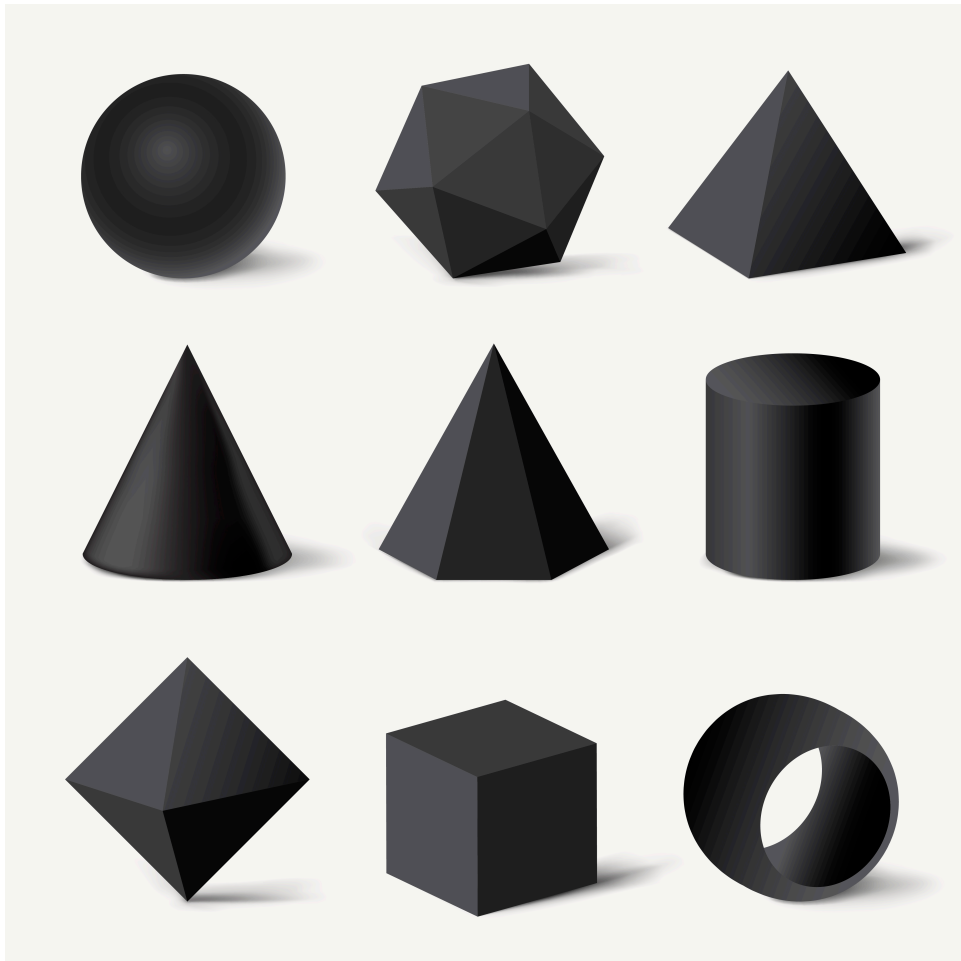


CONIC SECTION



Thanatyod Jampawai

Update : December 2023

สารบัญ

1	วงกลม (CIRCLE)	1
1.1	สมการวงกลม	1
1.2	วงกลมกับเส้นตรง	6
1.3	การประยุกต์วงกลม	11
1.4	ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องวงกลม	13
2	วงรี (ELLIPSE)	17
2.1	สมการวงรี	17
2.2	ลาตัสเลกต์ัมของวงรี	29
2.3	ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี	31
2.4	ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องวงรี	32
3	ไฮเพอร์โบลา (HYPERBOLA)	35
3.1	สมการไฮเพอร์โบลา	35
3.2	เส้นกำกับ	47
3.3	ลาตัสเรกต์ัมของไฮเพอร์โบลา	50
3.4	ความเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา	52
3.5	ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องไฮเพอร์โบลา	53
4	พาราโบลา (PARABOLA)	57
4.1	สมการพาราโบลา	57
4.2	ลาตัสเรกต์ัมของพาราโบลา	71
4.3	ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องพาราโบลา	72
5	แบบฝึกหัดระคน	75

บทที่ 1

วงกลม (CIRCLE)

1.1 สมการวงกลม

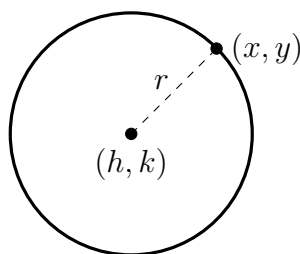
บทนิยาม 1.1.1 วงกลม (circle) คือเซตของจุดอยู่ห่างจากจุดคงที่ด้วยระยะคงที่

เรียกจุดคงที่ว่า **จุดศูนย์กลาง (center point)** และระยะคงที่ว่า **รัศมี (radius)**

กำหนดให้ $C_{P,r}$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $P(h, k)$ และมีรัศมี r ซึ่ง $r \geq 0$ นั่นคือ

$$C_{P,r} = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r\}$$

โดยเรียก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ว่า **สมการมาตรฐานของวงกลม (standard equation of circle)**



ในกรณี $r = 0$ เรียกว่าวงกลมรัศมีเท่ากับศูนย์ หรือ $C_{P,0} = \{(h, k)\}$ นั่นคือเซตของวงกลมมีเพียงจุดเดียวคือจุดศูนย์กลาง

ตัวอย่าง 1.1.2 จงเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

สมการมาตรฐานของวงกลม	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
$x^2 + y^2 = 1$		
$x^2 + (y - 1)^2 = 4$		
$(x + 1)^2 + y^2 = 16$		
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$		
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 0$		

ถ้าจัดรูปสมการมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

เมื่อกำหนดให้ $A = -2h$, $B = -2k$ และ $C = h^2 + k^2 - r^2$ ฉะนั้น

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

ซึ่งจะเรียกว่า **สมการทั่วไปของวงกลม (general equation of circle)**

และผลที่ได้ตามมาคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.3 สมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เป็นสมการทั่วไปของวงกลม ก็ต่อเมื่อ

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C \geq 0$$

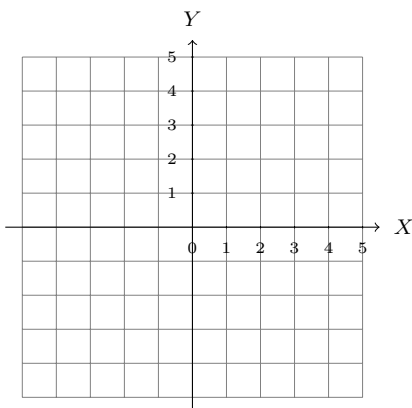
โดยมีศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ และรัศมี $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์

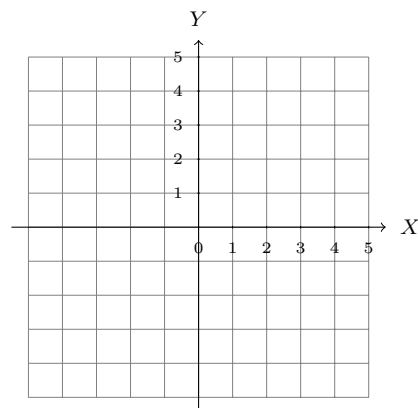
สมการ	เป็นสมการทั่วไปของวงกลมหรือไม่	จุดศูนย์กลาง	รัศมี
$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$			
$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$			
$x^2 + y^2 + 4x - y + 8 = 0$			
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$			
$2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y = 6$			

ตัวอย่าง 1.1.5 จงวาดกราฟของสมการวงกลมต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 = 16$



2. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 7$



ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาสมการทั่วไปของวงกลมแต่ละข้อต่อไปนี้

1. วงกลมที่มี $(0, 1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมี 2 หน่วย
2. วงกลมที่มี $(1, 3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสแกน X
3. วงกลมที่มี $(1, 3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสแกน Y
4. วงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยที่ $A = (1, 3)$ และ $B = (-5, 11)$

ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาสมการทั่วไปของวงกลมที่ผ่านจุด $(3, 5)$ และ $(0, 6)$ โดยมีรัศมี 5 หน่วย

ตัวอย่าง 1.1.8 ลากเส้นตรงจาก $P(-1, 5)$ ไปตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ ที่จุด Q ให้ R เป็นจุดกึ่งกลางของส่วน-
เส้นตรง PQ แล้วสมการวงกลมที่ผ่านจุด R และมีจุดศูนย์กลางที่ $(\frac{1}{2}, 1)$
คือข้อใดต่อไปนี้

1. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$

2. $x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$

3. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$

4. $x^2 + y^2 - x - 2y + 5 = 0$

ตัวอย่าง 1.1.9 วงกลมวงหนึ่งที่มีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

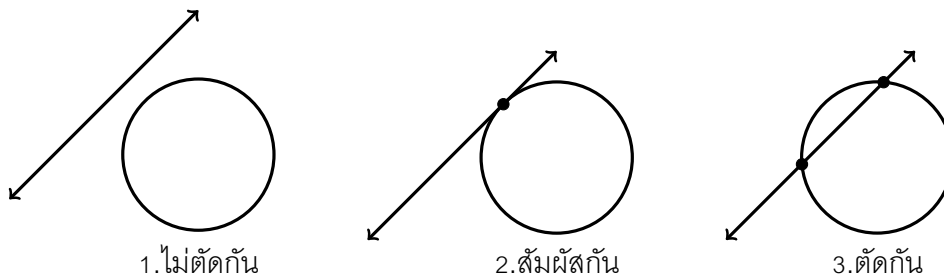
และสัมผัสแกน Y ที่จุด P ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและขนานกับเส้นตรง $2x - 2y = 1$ ระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง L เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.พ. 2562)

1.2 วงกลมกับเส้นตรง

ทฤษฎีบท 1.2.1 ให้ L เป็นเส้นตรงและ C เป็นวงกลม แล้วเป็นไปได้แบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบนี้เท่านั้น

1. $L \cap S$ ไม่มีสมาชิก เรียกว่าเส้นตรงไม่ตัดกับวงกลม
2. $L \cap S$ มีสมาชิกตัวเดียว เรียกว่าเส้นตรงสัมผัสกับวงกลม
3. $L \cap S$ มีสมาชิกสองตัว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับวงกลม

จากทฤษฎีบทนี้ สรุปได้ว่าเส้นตรงกับวงกลมจะสัมพันธ์ 3 แบบ ดังภาพ



บทพิสูจน์. ให้เส้นตรง L มีสมการเป็น $y = mx + c$ และวงกลม C มีสมการเป็น

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + [(mx + c) - k]^2 &= r^2 \\ x^2 + 2hx + h^2 + m^2x^2 + 2mx(c - k) + (c - k)^2 &= r^2 \\ (1 + m^2)x^2 + (2h + 2m(c - k))x + (h^2 + (c - k)^2 - r^2) &= 0 \\ Ax^2 + Bx + C &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $A = 1 + m^2$, $B = 2h + 2m(c - k)$ และ $C = h^2 + (c - k)^2 - r^2$

จากสมบัติสมการกำลังสองสรุปได้ว่า

1. $B^2 - 4AC < 0$ ไม่มีคำตอบในจำนวนจริง นั่นคือ $L \cap S$ ไม่มีสมาชิก
2. $B^2 - 4AC = 0$ มีคำตอบเดียวในจำนวนจริง นั่นคือ $L \cap S$ มีสมาชิกตัวเดียว
3. $B^2 - 4AC > 0$ มีสองคำตอบในจำนวนจริง นั่นคือ $L \cap S$ มีสมาชิกสองตัว

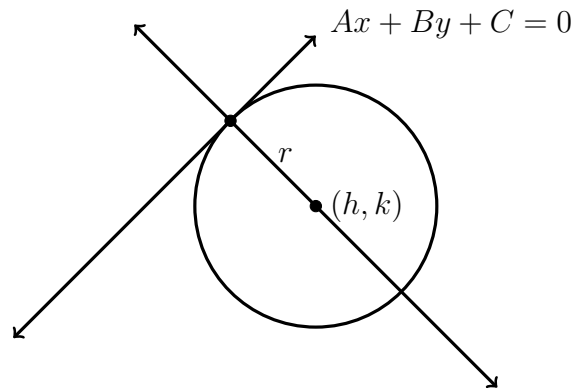
จึงสรุปได้ดังทฤษฎีบทนี้ □

ทฤษฎีบท 1.2.2 เส้นตรง L ที่มีสมการ $Ax + By + C = 0$ สัมผัสกับวงกลม C ที่มีสมการเป็น

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

จะได้ว่าเส้นตรง L ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (h, k) และจุดสัมผัสของเส้นตรงกับวงกลม จะได้ว่า

$$r = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ตัวอย่าง 1.2.3 จงหาสมการทั่วไปของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ และสัมผัสกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $3x - 4y + 10 = 0$

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาสมการทั่วไปของวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = x$ และสัมผัสกับเส้นตรง 2 เส้นที่มีสมการคือ $y = 2 - x$ และ $y = 6 - x$

ตัวอย่าง 1.2.5 สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, -3)$ และสัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 4)$ และ $(2, 1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 30 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 30 = 0$

3. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

4. $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 15 = 0$

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหา $m \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ สัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

ตัวอย่าง 1.2.7 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจุดภาคที่ 1 สัมผัสแกน X ที่จุด $(3, 0)$ และสัมผัสเส้นตรงที่มีสมการเป็น $4y = 3x + 36$ ที่จุด M แล้วจุด M อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทางเท่าใด

1. 7 หน่วย

2. 8 หน่วย

3. 9 หน่วย

4. 10 หน่วย

ตัวอย่าง 1.2.8 เส้นตรง L สัมผัสกับวงกลมที่มีสมการ

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$$

ที่จุด $(3, 8)$ และเส้นตรง L ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และ B ตามลำดับ แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม OAB มีค่าเท่าใด เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

1. $\frac{529}{24}$ ตรน.2. $\frac{575}{24}$ ตรน.3. $\frac{460}{24}$ ตรน.4. $\frac{529}{12}$ ตรน.5. $\frac{575}{12}$ ตรน.

