. $\dfrac{x-2}{x(x+1)(x-3)} =$
3. $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)} =$

โดยทั่วไปเมื่อ $f(x)$ อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยจะได้ปริพันธ์คือ

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}\,dx \\ &= A_1 \ell\text{n}|x-a_1| + A_2 \ell\text{n}|x-a_2| + \cdots + A_n \ell\text{n}|x-a_n| + C\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 6.2.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน จะได้ว่า

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right]$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(4x^2-1)}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{x^4+5}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}\,dx$

ทฤษฎีบท 6.2.6 ปริพันธ์ของฟังก์ชันเซแคนต์กับโคเซแคนต์

1. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ell n|\sec x + \tan x| + C$
2. $\displaystyle\int \csc x\,dx = \ell n|\csc x - \cot x| + C$

รูปแบบที่ 2. $q(x)$ มีรากซ้ำ

ใน $q(x)$ มีตัวประกอบ $(x-a)^k$ จะได้ว่า

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_k$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{x}{(x-1)^3} =$

2. $\dfrac{x^2-3}{x(x+2)^2} =$

3. $\dfrac{x^3-1}{x^2(x-3)^2} =$

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x-1)^2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2(x-2)}\,dx$

รูปแบบที่ 3. $q(x)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

ใน $q(x)$ มีตัวประกอบ $(ax^2+bx+c)^k$ โดยที่ $b^2-4ac<0$ แล้ว

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, ..., A_k$ และ $B_1, B_2, ..., B_k$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}=$

2. $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}=$

3. $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+2)^2}=$

ตัวอย่าง 6.2.10 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.11 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

ตัวอย่าง 6.2.12 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{\tan\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta$

ตัวอย่าง 6.2.13 จงหาปริพันธ์ของ $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \frac{1}{16x^2-1}\,dx$

1.2 $\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$

1.3 $\int \frac{x^3+5}{x^2-25}\,dx$

1.4 $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}\,dx$

1.5 $\int \frac{2x^3-5x^2+2x-3}{x^2-2x-2}\,dx$

1.6 $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$

1.7 $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$

1.8 $\int \frac{20x-11}{(3x+2)(x^2-4x+5)}\,dx$

1.9 $\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}\,dx$

1.10 $\int \frac{10x^2+13x}{(2x-1)(x^2+2)}\,dx$

1.11 $\int \frac{11x^2+13x}{(x+3)(x+2)(x^2+3)}\,dx$

1.12 $\int \frac{35x+47}{(3x+5)^2(x^2+3x+6)}\,dx$

1.13 $\int \frac{11x^2+13x}{(x+3)(x+2)(x^2+3)}\,dx$

1.14 $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

1.15 $\int \frac{x^3}{(x^2-2x+10)^2}\,dx$

1.16 $\int \frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}\,dx$

1.17 $\int \frac{(1+\sec^2 x)\sec^2 x}{(1+\tan^3 x)}\,dx$

1.18 $\int \frac{\cos t}{\sin t+\sin^3 t}\,dt$

1.19 $\int \frac{1}{x\ln x(1-\ln x)}\,dx$

1.20 $\int \frac{1}{e^{3x}+e^{2x}+e^x}\,dx$

2. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_{-2}^{0} \frac{5x+7}{x^2+2x-3}\,dx$

2.2 $\int_{0}^{1} \frac{x^3-x^2-11x+10}{x^3-2x+4}\,dx$

2.3 $\int_{3}^{4} \frac{5x^3-4x}{x^4-16}\,dx$

2.4 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sec^3\theta+\sec\theta}\,d\theta$

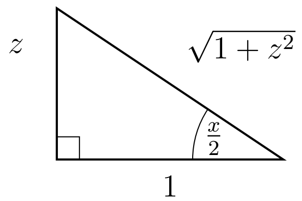
6.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะในรูปตรีโกณมิติ

พิจารณาการหาปริพันธ์ $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ โดยอาศัยเอกลักษณ์ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\
&= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \sec^2 x - \sec x \tan x\,dx \\
&= \tan x - \sec x + C
\end{aligned}$$

แต่เมื่อหาปริพันธ์ของ $\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\,dx$ เราไม่สามารถหาปริพันธ์โดยอาศัยเพียงเอกลักษณ์ได้อีก ในหัวข้อนี้ จึงสนใจการเปลี่ยนฟังก์ชันตรรกยะในรูป $\sin x$ และ $\cos x$ ในรูปตัวแปรใหม่คือ z โดยกำหนดให้

$$z = \tan\frac{x}{2}$$



จากรูปจะได้ว่า

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad \text{และ} \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2z}{1+z^2} \\
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\
dz &= \left(\sec^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(1+z^2)dx
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{และ} \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\, dx$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x}\,dx$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาปริพันธ์ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\sin x}\,dx$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\displaystyle\int \frac{1}{2-\text{sin}x}\,dx$

   1.2 $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\text{cos}x}\,dx$

   1.3 $\displaystyle\int \frac{2}{\text{tan}x+\text{sin}x}\,dx$

   1.4 $\displaystyle\int \frac{1}{\text{cos}x-\text{sin}x+1}\,dx$

   1.5 $\displaystyle\int \frac{1}{\text{cos}x-\text{sin}x+3}\,dx$

   1.6 $\displaystyle\int \frac{\text{sin}x}{2-\text{sin}x+1}\,dx$

   1.7 $\displaystyle\int \frac{1}{3\text{sec}x-1}\,dx$

   1.8 $\displaystyle\int \frac{\text{cot}x}{1+\text{sin}x}\,dx$

   1.9 $\displaystyle\int \frac{\text{sec}x}{1+\text{sin}x}\,dx$

   1.10 $\displaystyle\int \frac{\text{tan}x}{1+\text{tan}x+\text{sec}x}\,dx$

2. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4-3\text{cos}^2x+5\text{sin}^2x}\,dx$

6.4 ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปกรณฑ์

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีกรณฑ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร เช่น

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

กำหนด $u = x - 1$

กำหนด $u = \sqrt{x-1}$

เมื่อพิจารณากำหนด u ทั้ง 2 แบบ การหาปริพันธ์มีความยากง่ายต่างกัน จะเห็นรูปแบบที่สองเลขชี้กำลังของการปริพันธ์จะเป็นจำนวนเต็มทำให้ง่ายต่อการหาค่า ดังนั้นในหัวข้อนี้จะสนใจวิธีการในรูปแบบที่สอง นั่นคือ พิจารณาฟังก์ชันทีมีรูปแบบ $\sqrt[n]{ax+b}$ จะกำจัดเครื่องหมายกรณฑ์เพื่อให้ง่ายต่อการหาปริพันธ์โดยให้

$$u = \sqrt[n]{ax+b}$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาปริพันธ์ $\int x^3(x-1)^{\frac{5}{3}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาปริพันธ์ $\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(1+e^t)^{\frac{3}{2}}+(1+e^t)^{\frac{1}{2}}}\,dt$

แบบฝึกหัด 6.4

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int x^3\sqrt{7x+2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5x}}{x+5}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{3x-5}}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x-1}+3}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{4}{3}}-2x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}(1+x^{\frac{1}{6}})}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x+x^{\frac{4}{3}}}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{1+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$
16. $\displaystyle\int \sqrt{3x^{\frac{1}{2}}-1}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$

6.5 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติใน 3 รูปแบบคือ

$$\sin^m x\cos^n x \qquad \text{และ} \qquad \tan^m x\sec^n x \qquad \text{และ} \qquad \cot^m x\csc^n x$$

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ (อาจขยายไปยังจำนวนตรกยะและจำนวนเต็ม)

รูปแบบที่ 1. $\sin^m x\cos^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ และการลดกำลังสองด้วยกฎ

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร ดังจะแสดงดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6.5.1 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

2. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

3. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$

ตัวอย่าง 6.5.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$

ตัวอย่าง 6.5.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$

ตัวอย่าง 6.5.4 จงหาปริพันธ์ $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.5.5 จงหาปริพันธ์ $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.5.6 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^5 x\, dx$