ตัวอย่าง 1.2.9 กำหนดให้

$$f_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{เมื่อ } x \leq 1$$

$$f_2(x) = 3x - 2 \quad \text{เมื่อ } x \geq 1$$

ถ้า $P(a, b)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี $\frac{7}{\sqrt{5}}$ หน่วย และสัมผัสกราฟ f_1 และ f_2 แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent 2/2545)

1. $-2\sqrt{2}$

2. $2\sqrt{2}$

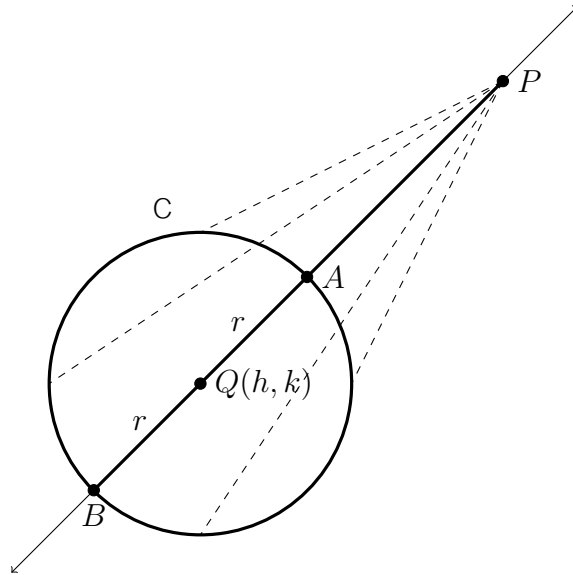
3. $6 - \sqrt{2}$

4. $6 + \sqrt{2}$

1.3 การประยุกต์วงกลม

ทฤษฎีบท 1.3.1 ระยะทางที่สั้นที่สุดและระยะทางที่ยาวที่สุดจากจุด P ไปยังวงกลม C คือส่วนของเส้นตรงส่วนหนึ่งที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม C และจุด P

กำหนดให้ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $Q(h, k)$ และรัศมี r แสดงได้ดังรูป



จากรูประยะทางที่สั้นที่สุดเท่ากับ PA และระยะทางที่ยาวที่สุดคือ PB เนื่องจากเราทราบพิกัดจุด P และจุด Q อาจสรุปได้ดังนี้

$$\text{ระยะทางที่สั้นที่สุดเท่ากับ } PA = PQ - r \quad \text{และ} \quad \text{ระยะทางที่ยาวที่สุด } PB = PQ + r$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดและระยะทางที่ยาวที่สุดจากจุด $P(10, 7)$ ไปยังวงกลม C ที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

ตัวอย่าง 1.3.3 จุด $A(3, 0)$ เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
สมการเส้นตรงที่ผ่าน P และ Q คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y = 3$

2. $x - y = 3$

3. $2x + y = 6$

4. $2x - y = 6$

1.4 ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องวงกลม

ตัวอย่าง 1.4.1 วงกลม $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ มีเส้นสัมผัสที่ผ่านจุดกำเนิด 2 เส้น คือแกน Y และเส้นตรง L ความชันของเส้นตรง L เท่ากับเท่าใด (A-level มี.ค. 2566)

ตัวอย่าง 1.4.2 วงกลม $x^2 - 70x + y^2 + 10y - 144 = 0$ มีจุดตัดแกน X จุดหนึ่งที่ $A(a, 0)$ ซึ่ง $a < 0$ และมีจุดตัดแกน Y จุดหนึ่งที่ $B(0, b)$ ซึ่ง $b > 0$ ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด (กสพท. 2565)

1. $(-\frac{145}{4}, 0)$
2. $(-\frac{135}{4}, 0)$
3. $(55, 0)$
4. $(\frac{135}{4}, 0)$
5. $(\frac{145}{4}, 0)$

ตัวอย่าง 1.4.3 กำหนดวงกลม C มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 2)$ และสัมผัสแกน X ที่จุด P เส้นตรง L ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม C และมีความชันเป็น 1 กำลังสองของระยะ PQ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent ต.ค. 2543)

1. $6 - 4\sqrt{2}$ หน่วย 2. $7 - 4\sqrt{2}$ หน่วย 3. $8 - 4\sqrt{2}$ หน่วย 4. $9 - 4\sqrt{2}$ หน่วย

ตัวอย่าง 1.4.4 กำหนดให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 4)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ถ้าเส้นตรง l สัมผัสวงกลม C ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 2)$ แล้วจุดใดต่อไปนี้เป็นจุดบนวงกลม C (Ent มี.ค.2544)

1. $(1, \frac{2}{5})$ 2. $(1, \frac{16}{5})$ 3. $(-\frac{13}{5}, 2)$ 4. $(\frac{3}{5}, 2)$

ตัวอย่าง 1.4.5 กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ตัดแกน Y ที่จุด 2 จุดแต่ไม่ตัดแกน X ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (Ent มี.ค.2548)

1. $a^2 > c$ และ $b^2 > c$

3. $a^2 < c$ และ $b^2 > c$

2. $a^2 > c$ และ $b^2 < c$

4. $a^2 < c$ และ $b^2 < c$

ตัวอย่าง 1.4.6 กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 1)$ ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$ เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด (PAT1 มี.ค.2552)

1. $(0, 1)$

2. $(0, 2)$

3. $(1, 0)$

4. $(3, 0)$

ตัวอย่าง 1.4.7 กำหนดให้

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ และ } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นพื้นที่ของเซต $A \cap B$ (สมาคมคณิตฯ 2560)

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $\frac{\pi}{2}$

3. π

4. 2π

บทที่ 2

วงรี (ELLIPSE)

2.1 สมการวงรี

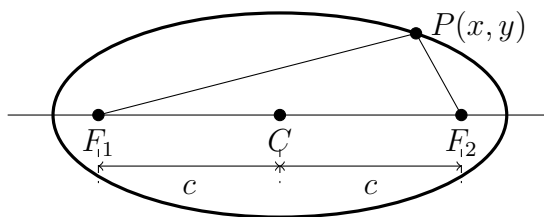
บทนิยาม 2.1.1 วงรี (ellipse) คือเซตของจุดซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัว

เรียกจุดคงที่ว่า **จุดโฟกัส (focus)** ของวงรี กำหนดให้ E เป็นวงรีที่มีผลบวกคงตัวค่าหนึ่งและมีจุดคงที่สองจุดหรือจุดโฟกัสคือ F_1 และ F_2 จะได้ว่า

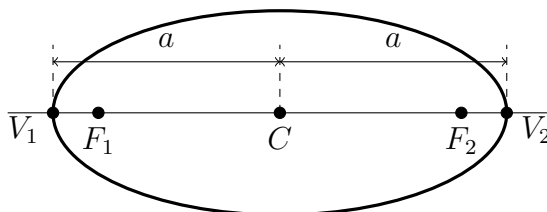
$$E = \{P(x, y) \mid PF_1 + PF_2 = \text{ค่าคงตัว}\}$$

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองว่า **จุดศูนย์กลาง (center point)** ของวงรี เขียนแทนด้วย $C(h, k)$

กำหนดระยะจาก C ไปยัง F_1 หรือ F_2 เท่ากับ c หน่วย แสดงได้ดังภาพ

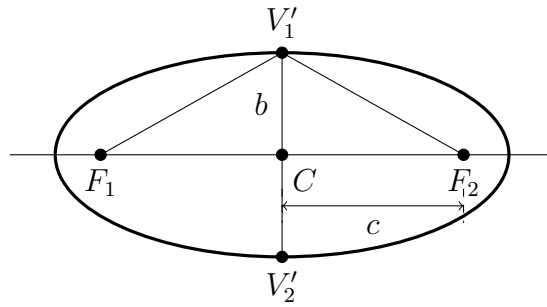


กรณีที่จุด P อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสจะเรียกว่า **จุดยอดของวงรี (vertex of ellipse)** เขียนแทนด้วย V_1 และ V_2 กำหนดระยะจาก C ไปยัง V_1 หรือ V_2 เท่ากับ a หน่วย เรียก V_1V_2 ว่า **แกนเอก (major axis)** ของวงรี นั่นคือความยาวแกนเอกเท่ากับ $2a$ หน่วย แสดงได้ดังภาพ



$$\text{ผลบวกคงตัว} = V_2F_1 + V_2F_2 = (CF_1 + CV_2) + (CV_2 - CF_2) = (c + a) + (a - c) = 2a$$

กรณีที่จุด P อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนเอกจะเรียกว่า **จุดยอดร่วม หรือจุดปลาย-แกนโท (co-vertex)** เขียนแทนด้วย V'_1 และ V'_2 กำหนดระยะจาก C ไปยัง V'_1 หรือ V'_2 เท่ากับ b หน่วย เรียก $V'_1V'_2$ ว่า **แกนโท (minor axis)** ของวงรี นั่นคือความยาวแกนโทเท่ากับ $2b$ หน่วย แสดงได้ดังภาพ



จากรูปจะได้ว่า $V'_1F_1 = V'_1F_2$ เนื่องจาก $V'_1F_1 + V'_1F_2 = 2a$ ดังนั้น $V'_1F_1 = a$ จะเห็นว่า $F_2CV'_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น

$$a^2 = b^2 + c^2$$

พิจารณากรณที่ F_1F_2 ขนานแกน X จะได้ว่า $F_1 = (h-c, k)$ และ $F_2 = (h+c, k)$ โดยที่ $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงรี

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$(PF_1)^2 = (2a - PF_2)^2$$

$$(PF_1)^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + (PF_2)^2$$

$$[(x-h) + c]^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h) - c]^2 + (y-k)^2} + [x - (h+c)]^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + 2(x-h)c + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h) - c]^2 + (y-k)^2} + (x-h)^2 - 2(x-h)c + c^2 + (y-k)^2$$

$$4(x-h)c = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h) - c]^2 + (y-k)^2}$$

$$a\sqrt{[(x-h) - c]^2 + (y-k)^2} = a^2 - (x-h)c$$

$$a^2 ([(x-h) - c]^2 + (y-k)^2) = a^4 - 2a^2c(x-h) + (x-h)^2c^2$$

$$a^2 ((x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2) = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h)^2 - 2ca^2(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

$$(a^2 - c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2 - c^2) = a^2b^2$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