ตัวอย่าง 6.5.7 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sin^3 x \sqrt[3]{\cos^5 x}\, dx$

รูปแบบที่ 2. $\sec^m x \tan^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ และการการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปร

1. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
2. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
3. $\int \tan x\, dx = \ell n|\sec x| + C$
4. $\int \sec x\, dx = \ell n|\sec x + \tan x| + C$

ตัวอย่าง 6.5.8 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \tan^2 x\, dx$

2. $\int \tan^3 x\, dx$

3. $\int \sec^4 x\, dx$

4. $\int \tan^4 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.5.9 จงหาปริพันธ์ $\int \sec^3 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.5.10 จงหาปริพันธ์ $\int \sec^5 x\, dx$

ตัวอย่าง 6.5.11 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sec x \tan^2 x\, dx$

2. $\int \sec^2 x \tan^3\, dx$

ตัวอย่าง 6.5.12 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

2. $\int \sec^3 x \tan^5 x \, dx$

ตัวอย่าง 6.5.13 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^4 x}{1+\tan x}\, dx$

รูปแบบที่ 3. $\csc^m x \cot^n x$

การหาปริพันธ์รูปแบบนี้อาจใช้เอกลักษณ์ $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$ และการการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน บางครั้งอาจร่วมกับการเปลี่ยนตัวแปรคล้ายคลึงกับรูปแบบที่ 2

1. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
2. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
3. $\int \cot x\,dx = \ell n|\sin x| + C$
4. $\int \csc x\,dx = \ell n|\csc x - \cot x| + C$

ตัวอย่าง 6.5.14 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \cot^2 x\,dx$
2. $\int \cot^3 x\,dx$
3. $\int \csc^4 x\,dx$
4. $\int \cot^4 x\,dx$

ตัวอย่าง 6.5.15 จงหาปริพันธ์ $\int \csc^3 x\,dx$

ตัวอย่าง 6.5.16 จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \cot x \csc^3 x\,dx$
2. $\int \csc^2 x \cot^4 x\,dx$

แบบฝึกหัด 6.5

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \sin^8 x\,dx$

1.2 $\int \cos^6 x\,dx$

1.3 $\int \sin^5 x\,dx$

1.4 $\int \cos^5 x\,dx$

1.5 $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$

1.6 $\int \cos^3 x \sin^7 x\,dx$

1.7 $\int \tan^6 x\,dx$

1.8 $\int \tan^7 x\,dx$

1.9 $\int \sec^7 x\,dx$

1.10 $\int \cot^7 x\,dx$

1.11 $\int \cot^8 x\,dx$

1.12 $\int \sec^6 x\,dx$

1.13 $\int \sec^7 x \tan^7 x\,dx$

1.14 $\int \sec^9 x \tan^6 x\,dx$

1.15 $\int \sec^3 x \sqrt{\tan x}\,dx$

1.16 $\int \sec^6 x \tan^{\frac{11}{5}} x\,dx$

1.17 $\int \cot^5 x \sqrt{\csc x}\,dx$

1.18 $\int \frac{\tan^3 x \sec^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

2. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

2.2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x \sin 2x\,dx$

2.3 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x\,dx$

2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \sqrt{\tan x}\,dx$

2.5 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

2.6 $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \cot^3 x \csc^7 x\,dx$

6.6 ปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sqrt{a^2-u^2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{a^2+u^2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{u^2-a^2}$$

เมื่อ $u = u(x)$ และ $a > 0$ เป็นค่าคงตัว อาศัยการเปลี่ยนตัวแปรในรูปฟังก์ชันของตรีโกณมิติเพื่อใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{และ} \quad \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

เรียกวิธีนี้ว่า **การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ** (integration by trigonometric substitution)

รูปแบบที่ 1. $\sqrt{a^2-u^2}$

ให้ $u = a\sin\theta$ เมื่อ $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และ $a > 0$ จะได้ว่า $\cos\theta \geq 0$

ตัวอย่าง 6.6.1 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{25-4x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

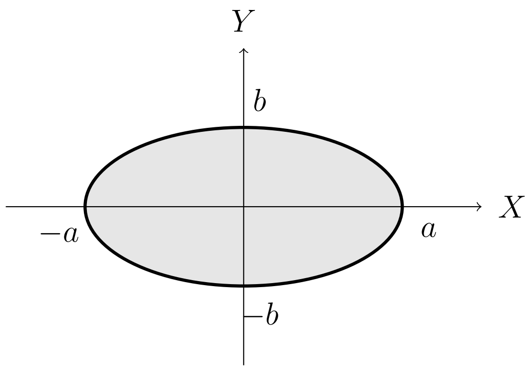
ตัวอย่าง 6.6.4 จงหาปริพันธ์ $\int \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.5 จงหาค่าของ $\int_3^4 \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.6 จงแสดงว่าพื้นที่อาณาบริเวณภายในวงรีสมการ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

มีค่าเท่ากับ πab



รูปแบบที่ 2. $\sqrt{a^2+u^2}$

ให้ $u = a\tan\theta$ เมื่อ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ และ $a > 0$ จะได้ว่า $\sec\theta > 0$

ตัวอย่าง 6.6.7 จงหาปริพันธ์ $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.8 จงหาค่าของ $\int_0^2 (9+4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.9 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

ตัวอย่าง 6.6.10 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$

รูปแบบที่ 3. $\sqrt{u^2 - a^2}$

ให้ $u = a\text{sec}\theta$ เมื่อ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$ และ $a > 0$

ตัวอย่าง 6.6.11 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$

ตัวอย่าง 6.6.12 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

ทฤษฎีบท 6.6.13 ปริพันธ์ของฟังก์ชันอาร์กเซแคนต์และอาร์โคเซแคนต์

1. $\displaystyle\int \text{arcsec}x\,dx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$
2. $\displaystyle\int \text{arccsc}x\,dx = x\text{arccsc}x + \ell\text{n}\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$

ตัวอย่าง 6.6.14 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$

แบบฝึกหัด 6.6

1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$

1.2 $\int (9+16x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

1.3 $\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx$

1.4 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$

1.5 $\int \frac{1}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.6 $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.7 $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}\,dx$

1.8 $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

1.9 $\int \frac{5x^2-2x+1}{(25-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$

1.10 $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-y^2}}\,dx$

1.11 $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-8x-x^2}}\,dx$

1.12 $\int (t^2-6t+13)^{\frac{3}{2}}\,dt$

1.13 $\int \frac{1}{(y-1)\sqrt{y^2-1}}\,dy$

1.14 $\int \frac{1}{(4s^2-24s+27)^{\frac{3}{2}}}\,ds$

1.15 $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx$ เมื่อ $a>0$

1.16 $\int \frac{e^x}{(4e^{2x}+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.17 $\int \frac{1}{e^{2t}\sqrt{e^{2t}-9}}\,dt$

1.18 $\int \frac{1}{(e^t+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$

2. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปไปนี้

2.1 $\int_0^6 \sqrt{49-x^2}\,dx$

2.2 $\int_0^2 x^3\sqrt{2x-x^2}\,dx$

2.3 $\int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x^3}{(x^4-2x^2-3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ $\int \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(3-x-2\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}\,dx$

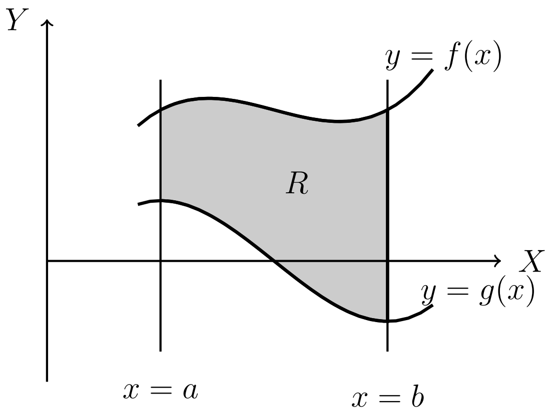
4. จงแสดงว่าพื้นที่อาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2=r^2$ มีค่าเท่ากับ πr^2

บทที่ 7

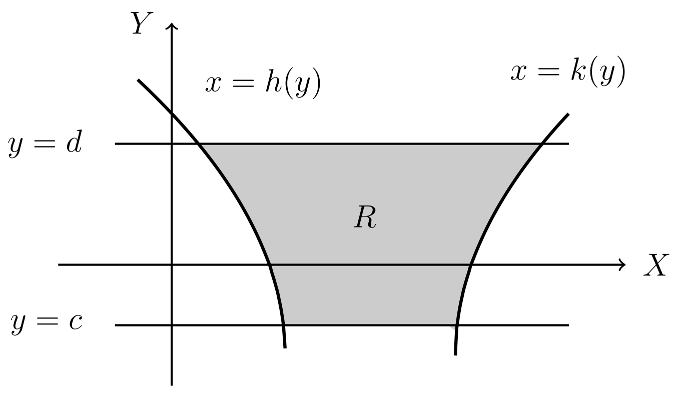
การประยุกต์ของปริพันธ์

7.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ให้ฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ ทุก $x \in [a,b]$ ให้ $A =$ พื้นที่อาณาบริเวณ R ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = g(x)$ และ $x = a$, $x = b$

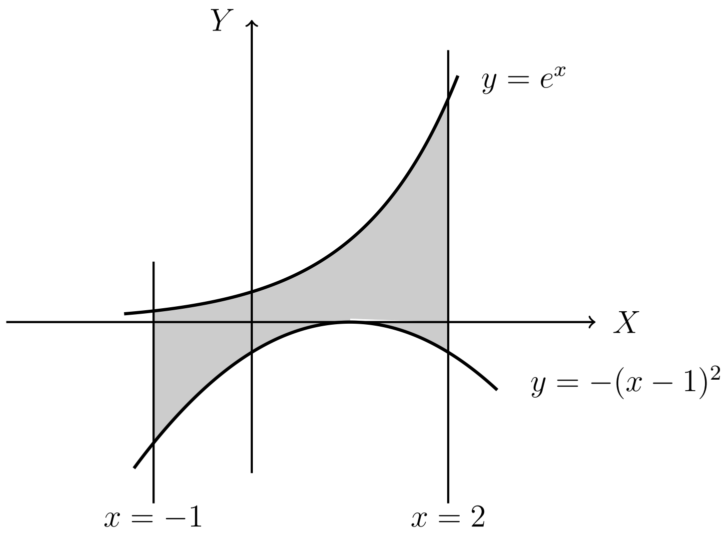


$R = \{(x,y) \,:\, a \leq x \leq b$ และ $g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ดังนั้น $A = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

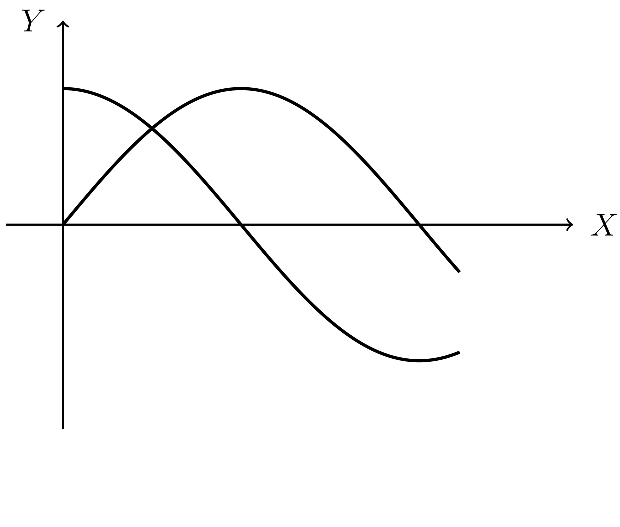


$R = \{(x,y) \,:\, c \leq y \leq d$ และ $h(y) \leq x \leq k(y)\}$ ดังนั้น $A = \displaystyle\int_c^d [k(y) - h(y)]\,dy$

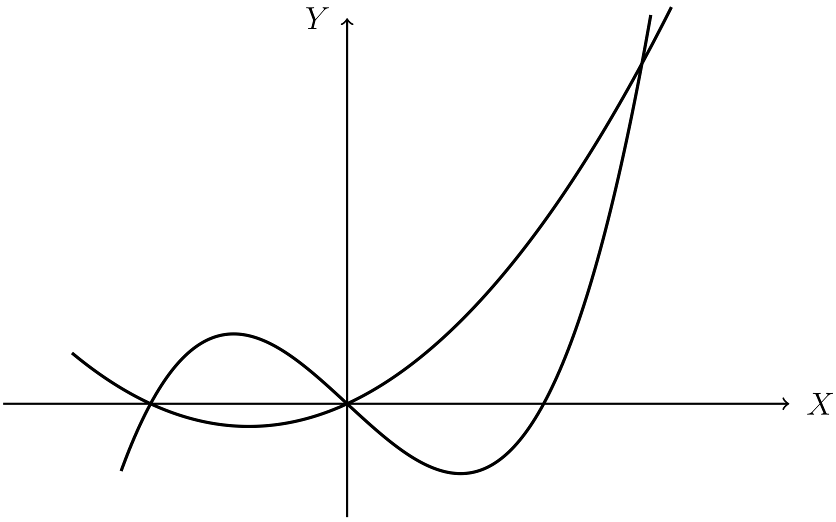
ตัวอย่าง 7.1.1 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = e^x$ และ $y = -(x-1)^2$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 2$



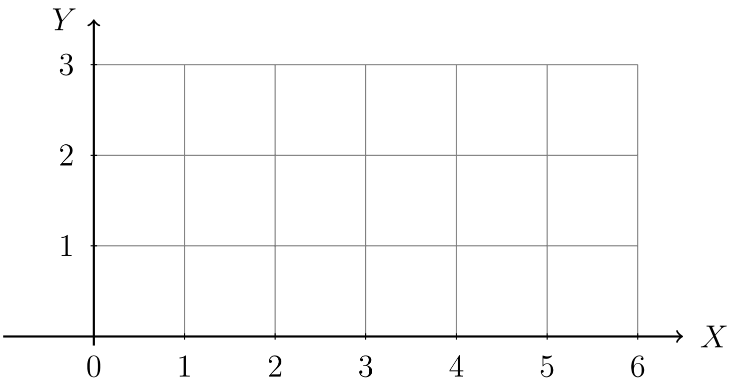
ตัวอย่าง 7.1.2 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \cos x$ และ $y = \sin x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \pi$



ตัวอย่าง 7.1.3 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x^2 + 2x$ และ $y = x^3 - 4x$



ตัวอย่าง 7.1.4 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \sqrt{x-1}$ เส้นตรง $y = 2$ และ $x + 2y = 4$