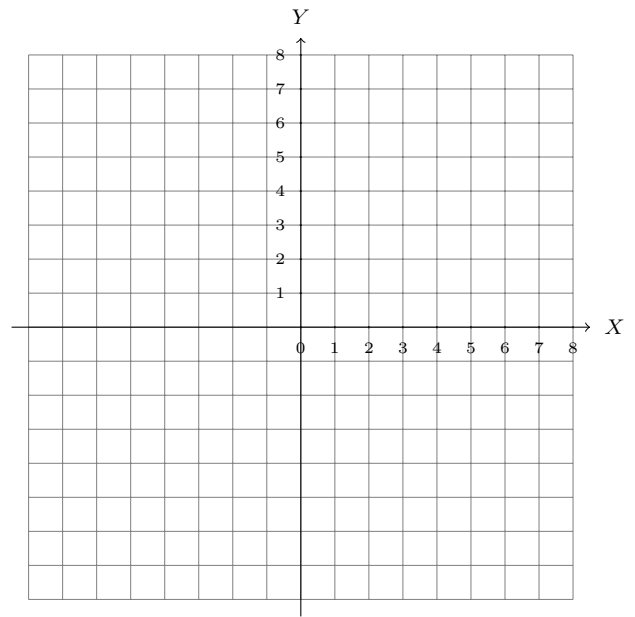
โดยเรียก $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ว่า **สมการมาตรฐานของวงรี (standard equation of ellipse)** เมื่อแกนเอกขนานกับแกน X ในทำนองเดียวกันเมื่อแกนเอกขนานกับแกน Y จะได้สมการมาตรฐานของวงรีอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ตัวอย่าง 2.1.2 จงวาดกราฟของของวงรีที่มีสมการต่อไปนี้และเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

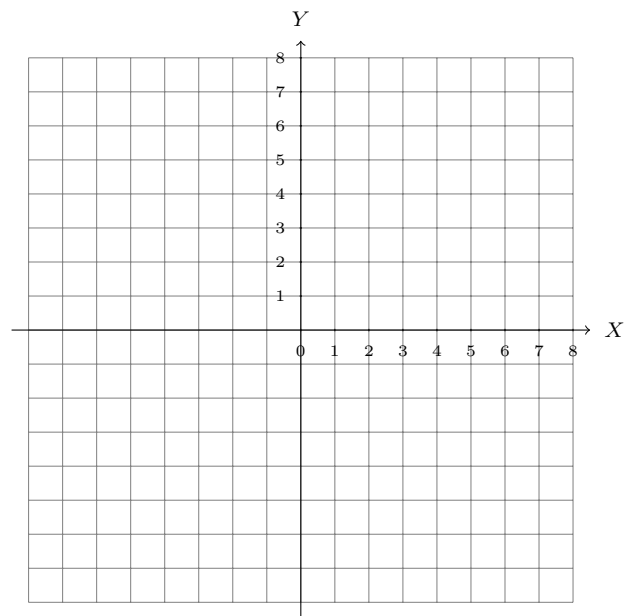
1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

แกนเอกขนาน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดยอดรวม	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนเอก	
ความยาวแกนโท	



2. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

แกนเอกขนาน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดยอดรวม	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนเอก	
ความยาวแกนโท	



ตัวอย่าง 2.1.3 ให้จุด (a, b) เป็นจุดบนวงรี $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ถ้าระยะห่างระหว่างจุด (a, b) กับจุด $(0, -\frac{5}{4})$ เท่ากับระยะระหว่างจุด (a, b) กับเส้นตรง $y = -\frac{3}{4}$ แล้วค่า b เท่ากับเท่าใด (A-level 2566)

1. -3

2. $-\frac{3}{2}$

3. $-\frac{3}{4}$

4. $\frac{3}{2}$

5. 3

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ P เป็นจุดบนวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F_1(0, -2)$ และ $F_2(0, 2)$ ถ้า $PF_1 = 7$ และ $PF_2 = 3$ แล้วสมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้ (กสพท. 2562)

1. $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

3. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

จากสมการมาตรฐานของวงรี

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

พิจารณากรณีแกนเอกขนานแกน X จะได้ว่า

$$\begin{aligned} b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 &= a^2b^2 \\ b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $A = b^2$, $B = a^2$, $C = -2b^2h$, $D = -2a^2k$ และ $E = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$ จะได้ว่าสมการในรูป

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

เรียกว่า **สมการทั่วไปของวงรี** (general equation of ellipse) และผลที่ได้ตามมาก็คือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.5 สมการ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เป็นสมการทั่วไปของวงรี ก็ต่อเมื่อ $A > 0$, $B > 0$ และ

$$A \left(\frac{C}{2A} \right)^2 + B \left(\frac{D}{2B} \right)^2 - E > 0$$

โดยมีศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B} \right)$

หมายเหตุ กรณีที่ $A = B$ จะได้ว่าวงรีนี้มี $a = b$ หรือกล่าวได้ว่าวงรีนี้เป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a

ตัวอย่าง 2.1.6 จงเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์

สมการ	เป็นสมการของวงรีหรือไม่	จุดศูนย์กลาง
$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$		
$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$		
$3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 19 = 0$		
$5x^2 + 3y^2 + 10x + 12y + 20 = 0$		
$25x^2 + 9y^2 + 50x - 18y = 66$		

ตัวอย่าง 2.1.7 จุดศูนย์กลางของวงรีที่มีสมการเป็น

$$3x^2 + 5y^2 - 6x - 10y + 36 = 0$$

อยู่ห่างจากกับวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + 10x - 18y + 81 = 0$ เป็นระยะที่สั้นที่สุดเท่าใด

ตัวอย่าง 2.1.8 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรีที่มีสมการเป็น

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$$

ถ้าวงกลมนี้สัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และ $(5, 0)$ แล้วรัศมีของวงกลมนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ANET 2549)

1. $\frac{3}{5}$

2. $\frac{4}{5}$

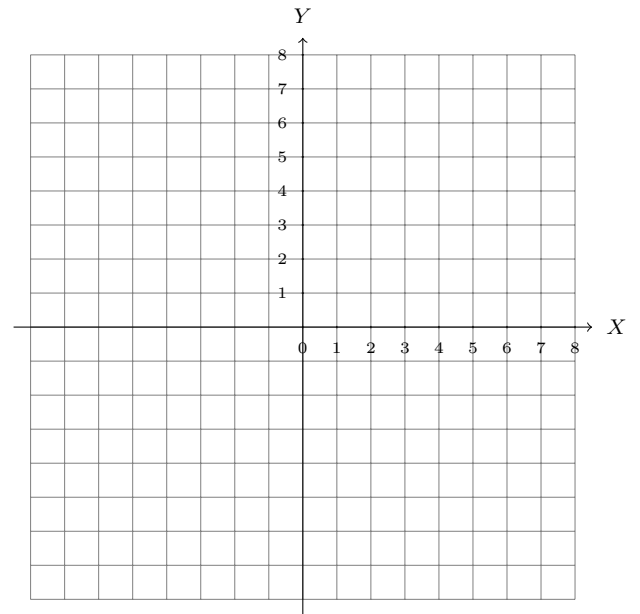
3. $\frac{7}{8}$

4. $\frac{9}{13}$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงเขียนสมการทั่วไปของวงรีในรูปสมการมาตรฐาน พร้อมวาดกราฟและเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

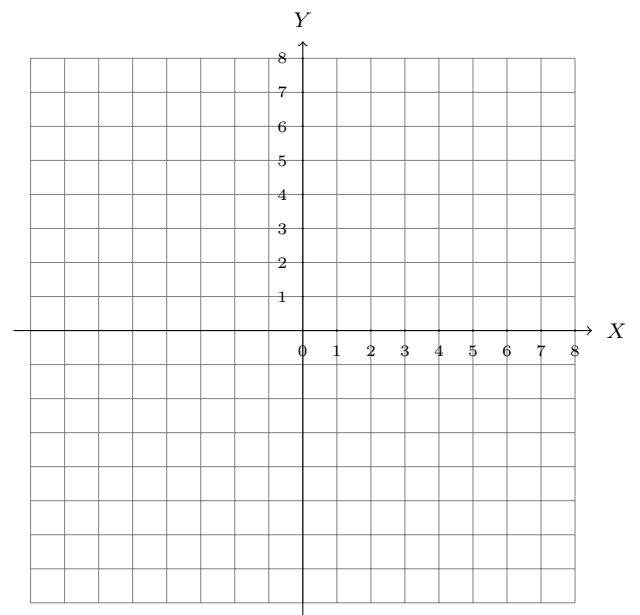
1. $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$

สมการมาตรฐาน	
แกนเอกขนานกับแกน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดยอดรวม	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนเอก	
ความยาวแกนโท	



2. $4x^2 + 16y^2 - 8x = 60$

สมการมาตรฐาน	
แกนเอกขนานกับแกน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดยอดรวม	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนเอก	
ความยาวแกนโท	



ตัวอย่าง 2.1.10 สมการของวงกลมวงหนึ่งบรรจบลงในวงรีที่มีสมการเป็น

$$6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y = 4$$

ได้พอดี ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 31 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 31 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
4. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

ตัวอย่าง 2.1.11 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงรี E และรัศมีเท่ากับควมยาวระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี E ถ้าสมการของวงรี E คือ

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$$

ข้อใดข้อใดต่อไปนี้ เป็นสมการของวงกลมวงนี้

1. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 10$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 20$
3. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 10$
4. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 20$

ตัวอย่าง 2.1.12 พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-1, 5)$ และโฟกัสของวงรี

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$$

เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$

2. $2\sqrt{5}$

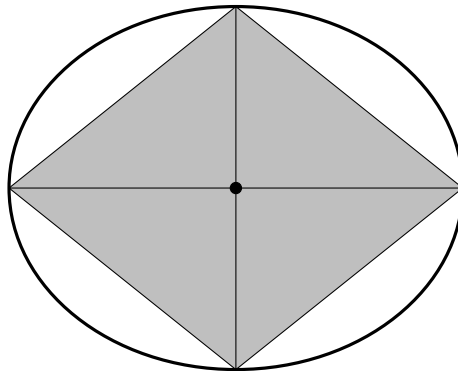
3. $3\sqrt{5}$

4. $4\sqrt{5}$

ตัวอย่าง 2.1.13 สวนแห่งหนึ่งเป็นรูปวงรีที่มีสมการเป็น

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 150y - 159 = 0$$

โดยใช้หน่วยวัดเป็นเมตร ส่วนที่แรเงาดังรูปคือสนามหญ้าจงหาพื้นที่ของสนามหญ้าของสวนแห่งนี้



ตัวอย่าง 2.1.14 จงหาสมการมาตรฐานของวงรีในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. วงรีที่มี $(1, 0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง มีความยาวแกนเอก 6 หน่วย และความยาวแกนโท 4 หน่วย

2. วงรีที่มี $(2, -3)$ และ $(2, 7)$ เป็นจุดโฟกัส และมีจุดยอดจุดหนึ่งคือ $(2, 8)$

3. วงรีที่มี $F_1(0, 4)$ และ $F_2(0, -2)$ เป็นจุดโฟกัส และ P เป็นจุดบนวงรีนี้ โดยที่ $PF_1 + PF_2 = 10$

4. วงรีที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และมี AB เป็นแกนเอก โดยที่ $A = (-3, 0)$ และ $B = (3, 0)$

ตัวอย่าง 2.1.15 สมการวงรีที่มีจุดยอดโฟกัสอยู่ที่ $(1, -1)$ และจุดยอดร่วม $(-1, 2)$ กับ $(-1, -4)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี

$$1. \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{13} = 1$$

$$2. \frac{(x+1)^2}{13} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$3. \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{13} = 1$$

$$4. \frac{(x-1)^2}{13} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

ตัวอย่าง 2.1.16 กำหนดให้ C เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $A(-3, 5)$ และ $B(5, -1)$ ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ความยาวแกนเอกเท่ากับความยาวของส่วนเส้นตรง AB และวงรีผ่านจุด $(5, \frac{1}{5})$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของวงรี

$$1. 5x^2 + 25y^2 - 10x - 100y + 56 = 0$$

$$2. 5x^2 + 25y^2 - 10x - 100y - 56 = 0$$

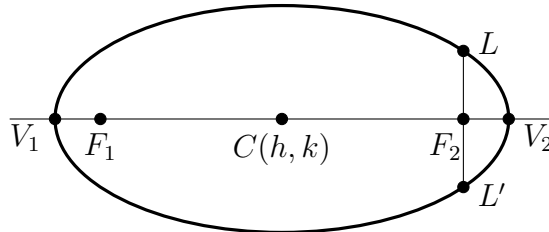
$$3. 9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$$

$$4. 9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y + 116 = 0$$

2.2 ลาดัสเลกต์ัมของวงรี

บทนิยาม 2.2.1 ส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากจุดบนวงรีที่ลากไปตัดและตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัสเรียกว่า **ลาดัสเลกต์ัม (Latus Rectum)**