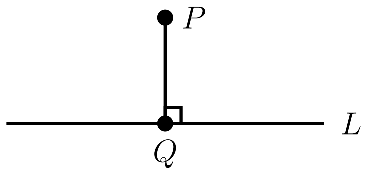
แบบฝึกหัด 7.1

จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในแต่ละข้อต่อไปนี้

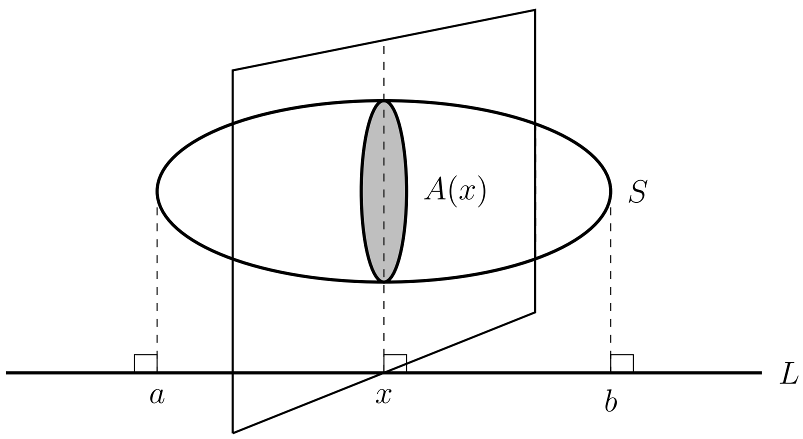
1. $y = x$ และ $y = x^2 - 4x + 6$
2. $y = 4x - x^2$ และ $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$
3. $y = 2^x$ และ $y = 2x - x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$
4. $y = \dfrac{\sqrt{3x+1}}{x}$ และ $y = 0$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 8$
5. $y = x\cos x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = \pi$
6. $y = 2 - x^2$ และ $y = |x|$
7. $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จาก $x = -\frac{3\pi}{4}$ ถึง $x = \frac{\pi}{4}$
8. $y = x^2 - x$ และ $y = x - x^2$
9. $y = \sin 2x$ และ $y = \cos x$ จาก $x = -\frac{\pi}{2}$ ถึง $x = \frac{\pi}{4}$
10. $y = \sqrt{1+x^2}$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 2\sqrt{2}$
11. $y = x^2 - x$ และ $y = \sin \pi x$
12. $y = 2 + |x - 1|$ และ $5y + x = 35$
13. $y = x\sin x$ และ $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \frac{\pi}{2}$
14. $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$
15. $y^2 = x + 2$ และ $y = x$
16. $x = y - y^2$ และ $y = x + 2$
17. $x = y^3 + 1$ และ $x = 3y - 1$
18. $x = y^2 - 4y - 3$ และ $x = 1 - 2y^2$
19. $y = x^2$, $x = y^3$ และ $x + y = 2$
20. $y = x^2 - x$, $y = x^2 - 9x + 16$ และ $y = -x$
21. $x + y = 1$, $x + y = 5$, $y = 2x + 1$ และ $y = 2x + 6$
22. $y = x^3 - x$, $x + y + 1 = 0$ และ $x = \sqrt{y+1}$
23. $xy = 1$ และ $2x + 2y = 5$
24. $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$, $x + 2y = 5$ และ $y^2 - 4y + x = 0$
25. $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$

7.2 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้

ให้ L เป็นเส้นตรงในสามมิติ และ P เป็นจุดในสามมิติ เมื่อลากเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับ L ที่จุด Q จะเรียก Q ว่า **ภาพฉาย** (projection) ของ P บน L ดังรูป



ถ้า S เป็นรูปทรงตันในสามมิติ S จะประกอบไปด้วยจุดในสามมิติ **ภาพฉายของ S บน L** คือเซตของจุดที่เป็นภาพฉายของจุดต่าง ๆ ที่เป็นสมาชิกของ S บน L และเรียกอาณาบริเวณระนาบซึ่งได้จากการตัด S ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับ L ว่า **ภาคตัด** (cross section) **ของ S ที่ตั้งฉากกับ L** ซึ่งแสดงได้ดังรูป



เมื่อพิจารณาภาคตัดของ S ที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x ใด ๆ จะมีพื้นที่ $A(x)$ มีความหนา Δx ถ้าภาคตัดมีทั้งหมด n ชิ้น ปริมาตรของ S เรียกว่า V จะได้ว่า

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A_k(x)\Delta x_k$$

เมื่อ $A_k(x)$ คือพื้นที่ภาคตัดชิ้นที่ k และ Δx_k คือความหนาของภาคตัดชิ้นที่ k ให้ $x \in [a,b]$ โดยที่ A เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ เมื่อเลือกผลแบ่งกันบน $[a,b]$ ที่เหมาะสมโดยนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตจะได้ปริมาตร V ของรูปทรงตัน S ดังนั้น

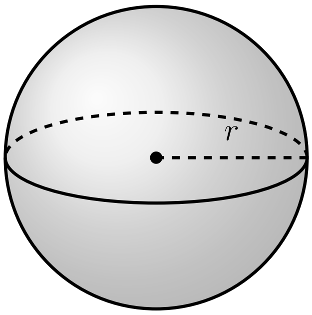
$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะกรณีที่ภาคตัดหาพื้นที่ได้เท่านั้น

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

ตัวอย่าง 7.2.2 ลิ่มไม้ (wooden wedge) มีฐานเป็นรูปครึ่งวงกลมรัศมี r เมื่อตัดตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางจะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่มุกฉากอยู่บนครึ่งวงกลม จงหาปริมาตรของลิ่มไม้อันนี้

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาปริมาตรของ **ทรงกลม** (sphere) ที่มีรัศมี r หน่วย



แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งมีฐานเป็นวงกลมรัศมี 3 หน่วยและทุกภาคตัดที่ตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานเป็น

   1.1 รูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

   1.2 รูปสี่เหลี่ยมหน้าจั่วที่มีส่วนสูงเท่ากับฐาน

2. จงหาปริมาตรของรปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงรี $x^2 + 4y^2 = 4$ และถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X ภาคตัดจะเป็นรูปครึ่งวงรีที่มีแกนโทอยู่บนฐาน และมีครึ่งแกนเอกยาว 2 หน่วย (กำหนดให้พื้นที่วงรีเท่ากับ πab เมื่อ a คือความยางครึ่งแกนเอก และ b คือความยาวครึ่งแกนโท)

3. อ่างเก็บน้ำรูปครึ่งทรงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 40 เมตรมีน้ำบรรจุอยู่ที่ระดับต่ำกว่าขอบอ่าง 5 เมตร จงหาปริมาตรของน้ำในอ้าง

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่มีฐานอยู่บนระนาบ XY ล้อมรอบด้วย $4x^2 + 4y^2 = 36$ และถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X แล้วภาคตัดจะเป็นรูปครึ่งวงกลม โดยที่เส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนฐาน

5. ฐานของรูปทรงตันรูปหนึ่ง คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นตรง $x = e$ และเส้นโค้ง $y = e^x$ จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

6. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่ด้านตรงข้ามมุมฉากตั้งฉากกับแกน X

7. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x = y^2$ และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านเท่ากัน 2 ด้าน โดยที่ด้านตรงข้ามมุมฉากตั้งฉากกับแกน X

8. จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่มีฐานล้อมรอบด้วยวงกลม $x = y^2$ และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าภาคตัดของรูปทรงตันนี้ที่ตั้งฉากกับแกน X เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

9. จงหาปริมาตรของพีระมิดตรงที่มีความสูงตรง h หน่วย และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ r หน่วย

7.3 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

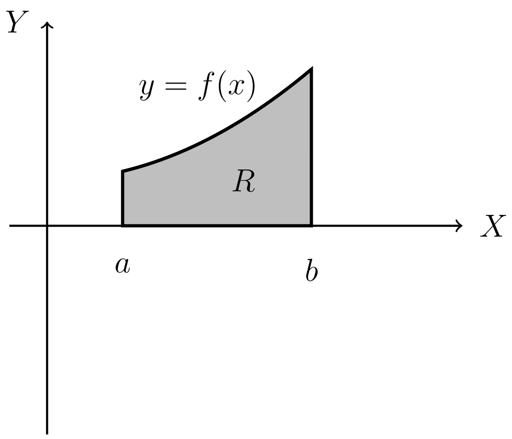
รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน (Solid by Rotation) คือรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นตรงซึ่งอยู่ระนาบเดียวกัน โดยเรียกเส้นตรงนั่นว่า**แกนหมุน (axis of rotation)** และเรียกปริมาตรของรูปทรงตันนั่นว่า **ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน**

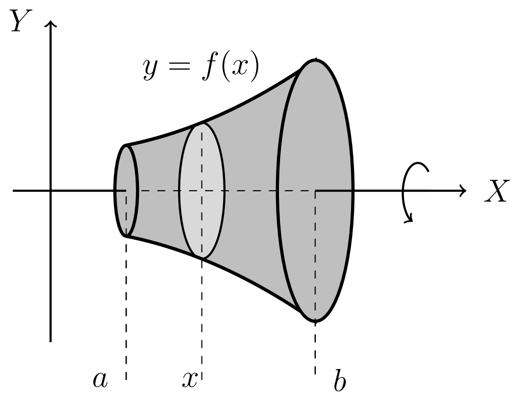
การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของอาณาบริเวณในระนาบ XY รอบแกน X หรือเส้นตรงที่ขนานกันแกน X และรอบแกน Y หรือเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y โดยหาปริมาตรดังกล่าวมี 2 วิธีคือ