พิจารณาวงรีที่มีสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ให้ $F_1 = (h-c, k)$ และ $F_2 = (h+c, k)$ ดังภาพ



จากภาพลาดัสเลกต์ัมคือ LL' ให้ $L = (h+c, d)$ ซึ่งอยู่บนวงรี จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{(h+c-h)^2}{a^2} + \frac{(d-k)^2}{b^2} &= 1 \\ b^2c^2 + a^2(d-k)^2 &= a^2b^2 \\ a^2(d-k)^2 &= a^2b^2 - b^2c^2 = b^2(a^2 - c^2) = b^2b^2 \\ a|d-k| &= b^2 \\ d &= k \pm \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L = \left(h+c, k + \frac{b^2}{a}\right)$ และ $L' = \left(h+c, k - \frac{b^2}{a}\right)$ ดังนั้นความยาวลาดัสเลกต์ัมตั้งทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 2.2.2 วงรีที่มีความยาวแกนเอกเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนโทเท่ากับ $2b$ จะมี

$$\text{ความยาวลาดัสเลกต์ัมเท่ากับ } \frac{2b^2}{a}$$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาความยาวของลาดัสเลกต์ัมของวงรีต่อไปนี้

1. $25x^2 + 9y^2 = 225$

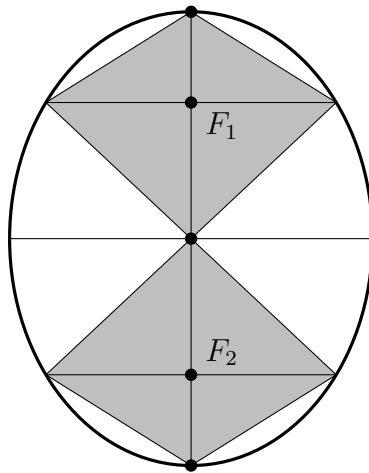
2. $4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 5$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาสมการวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(3, 1)$ และ $(-3, 1)$ โดยมีความยาวลาตัสแรกตั้งเท่ากับ 4 หน่วย

ตัวอย่าง 2.2.5 แปลงดอกไม้รูปวงรีที่มีสมการเป็น

$$25x^2 + 16y^2 - 100x + 96y - 156 = 0$$

ต้องการปลูกหญ้าในส่วนที่แรเงาดังรูป โดย F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรีดังกล่าว ถ้าหน่วยที่ใช้วัดความยาวเป็นเมตร และเสียเงินปลูกหญ้าตารางเมตรละ 20 บาท จะต้องเสียเงินปลูกหญ้าในพื้นที่แรเงาจำนวนเท่าใด



1. 320 บาท

2. 640 บาท

3. 690 บาท

4. 1,280 บาท

2.3 ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี

บทนิยาม 2.3.1 อัตราส่วนของความยาวจากจุดศูนย์กลางไปยังโฟกัสต่อความยาวจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอด เรียกว่า **ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี** (eccentricity of ellipse) เขียนแทนด้วย e ดังนี้

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{หรือ} \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาความเยื้องศูนย์กลางของวงรีของวงรีต่อไปนี้

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$

2. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 20y = 16$

ตัวอย่าง 2.3.3 ข้อใดคือความเยื้องศูนย์กลางของวงรี

1. $e = 0$

2. $e = 1$

3. $e > 1$

4. $e < 1$

2.4 ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องวงรี

ตัวอย่าง 2.4.1 พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดกำเนิด และโฟกัสของวงรี

$$x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$$

เท่ากับเท่าใด (Ent ต.ค. 2542)

ตัวอย่าง 2.4.2 ถ้า k, l และ m เป็นจำนวนจริงที่ทำให้วงรี

$$kx^2 + ly^2 - 72x - 24y + m = 0$$

มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, 3)$ และสัมผัสแกน Y แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (ANET 2550)

1. มีความยาวแกนเอก 12 หน่วย
2. มีความยาวแกนโท 8 หน่วย
3. ระยะห่างระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $4\sqrt{5}$ หน่วย
4. $(2, 6)$ เป็นจุดบนวงรี

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ r และ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $P(2, 2)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีสมการเป็น

$$\frac{(x+2)^2}{r^2} + \frac{(y-2)^2}{s^2} = 1$$

ซึ่งมีจุด F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี และ $PF_1 + PF_2 = 12$ แล้วระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (กสพท. 2561)

1. 4 หน่วย 2. 5 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย 4. $5\sqrt{5}$ หน่วย 5. $4\sqrt{5}$ หน่วย

ตัวอย่าง 2.4.4 ให้ E เป็นวงรีรูปหนึ่งที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, -2)$ และโฟกัสทั้งสองอยู่บนเส้นตรงที่ขนานแกน X ถ้า $(4, 0)$ เป็นจุดบนวงรี E และผลบวกของระยะทางจากจุด $(4, 0)$ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8 หน่วย แล้ววงรี E ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.พ. 2561)

1. $(4, 2)$ 2. $(2, 4)$ 3. $(2, -4)$ 4. $(-2, -4)$ 5. $(4, -2)$

ตัวอย่าง 2.4.5 กำหนดให้วงรี

$$4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$$

แนบในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ A, B และ C เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าจุด A มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ แล้ว วงรีนี้สัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุดใดบ้าง (สมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2562)

บทที่ 3

ไฮเพอร์โบลา (HYPERBOLA)

3.1 สมการไฮเพอร์โบลา

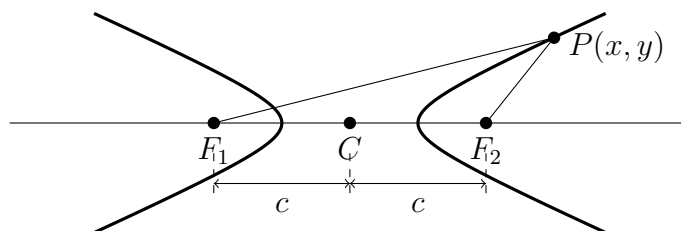
บทนิยาม 3.1.1 ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือเซตของจุดซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัว

เรียกจุดคงที่ว่า **จุดโฟกัส (focus)** ของไฮเพอร์โบลา กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างคงตัวค่าหนึ่งและมีจุดคงที่สองจุดหรือจุดโฟกัสคือ F_1 และ F_2 จะได้ว่า

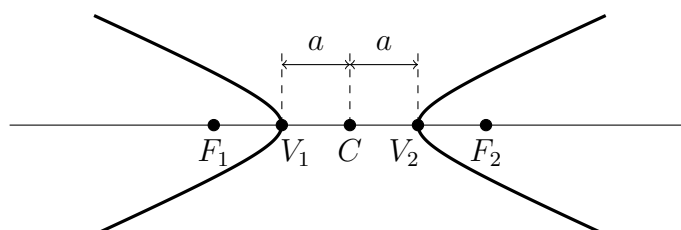
$$H = \{P(x, y) \mid |PF_1 - PF_2| = \text{ค่าคงตัว} \}$$

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองว่า **จุดศูนย์กลาง (center point)** ของวงรี เขียนแทนด้วย $C(h, k)$

กำหนดระยะจาก C ไปยัง F_1 หรือ F_2 เท่ากับ c หน่วย แสดงได้ดังภาพ



กรณีที่จุด P อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสจะเรียกว่า **จุดยอดของไฮเพอร์โบลา (vertex of hyperbola)** เขียนแทนด้วย V_1 และ V_2 กำหนดระยะจาก C ไปยัง V_1 หรือ V_2 เท่ากับ a หน่วย เรียก V_1V_2 ว่า **แกนตามขวาง (major axis)** ของไฮเพอร์โบลา นั่นคือความยาวแกนตามขวางเท่ากับ $2a$ หน่วย แสดงได้ดังภาพ



$$\text{ผลบวกคงตัว} = |V_2F_1 - V_2F_2| = |(CF_1 + CV_2) - (CF_2 - CV_2)| = |(c + a) - (c - a)| = 2a$$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(-25, 0)$ และจุด B มีพิกัดเป็น $(25, 0)$ ถ้า

S คือเซตของจุด P ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $|PA - PB| = 10$

T คือเซตของจุด Q ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $QA + QB = 70$

และรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีจุดยอดทั้งหมดอยู่ในเซต $S \cap T$ แล้วเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมรูปนี้ยาวกี่หน่วย (กสพท. 2565)

1. 62

2. 70

3. 76

4. 124

5. 140

พิจารณากรณีที่ F_1F_2 ขนานแกน X จะได้ว่า $F_1 = (h - c, k)$ และ $F_2 = (h + c, k)$ โดยที่ $P(x, y)$ เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$$(PF_1)^2 = [(x - h) + c]^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2(x - h)c + c^2 + (y - k)^2$$

$$(PF_2)^2 = [(x - h) - c]^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 - 2(x - h)c + c^2 + (y - k)^2$$

$$(PF_1)^2 + (PF_2)^2 = 2(x - h)^2 + 2c^2 + 2(y - k)^2$$

$$(PF_1)^2(PF_2)^2 = [(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2]^2 - 4c^2(x - h)^2$$

ดังนั้น

$$|PF_1 - PF_2|^2 = (2a)^2$$

$$(PF_1)^2 - 2(PF_1)(PF_2) + (PF_2)^2 = 4a^2$$

$$(PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 4a^2 = 2(PF_1)(PF_2)$$

$$2(x - h)^2 + 2c^2 + 2(y - k)^2 - 4a^2 = 2(PF_1)(PF_2)$$

$$[(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2 - 2a^2]^2 = (PF_1)^2(PF_2)^2$$

$$[(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2]^2 - 4a^2[(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2] + 4a^4 = [(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2]^2 - 4c^2(x - h)^2$$

$$-4a^2[(x - h)^2 + c^2 + (y - k)^2] + 4a^4 = -4c^2(x - h)^2$$

$$c^2(x - h)^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{c^2 - a^2} = 1$$

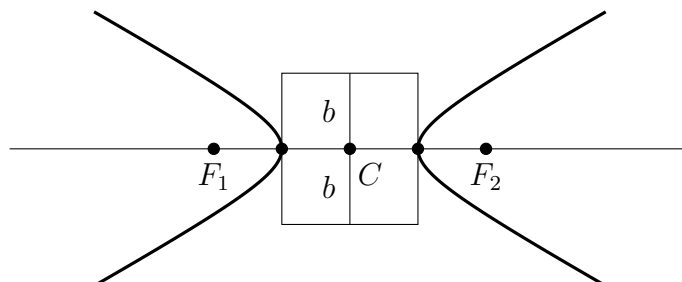
จะเห็นว่า $c > a > 0$ กำหนดให้ $b^2 = c^2 - a^2$ โดยที่ $b > 0$ จะได้สมการของไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

โดยเรียกว่า **สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา** (standard equation of hyperbola) เมื่อแกนตามขวางขนานกับแกน X ในทำนองเดียวกันเมื่อแกนตามขวางขนานกับแกน Y จะได้สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาอยู่ในรูป

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

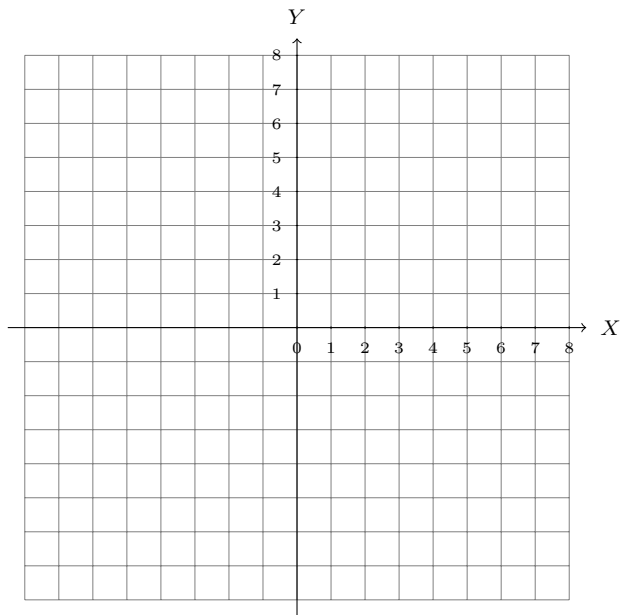
กำหนดส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางโดยมีจุดศูนย์กลางเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรงนั้น เรียกว่า **แกนสังยุค** (minor axis) ของไฮเพอร์โบลา นั่นคือความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$ หน่วย แสดงได้ดังภาพ