1. วิธีแบบจาน (method of dishs)
2. วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (method of cylindrical shells)

1. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบจาน

ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[a, b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ กับแกน X และเส้นตรง $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน X จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป





จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a, b]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด x นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|f(x)|$ จะได้ว่า

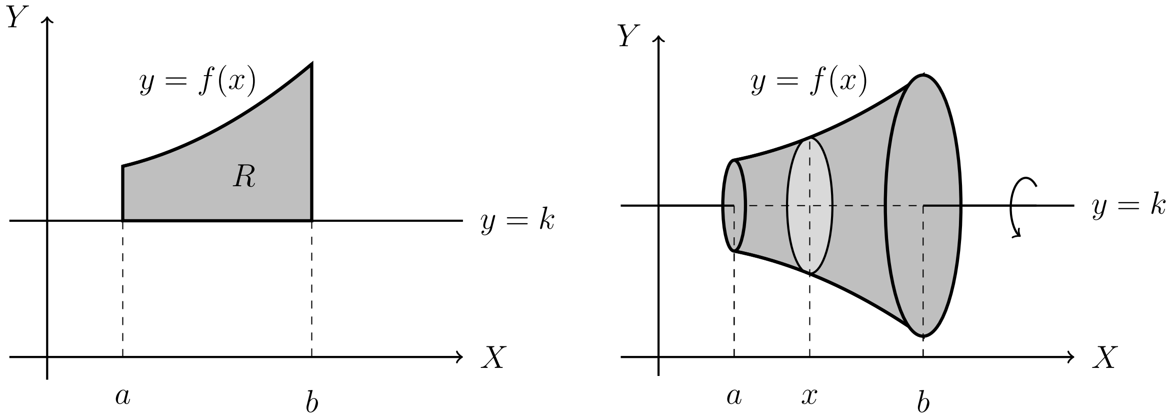
$$A(x) = \pi(|f(x)|)^2 = \pi[f(x)]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \int_a^b A(x)\, dx$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

เรียกปริมาตร V ที่ได้โดยวิธีนี้ว่าปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบจาน

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ กับเส้นตรง $y = k$ และ $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบเส้นตรง $y = k$ จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป



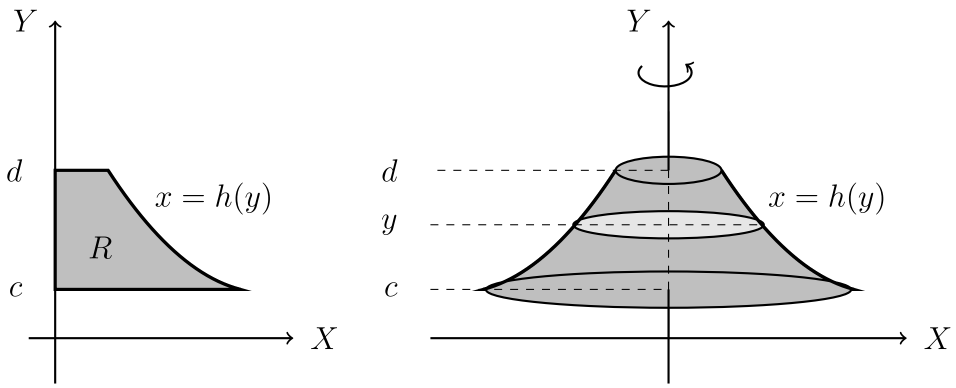
จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a,b]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด x นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|f(x)-k|$ จะได้ว่า

$$A(x) = \pi(|f(x)-k|)^2 = \pi[f(x)-k]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b \pi[f(x)-k]^2\,dx$$

ให้ $x = h(y)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[c,d]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = h(y)$ กับแกน Y และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน Y จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป



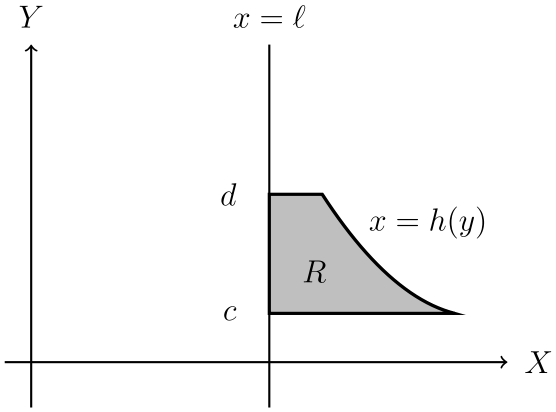
จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด y เมื่อ $y \in [c,d]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด y นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|h(y)|$ จะได้ว่า

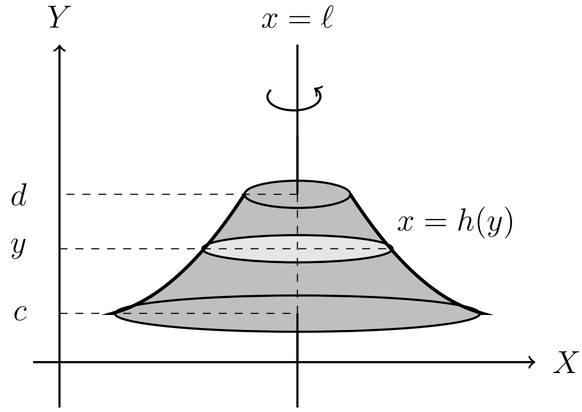
$$A(y) = \pi(|h(y)|)^2 = \pi[h(y)]^2$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \displaystyle\int_c^d A(y)\,dy$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_c^d \pi[h(y)]^2\,dy$$

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = h(y)$ กับเส้นตรง $x = \ell$ และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบเส้นตรง $x = \ell$ จะได้รูปทรงตัน แสดงดังรูป





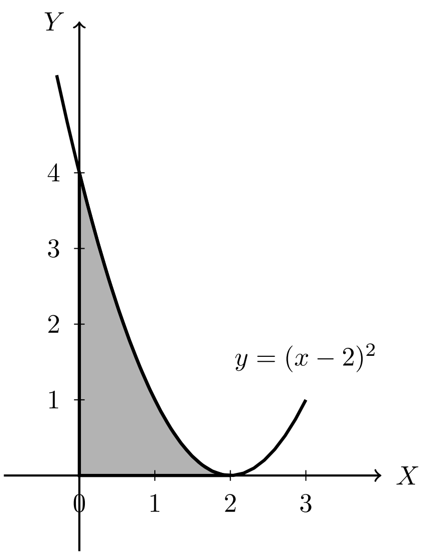
จากรูปภาคตัดตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \ell$ ที่จุด y เมื่อ $y \in [c, d]$ เป็นรูปวงกลม ให้ $A(y)$ แทนพื้นที่ของวงกลมของภาคตัดที่จุด y นั่นคือรัศมีเท่ากับ $|h(y) - \ell|$ จะได้ว่า

$$A(y) = \pi(|h(y) - \ell|)^2 = \pi[h(y) - \ell]^2$$

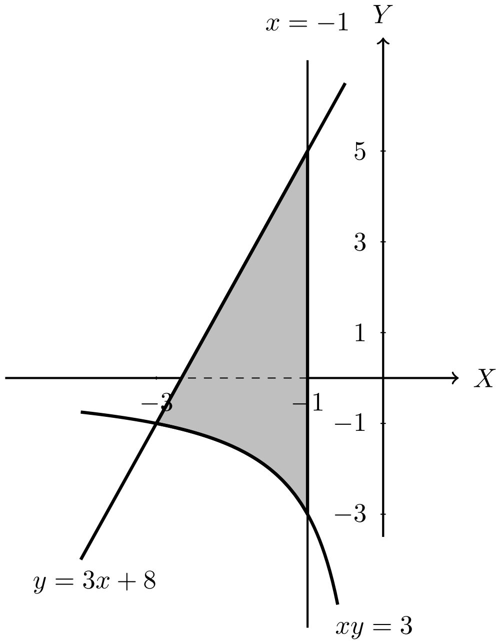
และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว สรุปได้ว่า

$$V = \int_c^d \pi[h(y) - \ell]^2 \, dy$$

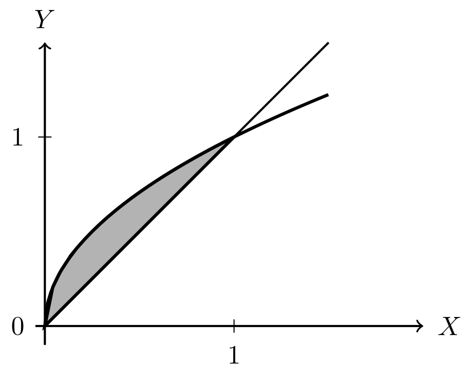
ตัวอย่าง 7.3.1 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x-2)^2$ รอบแกน X และรอบแกน Y