ตัวอย่าง 3.1.3 จงวาดกราฟของของวงรีที่มีสมการต่อไปนี้และเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

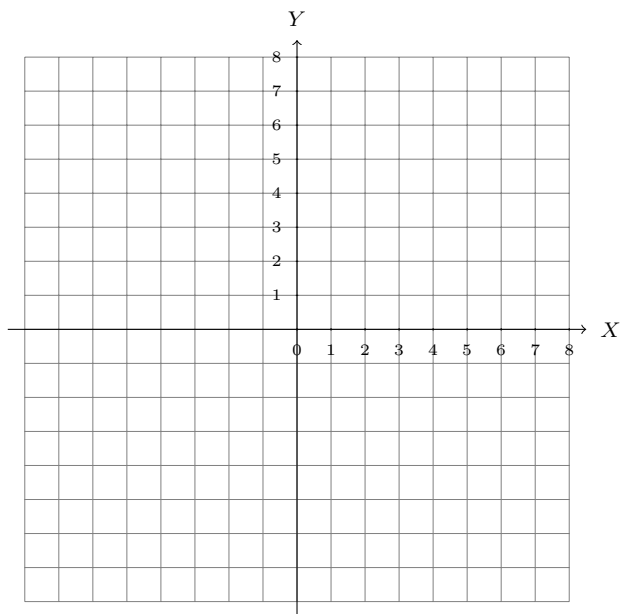
1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

แกนตามขวางขนาน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนตามขวาง	
ความยาวแกนตั้งยู่ค	



2. $\frac{(y + 1)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{16} = 1$

แกนตามขวางขนาน	
จุดศูนย์กลาง	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
ความยาวแกนตามขวาง	
ความยาวแกนตั้งยู่ค	



ตัวอย่าง 3.1.4 กำหนดให้ วงรี E และไฮเพอร์โบลา H มีโฟกัสร่วมกันคือ $(0, 0)$ และ $(6, 0)$ และระยะทางระหว่างจุดตัดใด ๆ ของ E และ H กับจุดโฟกัสทั้งสองคือ 6 หน่วยและ 2 หน่วย สมการของวงรีและสมการของไฮเพอร์โบลาตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้ (กสพท. 2563)

$$1. \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \text{ และ } \frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$2. \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \text{ และ } \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

$$3. \frac{(x-3)^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ และ } \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

$$4. \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ และ } \frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$5. \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ และ } \frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$$

จากสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

พิจารณากรณีแกนตามขวางขนานแกน X จะได้ว่า

$$\begin{aligned} b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 &= a^2b^2 \\ b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2) &= a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + (b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2) &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $A = b^2$, $B = -a^2$, $C = -2b^2h$, $D = 2a^2k$ และ $E = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$ จะได้ว่าสมการในรูป

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

เรียกว่า **สมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลา** (general equation of hyperbola) และผลที่ได้ตามมาคือ

ทฤษฎีบท 3.1.5 สมการ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เป็นสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลา ก็ต่อเมื่อ A และ B เครื่องหมายตรงข้าม และ

$$A \left(\frac{C}{2A} \right)^2 + B \left(\frac{D}{2B} \right)^2 - E \neq 0$$

โดยมีศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B} \right)$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์

สมการ	เป็นสมการของไฮเพอร์โบลาหรือไม่	จุดศูนย์กลาง
$x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$		
$x^2 - 4y^2 - 2x - 8y + 3 = 0$		
$3y^2 - 2x^2 - 4x + 6y + 1 = 0$		
$5y^2 - 3x^2 + 12x - 10y - 7 = 0$		
$7x^2 - 9y^2 + 28x - 18y = 65$		

ตัวอย่าง 3.1.7 ถ้าไฮเพอร์โบลา H มีสมการเป็น

$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 80 = 0$$

แล้ววงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของ H และมีแกนโทคือแกนสังยุคของ H มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $16x^2 - 64x + 25y^2 - 464 = 0$

3. $25x^2 - 100x + 26y^2 - 464 = 0$

2. $16x^2 - 64x + 25y^2 - 336 = 0$

4. $25x^2 - 100x + 26y^2 - 336 = 0$

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาผลบวกของระยะทางจากจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

ไปยังเส้นตรง $3x + 4y - 8 = 0$ มีค่าเท่าใด

ตัวอย่าง 3.1.9 กำหนดสมการวงรีและสมการไฮเพอร์โบลา คือ

$$2x^2 + 11y^2 + 4x - 44y + 24 = 0 \quad \text{และ} \quad 2x^2 - 7y^2 - 4x + 28y - 40 = 0$$

ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. กราฟทั้งสองสมการมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน
2. กราฟทั้งสองสมการตัดกัน 4 จุด
3. ความยาวแกนเอกของวงรีเท่ากับความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา
4. กราฟทั้งสองสมการมีความยาวระหว่างโฟกัสเท่ากัน

ตัวอย่าง 3.1.10 ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า โดย A เป็นจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = a^2$ จุด B และ C อยู่บนไฮเพอร์โบลาคี่อีกซีกหนึ่ง พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}a^2$
2. $3\sqrt{3}a^2$
3. $4\sqrt{3}a^2$
4. $12\sqrt{3}a^2$

ตัวอย่าง 3.1.11 จงหาสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

- ไฮเพอร์โบลาที่มี $(1, -1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง มีความยาวแกนตามขวาง 4 หน่วย และความยาวแกนสังยุค 2 หน่วย
- ไฮเพอร์โบลาที่มี $F_1(5, -9)$ และ $F_2(5, 1)$ เป็นจุดโฟกัส และ $|PF_1 - PF_2| = 8$ เมื่อ P เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลานี้

3. ไฮเพอร์โบลาที่มี $(-3, 1)$ และ $(3, 1)$ เป็นจุดยอด และผ่านจุด $(5, 5)$

4. ไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และมีแกนสังยุคและแกนตามขวางคือเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 4$

ตัวอย่าง 3.1.12 ถ้า E เป็นวงรีที่มีสมการเป็น

$$6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$$

และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของ E และความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา H

1. $x^2 - 5y^2 - 2x - 20y + 14 = 0$
2. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 14 = 0$
3. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 18 = 0$
4. $5x^2 - y^2 - 2x + 20y + 18 = 0$

ตัวอย่าง 3.1.13 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 1)$ โดยมีอัตราส่วนของระยะครึ่งแกนตามขวางต่อระยะครึ่งแกนสังยุค $2 : 3$ มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $81x^2 - 36y^2 + 486x + 72y + 2223 = 0$
2. $36y^2 - 81x^2 - 72y - 468x - 2223 = 0$
3. $50x^2 - 117y^2 + 300x + 234y - 5517 = 0$
4. $117y^2 - 50x^2 + 234y + 300x - 5517 = 0$

ตัวอย่าง 3.1.14 ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตั้งอยู่บนเส้นตรง $x = 1$ และมีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 2)$ ถ้า H ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรีซึ่งมีสมการเป็น $5x^2 - 30x + 9y^2 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.พ. 2561)

1. $4x^2 - 3y^2 - 8x - 12y - 12 = 0$
2. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y - 13 = 0$
3. $4x^2 - 3y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$
4. $3x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 17 = 0$
5. $3x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 17 = 0$

ตัวอย่าง 3.1.15 ถ้าไฮเพอร์โบลา H มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางวงรี

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$

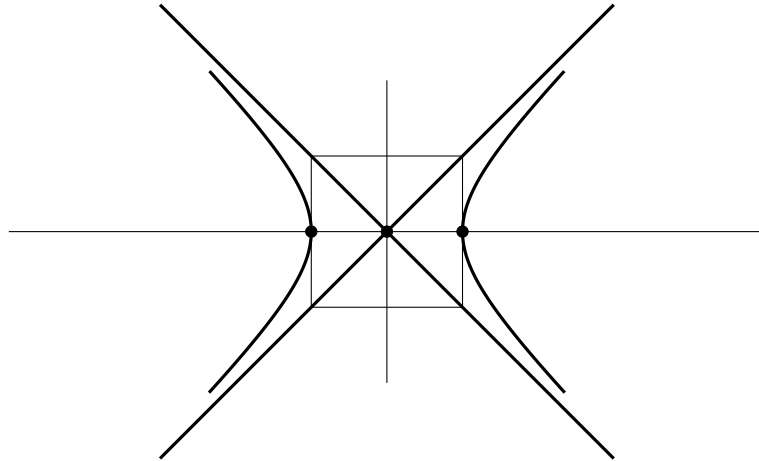
จุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีนี้ และผ่านจุด $(5, 5)$ แล้วโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา H คือข้อใดต่อไปนี้ (Ent 2/2545)

- | | |
|--|--|
| 1. $(1 - \frac{7}{\sqrt{11}}, 2)$ และ $(1 + \frac{7}{\sqrt{11}}, 2)$ | 3. $(1 - \frac{9}{\sqrt{11}}, 2)$ และ $(1 + \frac{9}{\sqrt{11}}, 2)$ |
| 2. $(1 - \frac{8}{\sqrt{11}}, 2)$ และ $(1 + \frac{8}{\sqrt{11}}, 2)$ | 4. $(1 - \frac{10}{\sqrt{11}}, 2)$ และ $(1 + \frac{10}{\sqrt{11}}, 2)$ |

3.2 เส้นกำกับ

บทนิยาม 3.2.1 เส้นกำกับ (Asymtote) ของไฮเพอร์โบลา คือเส้นตรงที่ใกล้กับไฮเพอร์โบลามากที่สุด แต่ไม่ตัดกราฟไฮเพอร์โบลา

เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่สมการเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ คือเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง (h, k) และมีความชันเท่ากับ $\pm \frac{b}{a}$ ดังกราฟ



จากรูปสมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{b}{a}(x-h) + k$ สำหรับไฮเพอร์โบลาที่แกนตามขวางขนานแกน Y มีสมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{a}{b}(x-h) + k$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

สมการไฮเพอร์โบลา	จุดศูนย์กลาง (h, k)	a	b	สมการเส้นกำกับ
$x^2 - y^2 = 1$				
$4y^2 - x^2 = 4$				
$9y^2 - 4x^2 = 36$				
$x^2 - 9y^2 - 2x = 8$				
$x^2 - 16y^2 + 2x - 32y = 31$				

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มี $y = x+1$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่ง มี $(-2, 1)$ และ $(2, 1)$ เป็นจุดยอด

ตัวอย่าง 3.2.4 ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-7, 1)$ และ $(5, 1)$ ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานอนกับเส้นตรง $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ แล้วสมการไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้ (กสพท 2559)

$$1. \frac{(x+1)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

$$2. \frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$$

$$3. \frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$$

$$4. (x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

$$5. (x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$$

ตัวอย่าง 3.2.5 กำหนดให้ไฮเพอร์โบลา H มีสมการ

$$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$$

ถ้าจุด $A(6, k)$ เมื่อ $k > 0$ เป็นจุดบนเส้นกำกับของ H และ F_1, F_2 เป็นโฟกัสของ H แล้วพื้นที่รูปสามเหลี่ยม AF_1F_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ANET 2549)

1. $\frac{32}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{45}{2}$ ตารางหน่วย
3. 30 ตารางหน่วย
4. 40 ตารางหน่วย

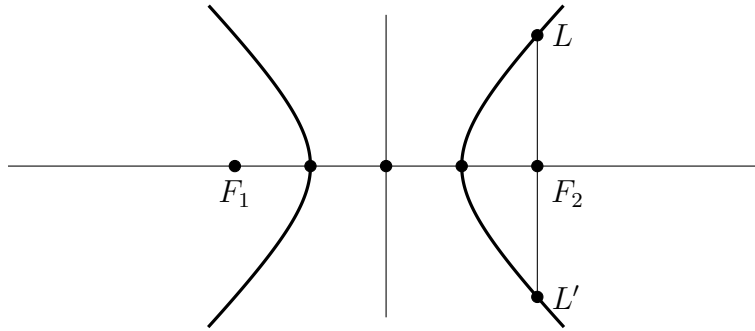
ตัวอย่าง 3.2.6 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, 0)$ เส้นกำกับเส้นหนึ่งมีสมการเป็น $2x - y = 0$ ไฮเพอร์โบลานี้ผ่านจุดใดต่อไปนี้