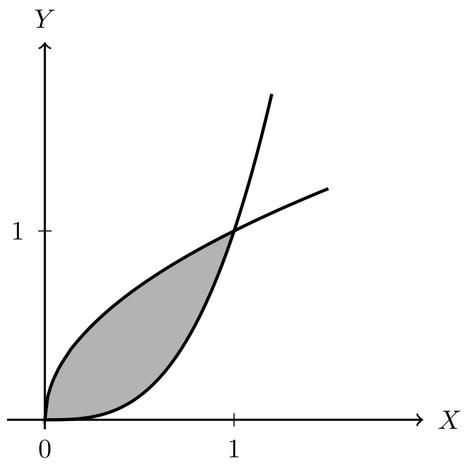
ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $xy = 3$ เส้นตรง $x = -1$ และ $y = 3x + 8$ รอบเส้นตรง $x = -1$



ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ เส้นตรง $y = x$ รอบแกน X



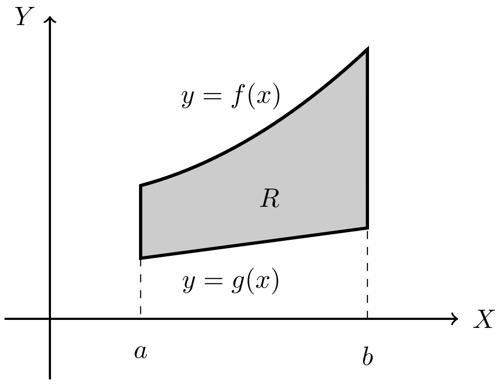
ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ รอบแกน Y

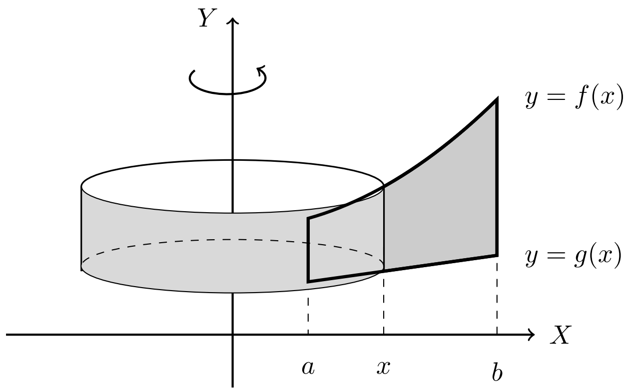


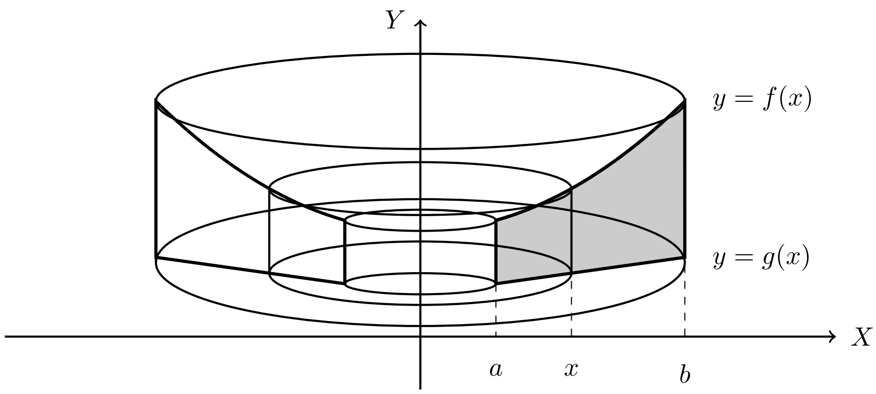
ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และ $y = x$ รอบเส้นตรง $x = 5$ และรอบเส้นตรง $y = 4$

2. การหาปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $g(x) \leq f(x)$ เมื่อ $x \in [a, b]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ และเส้นตรง $x = a, x = b$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน Y แสดงได้ดังรูป







จากรูปเมื่อตัด R ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด x เมื่อ $x \in [a, b]$ จะได้เส้นตรงที่ขนานแกน Y และเมื่อนำไปหมุนรอบแกน Y จะได้รูปทรงกระบอกที่มีความสูงเท่ากับ $f(x) - g(x)$ และรัศมีเท่ากับ $|x|$ ให้ $A(x)$ แทนพื้นที่ผิวข้างทรงกระบอกจะได้ว่า

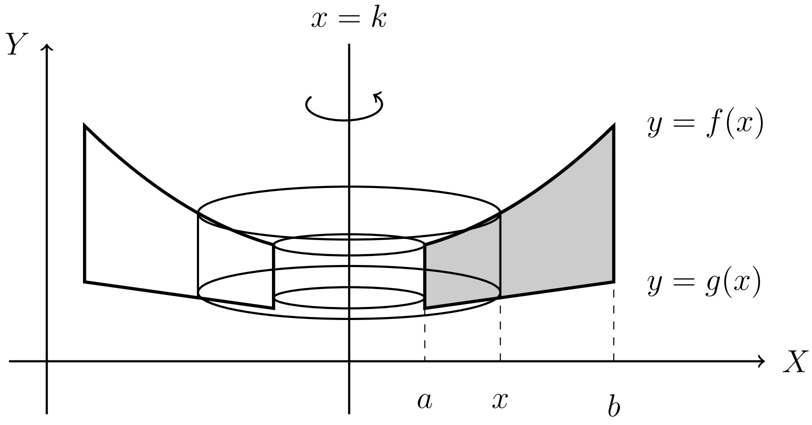
$$A(x) = 2\pi|x|[f(x) - g(x)]$$

และ V แทนปริมาตรของรูปทรงทรงตันดังกล่าว จาก $V = \int_a^b A(x)\,dx$ สรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b 2\pi|x|[f(x) - g(x)]\,dx$$

เรียกปริมาตร V ที่ได้โดยวิธีนี้ว่าปริมาตรของรูปทรงตันโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ในทำนองเดียวกันถ้าหมุน R รอบเส้นตรง $x = k$ ดังรูป