1. $(-2, 1)$
2. $(-2, 2\sqrt{3})$
3. $(-3, \sqrt{2})$
4. $(-3, 2)$

3.3 ลาดัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลา

บทนิยาม 3.3.1 ส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากจุดบนไฮเพอร์โบลาที่ลากไปตัดและตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดโฟกัส เรียกว่า ลาดัสเรกตัม (Latus Rectum)

พิจารณาไฮเพอร์โบลาที่มีสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ให้ $F_1 = (h-c, k)$ และ $F_2 = (h+c, k)$
ดังภาพ



จากภาพลาดัสเรกตัมคือ LL' ให้ $L = (h+c, d)$ ซึ่งอยู่บนไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$$\frac{(h+c-h)^2}{a^2} - \frac{(d-k)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2c^2 - a^2(d-k)^2 = a^2b^2$$

$$a^2(d-k)^2 = b^2c^2 - a^2b^2 = b^2(c^2 - a^2) = b^2b^2$$

$$a|d-k| = b^2$$

$$d = k \pm \frac{b^2}{a}$$

ดังนั้น $L = \left(h+c, k + \frac{b^2}{a}\right)$ และ $L' = \left(h+c, k - \frac{b^2}{a}\right)$ ดังนั้นความยาวลาดัสเรกตัมดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.2 ไฮเพอร์โบลาที่มีความยาวแกนตามขวางเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$ จะมี

$$\text{ความยาวลาดัสเรกตัมเท่ากับ } \frac{2b^2}{a}$$

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาความยาวของลาดัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

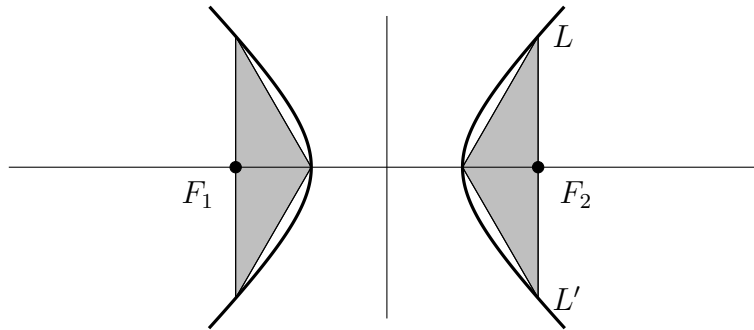
1. $16x^2 - 9y^2 = 144$

2. $4x^2 - 25y^2 + 16x = 84$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาสมการไฮเพอร์โบล่าที่มี $(2, 3)$ และ $(2, -5)$ เป็นจุดยอด โดยมีความยาวลาดัสเรกตัม 2 หน่วย

ตัวอย่าง 3.3.5 จงหาพื้นที่ที่แรเงาของกราฟไฮเพอร์โบล่าที่กำหนดให้ เมื่อ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัส และมีสมการคือ

$$7x^2 - 9y^2 - 14x - 36y - 92 = 0$$



3.4 ความเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา

บทนิยาม 3.4.1 อัตราส่วนของความยาวจากจุดศูนย์กลางไปยังโฟกัสต่อความยาวจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอด เรียกว่า ความเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา (eccentricity of hyperbola) เขียนแทนด้วย e ดังนี้

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{หรือ} \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาความเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาของวงรีต่อไปนี้

1. $9x^2 - 16y^2 = 144$

2. $4x^2 - 5y^2 + 8x - 10y = 21$

ตัวอย่าง 3.4.3 ข้อใดคือความเยื้องศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา

1. $e = 0$

2. $e = 1$

3. $e > 1$

4. $e < 1$

3.5 ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 3.5.1 กำหนดให้ F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งซึ่งมีสมการเป็น

$$5x^2 - 4y^2 - 10x - 16y = 31$$

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้วงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ มี $\overline{F_1F_2}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางแล้ว $a^2 + b^2 + c^2$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบที่ถูกต้อง (PAT1 ก.พ. 2563)

ตัวอย่าง 3.5.2 กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 - 3y^2 - 3 = 0$$

และ F เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H ที่อยู่ทางขวาของจุด $(0, 0)$ ให้ E เป็นวงรีที่จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ F โดยที่จุด $(0, 0)$ และจุด F อยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์กลางของวงรี E ถ้าผลต่างของความยาวแกนเอกและความยาวแกนโทเท่ากับ 2 แล้วความเยื้องศูนย์กลางของวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.พ. 2562)

1. 0.2

2. 0.3

3. 0.4

4. 0.5

5. 0.6

ตัวอย่าง 3.5.3 ถ้า

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey = 21$$

เป็นสมการของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีแกนตามขวางขนานกับแกน x มีเส้นตรง $2x - y + 1 = 0$ เป็นเส้นกำกับ (asymtote) เส้นหนึ่ง และมีจุด $(1 + 2\sqrt{5}, 3)$ เป็นจุดโฟกัสจุดหนึ่ง แล้วค่าของ $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$ มีค่าเท่าใด (PAT1 ต.ค. 2558)

ตัวอย่าง 3.5.4 ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$x^2 + y^2 - 2ky = 0$$

เมื่อ $k > 0$ ให้ T เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-5, 4)$ และสัมผัสวงกลมที่จุด B โดยที่ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ 1 หน่วย ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C แกนตั้งยุคเท่ากับ $2k$ และขนานแกน x และเส้นกำกับเส้นหนึ่งผ่านจุด A และจุด C แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 มี.ค. 2560)

1. $x^2 - 25y^2 + 250y - 600 = 0$

2. $x^2 - 25y^2 - 250y + 624 = 0$

3. $x^2 - 25y^2 - 250y + 650 = 0$

4. $25x^2 - y^2 + 10y + 50 = 0$

5. $25x^2 - y^2 + 10y - 50 = 0$

ตัวอย่าง 3.5.5 ให้ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A เส้นตรง $3x + 4y = 35$ สัมผัสวงกลมที่จุด $(5, 5)$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีแกนตามขวางขนานกับแกน y มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางกับโฟกัสจุดหนึ่งเป็นสองเท่าของรัศมีวงกลม C และเส้นตรง $3x - 4y = 2$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่ง แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 มี.ค. 2559)

1. $9x^2 - 16y^2 + 32x + 36y + 596 = 0$

2. $9x^2 - 16y^2 - 32x - 36y + 596 = 0$

3. $9x^2 - 16y^2 + 32x + 36y - 596 = 0$

4. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y + 596 = 0$

5. $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 596 = 0$

บทที่ 4

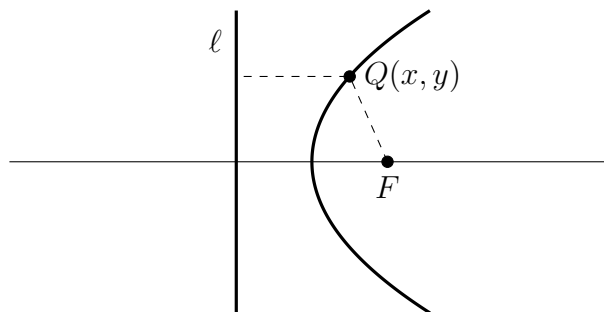
พาราโบลา (PARABOLA)

4.1 สมการพาราโบลา

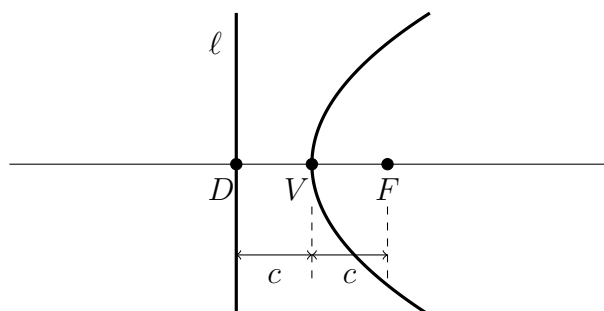
บทนิยาม 4.1.1 พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดซึ่งจุดอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเท่ากับระยะที่อยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง

เรียกจุดคงที่ว่า **จุดโฟกัส (focus)** และเส้นตรงคงที่ว่า **เส้นไดเรกทริกซ์ (directrix)** ของพาราโบลา กำหนดให้ P เป็นพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสคือ F และมีเส้นไดเรกทริก ℓ จะได้ว่า

$$P = \{Q(x, y) \mid QF = d(Q, \ell)\}$$

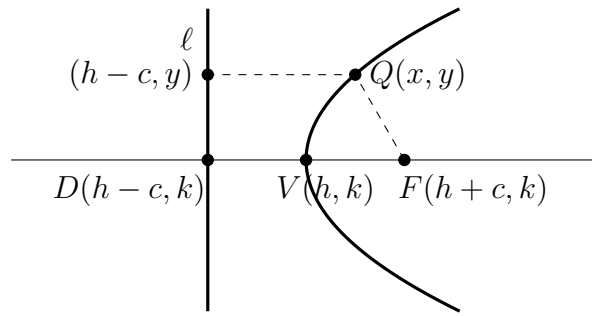


เมื่อลากเส้นตรงจากจุด F ไปตัดตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ ℓ ที่จุด D จะได้ว่าจุดกึ่งกลางระหว่าง F กับ D อยู่บนพาราโบลา P เรียกว่า **จุดยอด (vertex)** ของพาราโบลา เขียนแทนด้วย $V(h, k)$ กำหนดระยะจาก V ไปยัง F หรือ D เท่ากับ c หน่วย แสดงได้ดังภาพ



เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด V และ F ว่าแกนสมมาตรของพาราโบลา

พิจารณากรณีแกนสมมาตรขนานกับกับ x พาราโบลาเปิดขวากำหนดให้ $Q(x, y)$ อยู่บนพาราโบลา P ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $V(h, k)$ แล้ว $F(h + c, k)$ และ $D(h - c, k)$ โดยมี $x = h - c$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์ ดังภาพ



จาก $QF = d(Q, l)$ จะได้ว่า

$$\sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} = \sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

$$[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2 = [(x - h) + c]^2$$

$$(x - h)^2 - 2c(x - h) + c^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2c(x - h) + c^2$$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

เรียกสมการที่ได้ว่า **สมการมาตรฐานของพาราโบลา** (standard equation of parabola) ในทำนองเดียวกันเราจะจะมีสมการมาตรฐานของพาราโบลาได้ 4 แบบ ดังนี้

สมการมาตรฐาน	ลักษณะพาราโบลา	จุดยอด	จุดโฟกัส	เส้นไดเรกทริกซ์
$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	พาราโบลาเปิดขวา (right open)	(h, k)	$(h + c, k)$	$x = h - c$
$(y - k)^2 = -4c(x - h)$	พาราโบลาเปิดซ้าย (left open)	(h, k)	$(h - c, k)$	$x = h + c$
$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	พาราโบลาหงาย (upward)	(h, k)	$(h, k + c)$	$y = k - c$
$(x - h)^2 = -4c(y - k)$	พาราโบลาคคว่ำ (downward)	(h, k)	$(h, k - c)$	$y = k + c$

ตัวอย่าง 4.1.2 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(5, -1)$ จุดยอดอยู่บนเส้นตรง $y = \frac{x}{2}$ เส้นไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน x แล้วสมการเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา คือสมการในข้อใด

1. $y = 7$

2. $y = \frac{7}{2}$

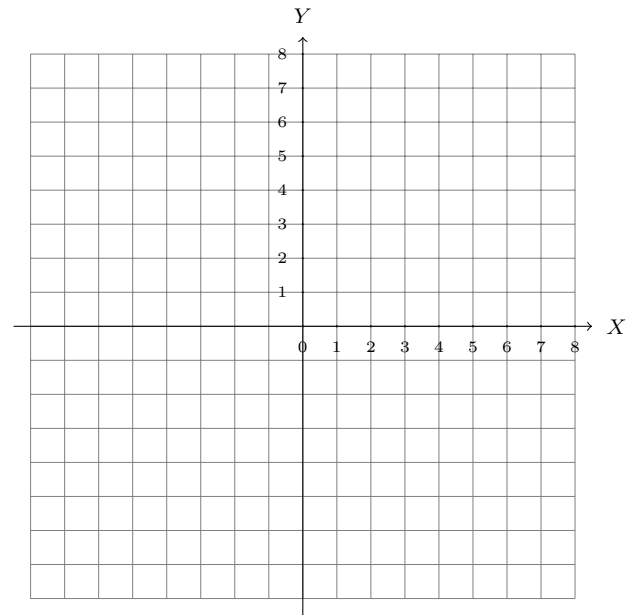
3. $y = \frac{5}{2}$

4. $y = 6$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงวาดกราฟของของวงรีที่มีสมการต่อไปนี้และเติมค่าในช่องว่างให้สมบูรณ์

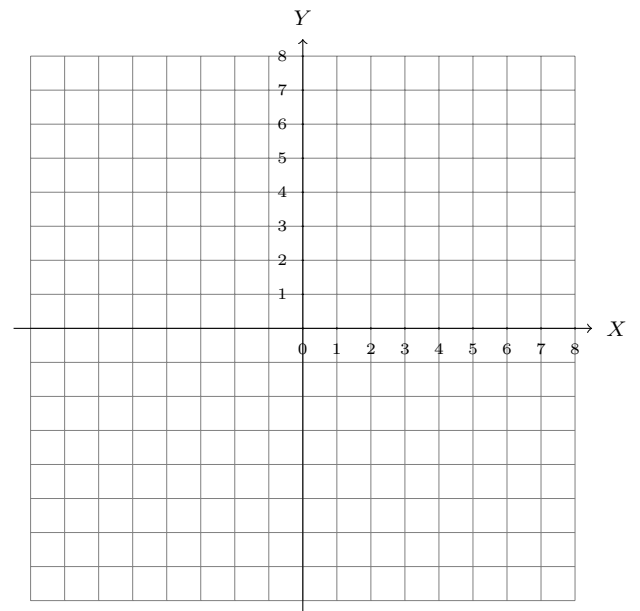
1. $y^2 = 4x$

ลักษณะพาราโบลา	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
สมการเส้นไดเรกทริกซ์	



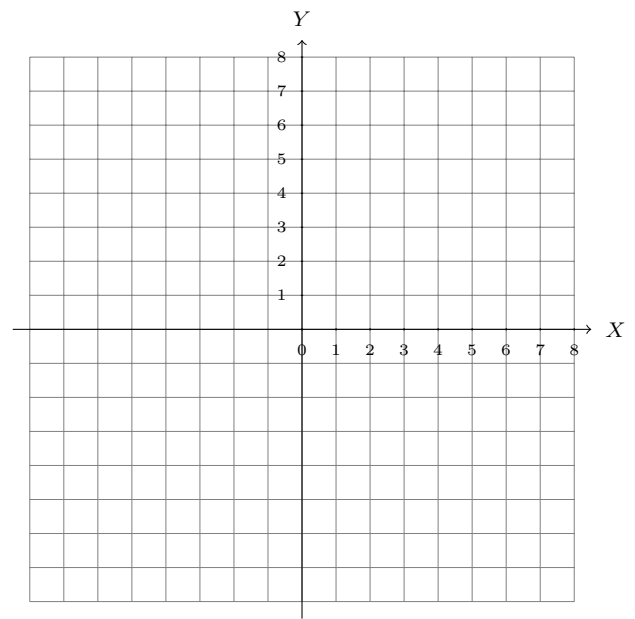
2. $(y - 1)^2 = -8x$

ลักษณะพาราโบลา	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
สมการเส้นไดเรกทริกซ์	



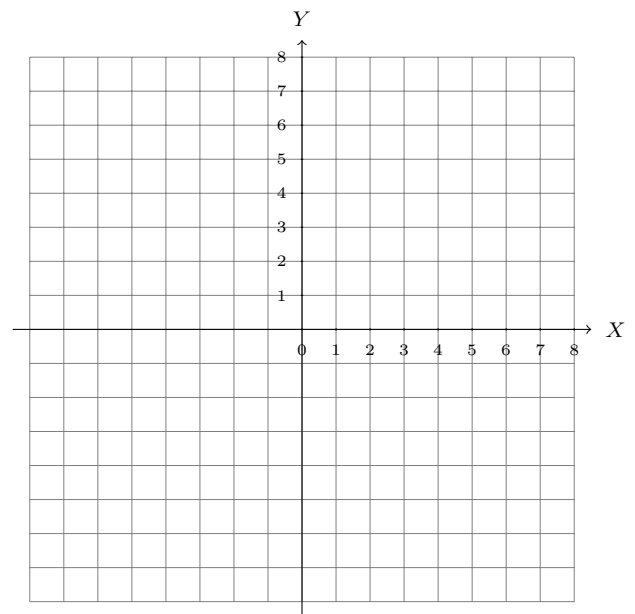
3. $x^2 = 8(y + 1)$

ลักษณะพาราโบลา	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
สมการเส้นไดเรกทริกซ์	



4. $(x - 1)^2 = -12(y - 2)$

ลักษณะพาราโบลา	
จุดยอด	
จุดโฟกัส	
สมการเส้นไดเรกทริกซ์	



ตัวอย่าง 4.1.4 วงกลมวงหนึ่งสัมผัสเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $y^2 = 2x$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัสของพาราโบลานี้ จุดที่วงกลมตัดกับพาราโบลาคือจุดใดต่อไปนี้

1. $(0, 0)$

3. $(1, -\sqrt{2})$ และ $(1, \sqrt{2})$

2. $(\frac{1}{2}, -1)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$

4. $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ และ $(\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$

ตัวอย่าง 4.1.5 พาราโบลามีเส้นไดเรกทริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดของวงกลม

$$x^2 + y^2 = 12 \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$$

และมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-1, 4)$ สมการพาราโบลาคือข้อใด

1. $(y - 4)^2 = -6(x - \frac{1}{2})$

3. $(y - 4) = 6(x + 1)^2$

2. $(y - 4)^2 = 12(x + 1)$

4. $(y - 4) = 12(x + 1)^2$

ตัวอย่าง 4.1.6 กำหนดให้ไฮเพอร์โบลา

$$16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 103 = 0$$

ให้ F เป็นจุดโฟกัสที่อยู่จุดภาคที่ 2 และ C เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้ สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ C และโฟกัสอยู่ที่จุด F คือข้อใด (กสพท 2564)

1. $(x + 4)^2 = -12(y - 1)$
2. $(x + 4)^2 = -20(y - 1)$
3. $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$
4. $(y - 1)^2 = -16(x + 4)$
5. $(y - 1)^2 = -20(x + 4)$

จากสมการมาตรฐานของพาราโบลา

$$(y - k)^2 = \pm 4c(x - h) \quad \text{หรือ} \quad (x - h)^2 = \pm 4c(y - k)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$y^2 + Ay + Bx + C = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 + Ax + By + C = 0$$

เรียกว่า **สมการทั่วไปของพาราโบลา** (general equation of parabola)

ตัวอย่าง 4.1.7 จงเขียนสมการพาราโบลาดังต่อไปนี้ในรูปสมการมาตรฐาน พร้อมบอกจุดยอด จุดโฟกัส และสมการไดเรกทริกซ์

1. $x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

3. $y^2 + 2y = 16x + 31$

2. $y^2 + 4y = -8x + 12$

4. $y = x^2 + 4x - 6$

ตัวอย่าง 4.1.8 สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา

$$x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$

และผ่านจุดซึ่งแบ่งครึ่งเส้นตรงที่ลากจากจุด $(-4, 3)$ มายังโฟกัสของพาราโบลา คือสมการใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 12 = 0$

ตัวอย่าง 4.1.9 ถ้า A คือจุดบนวงกลม

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$$

ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดโฟกัส F ของพาราโบลา $x^2 - 12x + 4y + 52 = 0$ มากที่สุด แล้วระยะทางระหว่าง A กับ F มีค่าเท่าใด (Ent 2/2542)

1. $7\sqrt{2}$

3. $7\sqrt{2} - 2$

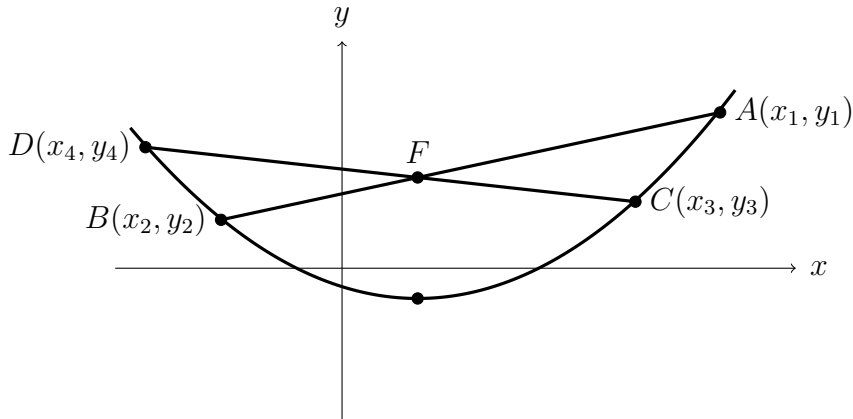
2. $8\sqrt{2}$

4. $8\sqrt{2} - 2$

ตัวอย่าง 4.1.10 จากรูปที่กำหนดให้สมการพาราโบลาคือ

$$x^2 - 10x - 32y - 39 = 0$$

มี F เป็นจุดโฟกัส ส่วนของเส้นตรง l_1 ผ่านจุด F มีจุดปลายที่ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ ส่วนของเส้นตรง l_2 ผ่านจุด F มีจุดปลายที่ $C(x_3, y_3)$ และ $D(x_4, y_4)$ ผลบวกของความยาวของส่วนเส้นตรง l_1 กับ l_2 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 40$ หน่วย
2. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 8$ หน่วย
3. $\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2} + 40$ หน่วย
4. $\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2} + 8$ หน่วย

ตัวอย่าง 4.1.11 จงหาสมการมาตรฐานของพาราโบลาต่อไปนี้

1. พาราโบลาที่มี $(1, 2)$ เป็นจุดยอด และ $(1, 5)$ เป็นจุดโฟกัส
2. พาราโบลาที่มี $(-1, 3)$ เป็นจุดยอด และ $x = -3$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์
3. พาราโบลาที่มีจุดยอดและจุดโฟกัสเป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรง AB โดยที่ $A = (2, 0)$ และ $B = (2, -3)$ และ $y = 3$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์

ตัวอย่าง 4.1.12 ให้ C เป็นวงกลม

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมี r แล้วสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และ $x = r$ เป็นสมการใด-
เรกทริกซ์คือข้อใด (Ent 1/2543)

1. $y^2 - 4y + 20x - 16 = 0$

3. $y^2 - 4y + 16x - 12 = 0$

2. $y^2 + 4y - 16x - 12 = 0$

4. $y^2 - 4y + 16x - 14 = 0$

ตัวอย่าง 4.1.13 ถ้า F เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา

$$6x^2 - 10y^2 - 12x - 40y - 94 = 0$$

อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้วสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ F และแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาเป็นเส้นใดเรกทริกซ์
คือสมการใด

1. $y^2 + 4y - 4x - 9 = 0$

3. $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

2. $y^2 + 4y - 4x + 24 = 0$

4. $y^2 + 4y - 16x + 84 = 0$

ตัวอย่าง 4.1.14 สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -1)$ และผ่านจุดโฟกัสของวงรี

$$3x^2 + 4y^2 - 16y + 4 = 0$$

ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี (Ent 2/2541)

1. $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1)$

2. $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

3. $(\frac{1}{2}, 0)$

4. $(\frac{1}{3}, 0)$

ตัวอย่าง 4.1.15 เสาไฟสองต้นสูง 30 เมตร อยู่ห่างกัน 100 เมตร สายไฟฟ้าอยู่ระหว่างเสาทั้งสองต้นนี้หย่อน มีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาสูงจากพื้นดิน 20 เมตร ณ จุดตรงกลางระหว่างเสาทั้งสองต้นนี้ จงหาว่าสายไฟ้านสูงจากพื้นดินกี่เมตร ณ จุดที่ห่างจากเสา 10 เมตร

ตัวอย่าง 4.1.16 ให้พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่บนเส้นตรงที่มีสมการ $2y = 3x$ และมี $y = 3$ เป็นแกนสมมาตร ถ้าพาราโบลาผ่านจุด $(3, 5)$ แล้วสมการพาราโบลานี้ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ก.พ. 2563)