โดยวิธีเปลือกทรงกระบอกสรุปได้ว่า

$$V = \int_a^b 2\pi|x-k|[f(x)-g(x)]\,dx$$

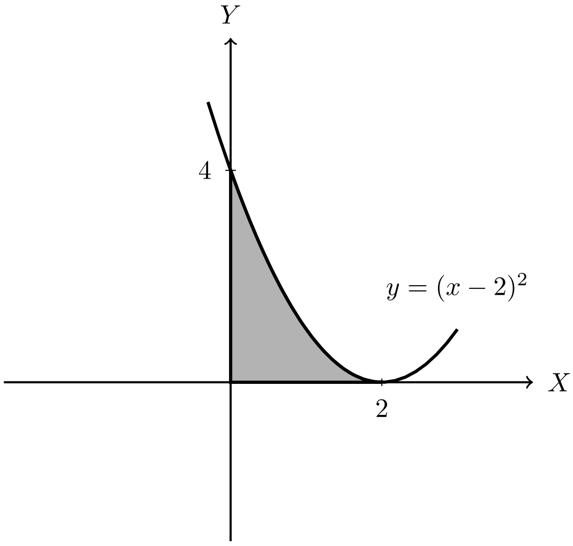
โดยแนวคิดเดียวกันกับการหมุนรอบแกน Y จะพิจารณาการหมุนรอบแกน X เมื่อให้ $x = p(y)$ และ $x = q(y)$ เป็นเส้นโค้งที่มีค่าบนช่วง $[c, d]$ โดยที่ $p(y) \leq q(y)$ เมื่อ $y \in [c, d]$ และ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = p(y)$ และ $x = q(y)$ และเส้นตรง $y = c, y = d$ เมื่อนำ R ไปหมุนรอบแกน X จะได้ปริมาตรที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีเปลือกทรงกระบอกเท่ากับ

$$V = \int_c^d 2\pi|y|[q(y)-p(y)]\,dy$$

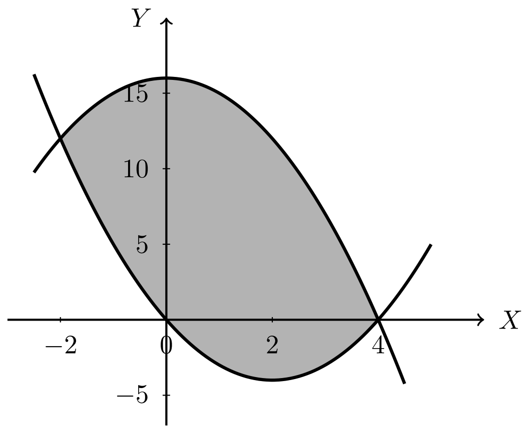
และหมุนรอบเส้นตรง $y = \ell$ ปริมาตรคือ

$$V = \int_c^d 2\pi|y-\ell|[q(y)-p(y)]\,dy$$

ตัวอย่าง 7.3.6 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และเส้นโค้ง $y = (x-2)^2$ รอบแกน X และรอบแกน Y โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก



ตัวอย่าง 7.3.7 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ และ $y = 16 - x^2$ รอบแกนเส้นตรง $x = 6$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก



ตัวอย่าง 7.3.8 จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y เส้นโค้ง $y = \sqrt{x-1}$ เส้นตรง $x = 3$ และเส้นตรง $y = 2$ รอบแกน X และเส้นตรง $y = 3$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้ โดยใช้**วิธีแบบจาน**

1.1 $y = x,\ x = 1$ และ $y = 0$	รอบแกน X
1.2 $y = x^2 - 4x$ และแกน X	รอบแกน X
1.3 $y = 4x - x^2$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 5$	รอบแกน X
1.4 $y = \cos x,\ x = 0$ และ $y = 0$ ในจตุภาคที่1	รอบแกน X
1.5 $y + x + 1 = 0,\ x - 2y = 2$ และ $y = 0$	รอบแกน X
1.6 $y = x^2,\ x = 1$ และ $y = 0$	รอบแกน Y
1.7 $x = 2y - y^2 - 2$ และ $x = -5$	รอบแกน Y
1.8 $y = x^2,\ x = 1$ และแกน X	รอบเส้นตรง $x = -1$ และ รอบเส้นตรง $y = -1$
1.9 $y = x^2 - x$ และ $y = 2x - x^2$	รอบเส้นตรง $y = 2$

2. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้ โดยใช้**วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก**

2.1 $y = x^3,\ x = 2,\ x = 3$ และแกน X	รอบแกน Y
2.2 $y = x$ และ $y = x^2$	รอบแกน Y
2.3 $y = x^2 - x^3$ และแกน X	รอบแกน Y
2.4 $x = \sqrt{9 - y^2}$ และแกน Y	รอบแกน Y
2.5 $y = 2x,\ x = 6$ และ $x = 0$	รอบแกน X
2.6 $x + y = 4,\ y = 2\sqrt{x-1}$ และแกน X	รอบแกน X
2.7 $y = x^2,\ x = 1$ และ $y = 0$	รอบเส้นตรง $x = 1$
2.8 $y = 2 - \lvert x \rvert$ และแกน X	รอบเส้นตรง $y = -1$
2.9 $x = y^2,\ x = 0$ และ $x + y = 2$	รอบเส้นตรง $y = -3$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่อไปนี้

3.1 $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0$ และ $x = \frac{\pi}{4}$	รอบแกน X
3.2 $y = \lvert x \rvert^3,\ x = -1,\ x = 1$ และแกน X	รอบแกน X
3.3 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$	รอบแกน Y
3.4 $y^2 = x^3,\ x = 4$ และแกน X	รอบเส้นตรง $y = 8$
3.5 $y^2 = x^3,\ y = 6$ และแกน Y	รอบเส้นตรง $y = 8$

บทที่ 8

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

จากแนวคิดการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a,b]$ เราจะขยายแนวคิดไปยังกรณีการหาปริพันธ์บนช่วงอนันต์เช่น $\int_0^\infty \sqrt{x}\,dx$ หรือการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์เช่น $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$ เรียกปริพันธ์ลักษณะนี้ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (improper integral)** แบ่งออกเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์
2. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์
3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ และช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์

8.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ ตัวอย่างเช่น

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง
2. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$
3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง
4. $\int_{-\infty}^0 \ell\text{n}|x|\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\ell\text{n}|x|$ ไม่มีค่าเมื่อ $x=0$
5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x|-1}\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง เนื่องจาก $\frac{1}{|x|-1}$ ไม่มีค่าเมื่อ $x = -1, 1$

บทนิยาม 8.1.1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, t]$ ทุก ๆ $t > a$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** (convergence) และ
   $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** (divergence)

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[t, b]$ ทุก ๆ $t < b$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

3. ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ ทุก ๆ a, b

   $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** ก็ต่อเมื่อ $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ และ $\int_c^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า**
   $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ หรือ $\int_c^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

ตัวอย่าง 8.1.2 จงพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-2}\,dx$

ตัวอย่าง 8.1.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x2^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

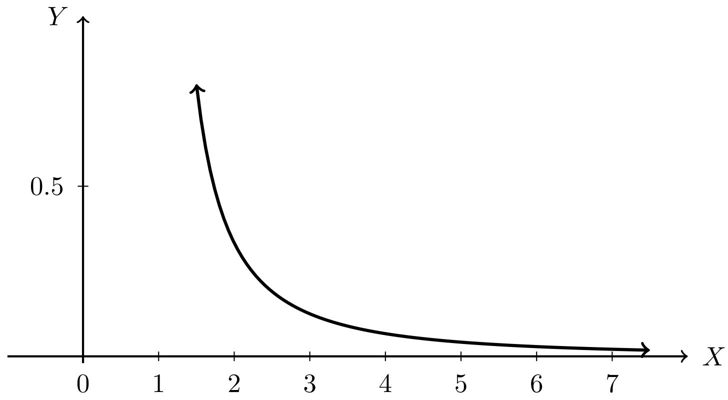
ตัวอย่าง 8.1.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1.5 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1.6 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}\, dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.1.7 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ กับแกน X เมื่อ } x \geq 2$$



แบบฝึกหัด 8.1

1. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

1.2 $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,dx$

1.3 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ell n x}{x}\,dx$

1.4 $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ell n^3 x}\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2^x}\,dx$

1.6 $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

1.8 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

1.9 $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

1.10 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

1.11 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,dx$

1.12 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})}\,dx$

1.13 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{3-2x}\,dx$

1.14 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$

1.15 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

1.16 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

1.17 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

1.18 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

1.19 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x^2+2x+1}\,dx$

1.20 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+1|}{x^2+1}\,dx$

1.21 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

1.22 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$

1.23 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

1.24 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

2. จงหาเงื่อนไขของ p ที่ทำให้ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ ลู่เข้า

3. จงหาเงื่อนไขของ s ที่ทำให้ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}t\,dt$ ลู่เข้า

4. จงหาค่าของ a ที่ทำให้ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = 5$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{8}{x^2-4}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \dfrac{1}{x}$ และ $y = \dfrac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \geq 1$

8.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง คือปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงการหาปริพันธ์ ตัวอย่างเช่น

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+1}\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|+1}\,dx$ ไม่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองเนื่องจาก $\dfrac{1}{|x|+1}$ มีค่าเมื่อ $x \in [-1,1]$
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \ell\text{n}x\,dx$ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

บทนิยาม 8.2.1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[t, b]$ ทุกๆ $a < t < b$
   โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to a^+} \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to a^+} \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก** และ
2. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, t]$ ทุกๆ $a < t < b$
   โดยที่ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to b^-} \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$
   ถ้า $\lim\limits_{t\to b^-} \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**
3. ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ หรือ $+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ โดยที่มี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ f มีขอบเขตและหาปริพันธ์ได้บนช่วง $[s, c]$ และ $[c, s]$ ทุกๆ s, t ซึ่ง $a < s < c < t < b$ ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** และ
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
   ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ หรือ $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **ลู่ออก**

ตัวอย่าง 8.2.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

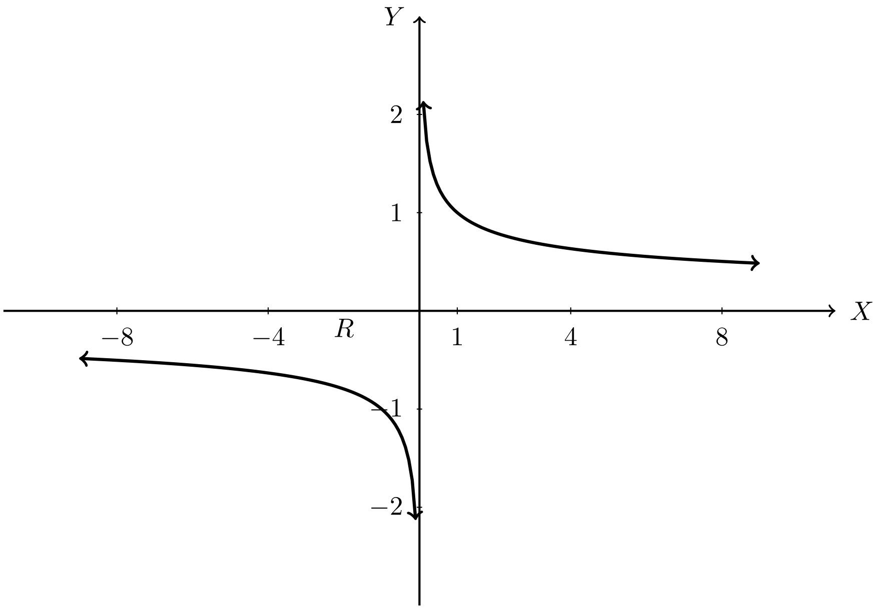
ตัวอย่าง 8.2.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.2.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.2.5 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\sqrt[5]{\ln x}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.2.6 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{กับแกน X เมื่อ } x \in [-8, 1]$$



แบบฝึกหัด 8.2

1. จงพิจารณาว่าอินทริกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

1.2 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

1.3 $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

1.4 $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

1.5 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

1.6 $\int_0^1 x\ell\text{n}x\,dx$

1.7 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-2\sin x}\,dx$

1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x\,dx$

1.9 $\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$

1.10 $\int_0^1 \ell\text{n}x\,dx$

1.11 $\int_0^4 \frac{\ell\text{n}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

1.12 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx$

1.13 $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

1.14 $\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$

1.15 $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

1.16 $\int_{-2}^7 \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

1.17 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

1.18 $\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^7}\,dx$

1.19 $\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

1.20 $\int_1^3 \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

1.21 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

1.22 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

1.23 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

1.24 $\int_0^1 \frac{1}{x(\ell\text{n}x)^{\frac{1}{5}}}\,dx$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ กับแกน X เมื่อ $x \in [0,4]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x}$ และ $y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ เมื่อ $x \in [0,1]$

8.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ผสมระหว่างชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง โดยการพิจารณาเป็นช่วงย่อย และพิจารณาการลู่เข้าลู่ออกตามนิยามตามหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว

ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมจะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ช่วงย่อยที่พิจารณาลู่เข้าทั้งหมด แต่ถ้ามีอย่างน้อยช่วงย่อยลู่ออกจะสรุปได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสมลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.1 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.2 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.3 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.4 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\,dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 8.3

จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$
4. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\ell\text{n}x}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^{-0.1}\, dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\, dx$
7. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+8}\, dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\, dx$
9. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\, dx$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}\, dx$
11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\, dx$
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$
13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$
14. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$
15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\, dx$
16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$
17. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-2|}\, dx$

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
30. $\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
31. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
32. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{n}a$
11. $\frac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}\text{log}_a|x| = \frac{1}{x\ell\text{n}a}$
13. $\frac{d}{dx}\text{sin}x = \text{cos}x$
14. $\frac{d}{dx}\text{cos}x = -\text{sin}x$
15. $\frac{d}{dx}\text{tan}x = \text{sec}^2 x$
16. $\frac{d}{dx}\text{sec}x = \text{sec}x\text{tan}x$
17. $\frac{d}{dx}\text{cot}x = -\text{csc}^2 x$
18. $\frac{d}{dx}\text{csc}x = -\text{csc}x\text{cot}x$
19. $\frac{d}{dx}\text{arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}\text{arccos}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}\text{arctan}x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx}\text{arccot}x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + udv$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x}dx = \ell\text{n}|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C$
10. $\int \text{sin}x dx = -\text{cos}x + c$
11. $\int \text{cos}x dx = \text{sin}x + C$
12. $\int \text{sec}^2 x dx = \text{tan}x + C$
13. $\int \text{sec}x\text{tan}x dx = \text{sec}x + C$
14. $\int \text{csc}^2 x dx = -\text{cot}x + C$
15. $\int \text{csc}x\text{cot}x dx = -\text{csc}x + C$
16. $\int \text{tan}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x| + C$
17. $\int \text{sec}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x| + C$
18. $\int \text{cot}x dx = \ell\text{n}|\text{sin}x| + C$
19. $\int \text{csc}x dx = \ell\text{n}|\text{csc}x - \text{cot}x| + C$

20. $\displaystyle\int e^{ax}\text{sin}bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{sin}bx - b\text{cos}bx) + C$

21. $\displaystyle\int e^{ax}\text{cos}bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{cos}bx + b\text{sin}bx) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsin}x + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctan}x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}x + C$

25. $\displaystyle\int \ell\text{n}x\,dx = x\ell\text{n}x - x + C$

26. $\displaystyle\int \text{cos}ax\,dx = \frac{1}{a}\text{sin}ax + C$

27. $\displaystyle\int \text{sin}ax\,dx = -\frac{1}{a}\text{cos}ax + C$

28. $\displaystyle\int \text{arcsin}x\,dx = x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$

29. $\displaystyle\int \text{arccos}x\,dx = x\text{arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$

30. $\displaystyle\int \text{arctan}x\,dx = x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

31. $\displaystyle\int \text{arccot}x\,dx = x\text{arccot}x + \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

32. $\displaystyle\int \text{arcsec}x\,dx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

33. $\displaystyle\int \text{arccsc}x\,dx = x\text{arccsc}x + \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Canada. Nelson Education, Ltd.

Josip Hercet, Lorraine Heienrichs, Palmira Mariz Seiler and Marlence Torres Skoumal. (2012). **Mathematics higher level**. New York: Oxford university press.

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.

Tom Jackson. (2012). **Mathematics an illustrated history of numbers**. New York: Shelter Harbor Press and Worth Press Ltd

ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours),Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod.ja@ssru.ac.th
Office: 1144
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **ทฤษฎีจำนวน**. www.mebmarket.com.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู**. www.mebmarket.com.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **พีชคณิตนามธรรม**. www.mebmarket.com.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2565). **ความน่าจะเป็นและสถิติ**. www.mebmarket.com.

ธนัชยศ จำปาหวาย. (2560). **ความจริงที่ต้องพิสูจน์**. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.