1. $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

4. $y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$

2. $y^2 - 4x + 6y - 43 = 0$

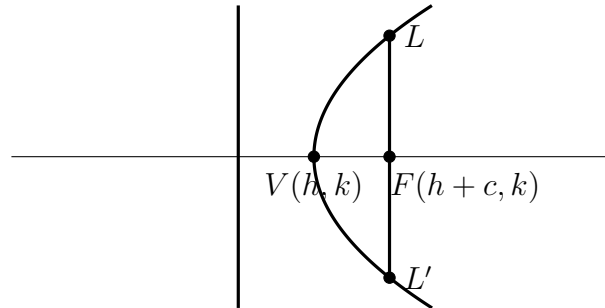
5. $y^2 - 6x + 4y - 27 = 0$

3. $y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

4.2 ลาดัสเรกตัมของพาราโบลา

บทนิยาม 4.2.1 ส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากจุดบนพาราโบลาที่ลากไปตัดและตั้งฉากกับแกนสมมาตรที่จุดโฟกัส เรียกว่า **ลาดัสเรกตัม** (Latus Rectum)

พิจารณาพาราโบลาที่มีสมการ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ จะได้ $F = (h + c, k)$ ดังภาพ



จากภาพลาดัสเรกตัมคือ LL' ให้ $L = (h + c, d)$ ซึ่งอยู่บนพาราโบลา จะได้ว่า

$$(d - k)^2 = 4c(h + c - h)$$

$$(d - k)^2 = 4c^2$$

$$|d - k| = 2c$$

$$d = k \pm 2c$$

ดังนั้น $L = (h + c, k + 2c)$ และ $L' = (h + c, k - 2c)$ ดังนั้นความยาวลาดัสเรกตัมดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.2 พาราโบลาที่มีระยะจากจุดยอดกับจุดโฟกัสเท่ากับ c หน่วย จะมี

$$\text{ความยาวลาดัสเรกตัมเท่ากับ } 4c$$

ตัวอย่าง 4.2.3 จงหาความยาวของลาดัสเรกตัมของพาราโบลาต่อไปนี้

1. $y = 4x^2 + 4$

2. $y^2 - 2y + 8x = 15$

4.3 ตัวอย่างข้อสอบแข่งขันเรื่องพาราโบลา

ตัวอย่าง 4.3.1 ให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่งที่มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4$ และสมการของแกนสมมาตรคือ $y = 3$ ถ้า P มีเส้นไดเรกทริกซ์เป็นเส้นตรงเดียวกับเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา

$$y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$$

แล้วพาราโบลา P ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี (PAT1 มี.ค. 2560)

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| 1. $(-7, 1)$ | 3. $(1, -1)$ | 5. $(4, -5)$ |
| 2. $(-4, 0)$ | 4. $(2, -4)$ | |

ตัวอย่าง 4.3.2 กำหนดให้พาราโบลามีโฟกัสอยู่ที่ $(8, 1)$ และ $x = 10$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์ ให้ P_1 และ P_2 เป็นจุดตัดของพาราโบลากับแกน y ถ้า E เป็นวงรีที่ผ่านจุด $(8, 1)$ และมีโฟกัสอยู่ที่จุด P_1 และ P_2 แล้วความยาวแกนเอกของวงรี E เท่ากับเท่าใด (PAT1 มี.ค. 2564)

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 10 | 2. 10 | 3. 16 | 4. 20 | 5. 22 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้พาราโบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น

$$y^2 - 4y + 40x - 236 = 0$$

โดย V และ F เป็นจุดยอดและจุดโฟกัสของพาราโบลาตามลำดับ ถ้าวงรีรูปหนึ่งผ่านจุด (4, 6) และมีโฟกัสอยู่ที่ V และ F แล้วสมการของวงรีรูปนี้ตรงกับข้อใด (PAT1 ต.ค. 2558)

1. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 140 = 0$

4. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y - 180 = 0$

2. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y - 140 = 0$

5. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 180 = 0$

3. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$

ตัวอย่าง 4.3.4 กำหนดให้ P เป็นพาราโบลาที่มีสมการเป็น $y = ax^2 + bx + 5$ เมื่อ $a > 0$ และ $b < 0$ ถ้าระยะทางระหว่างโฟกัสกับจุดยอดของ P เท่ากับ $\frac{1}{2}$ หน่วย และเส้นตรง $2x - y - 3 = 0$ สัมผัสกับ P ที่จุด C แล้วระยะทางระหว่างจุดยอด P และจุด C ตรงกับข้อใด (PAT1 ต.ค. 2559)

1. $\sqrt{2}$

2. $\sqrt{5}$

3. $\sqrt{6}$

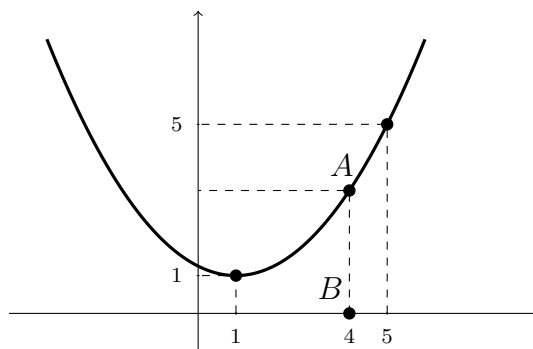
4. $\sqrt{8}$

5. $\sqrt{13}$

บทที่ 5

แบบฝึกหัดระคน

1. จากกราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ ความยาวของ AB เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



ก. 3.00

ข. 3.25

ค. 3.50

ง. 3.75

2. โลกและดาวหางสเมอร์เลย์โคจรเข้าหากันเป็นสมการที่มีกราฟไฮเพอร์โบลาซึ่งความยาวแกนลึงค์เท่ากับ 8 ปีแสง โฟกัสทั้งสองห่างกัน 16 ปีแสง ระยะที่โลกและดาวหางสเมอร์เลย์โคจรเข้าใกล้กันที่สุดมีระยะเท่าใด
- ก. $2\sqrt{3}$ ปีแสง ข. $4\sqrt{3}$ ปีแสง ค. $8\sqrt{3}$ ปีแสง ง. $16\sqrt{3}$ ปีแสง

3. พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ผ่านจุด $(0, 0)$, $(-1, -3)$ และ $(-2, -4)$ ซึ่ง P และ Q เป็นจุดที่พาราโบลาคัดแกน x สมการวงกลมที่มี PQ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางคือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

4. ถ้าต้องการให้ $P(x, y)$ อยู่ห่างจากจุด $F(4, 0)$ เป็นระยะสองเท่าของระยะที่ P อยู่ห่างจากเส้นตรง $x = 1$ จุด P อยู่บนเส้นโค้งในข้อใด

ก. วงกลมที่มีสมการเป็น $3x^2 + y^2 = 15$

ข. ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $3x^2 - y^2 = 12$

ค. พาราโบลาที่มีสมการเป็น $y^2 = 16x$

ง. พาราโบลาที่มีสมการเป็น $x^2 = 16y$

5. วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 = 4$ จุด A มีพิกัด $(-2, 0)$ โดยที่ AB เป็นคอร์ดของวงกลมนี้ ถ้าต่อ AB ไปถึงจุด M ทำให้ $BM = AM$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- ก. M อยู่บนวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 0)$ และรัศมี 8 หน่วย
 - ข. M อยู่บนวงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 0)$ และรัศมี 4 หน่วย
 - ค. M อยู่บนพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(-2, 0)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(6, 0)$
 - ง. M อยู่บนพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(2, 0)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(6, 0)$

6. ถ้าพาราโบลาหนึ่งมีแกนสมมาตรที่แกน y และผ่านจุดปลายของส่วนของเส้นตรง $2x + 3y - 6 = 0$ เมื่อ x สอดคล้องกับสมการ

$$|\sqrt{x^2 - x}| + |3 - x - |x - 3|| = 0$$

แล้วความยาวของลาตัสเรกตัมของพาราโบลาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 มี.ค. 2559)

ก. $\frac{9}{8}$

ข. $\frac{9}{4}$

ค. $\frac{9}{2}$

ง. 9

จ. 18

7. ให้ C มีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 = 0$$

เมื่อ $a > 0$ โดยระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม C ไปยังเส้นตรง $4x + 3y = 71$ เท่ากับ 14 หน่วย ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม C และมี $y = 7$ เป็นไดเรกทริกซ์ แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ต.ค. 2558)

ก. $x^2 - 4x + 4y - 16 = 0$

ง. $x^2 + 4x + 8y + 44 = 0$

ข. $x^2 + 4x + 4y - 16 = 0$

จ. $x^2 + 4x + 8y - 36 = 0$

ค. $x^2 + 4x - 4y + 20 = 0$

8. ให้ P เป็นพาราโบลาที่มีสมการเป็น

$$x^2 + 8x + 4y + 12 = 0$$

ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน y มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของ P ระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสองของ H เท่ากับ $4\sqrt{13}$ หน่วย และเส้นกำกับเส้นหนึ่งของ H ขนานกับเส้นตรง $2x - 3y - 2 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H รูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT1 ต.ค. 2559)

ก. $9y^2 - 4x^2 - 32x - 18y - 109 = 0$

ข. $9y^2 - 4x^2 + 32x - 18y - 109 = 0$

ค. $9y^2 - 4x^2 - 32x + 18y - 109 = 0$

ง. $9y^2 - 4x^2 - 32x - 18y - 199 = 0$

จ. $9y^2 - 4x^2 - 32x + 18y + 199 = 0$

9. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลาที่มีสมการเป็น

$$x^2 + 4x + 3y - 5 = 0$$

และพาราโบลา P ตัดแกน x ที่จุด A และจุด B ถ้า E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด A และ B และผลบวกของระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลา P ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรี E เท่ากับ $2\sqrt{13}$ หน่วย แล้วสมการของวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี (PAT1 ต.ค. 2559)

ก. $x^2 + 4x + 9y^2 = 5$

ง. $6x^2 + 24x + 25y^2 = 30$

ข. $3x^2 + 12x + 5y^2 = 15$

จ. $9x^2 + 36x + 16y^2 = 45$

ค. $5x^2 + 20x + 9y^2 = 25$

10. วงกลม C มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $(x - 2)^2 = 8y$ โดยเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาคัดวงกลม C ที่จุด P และจุด Q ถ้าจุด R อยู่บนพาราโบลาและอยู่ห่างจากจุดโฟกัสเป็นระยะ 4 หน่วย แล้วสามเหลี่ยม PQR มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ANET 2550)

ก. 8 ตารางหน่วย

ค. 10 ตารางหน่วย

ข. 9 ตารางหน่วย

ง. 12 ตารางหน่วย

11. กำหนดให้

$$25x^2 + 16y^2 - 50x - 64y - 311 = 0$$

เป็นสมการวงรี ถ้าพาราโบลาสองรูปที่มีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี และตัดกันที่จุดปลายทั้งสองของแกนโทของวงรี แล้วสมการของพาราโบลาทั้งสองคือข้อใด

ก. $(x - 1)^2 = \frac{16}{3}(y + 1)$ และ $(x - 1)^2 = -\frac{16}{3}(y - 5)$

ข. $(x - 1)^2 = \frac{25}{3}(y + 1)$ และ $(x - 1)^2 = -\frac{25}{3}(y - 5)$

ค. $(y - 2)^2 = \frac{16}{3}(x + 2)$ และ $(y - 2)^2 = -\frac{16}{3}(x - 4)$

ง. $(y - 2)^2 = \frac{25}{3}(x + 2)$ และ $(y - 2)^2 = -\frac{25}{3}(x - 4)$

12. กำหนดให้ A เป็นจุดยอดทางด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา

$$x^2 - y^2 = 3$$

และ B และ C เป็นจุดสองจุดบนอีกด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลาที่ทำให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC (สมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2559)

13. กำหนดให้

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ และ } \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x - y|}\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นพื้นที่ของ $A \cap B$ (สมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2560)

ก. $\frac{\pi}{4}$

ข. $\frac{\pi}{2}$

ค. π

ง. 2π

14. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $y = 16x$ สัมผัสกับวงกลม $(x - 6)^2 + y^2 = 2$ คือจุดใด
(สมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2561)