คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 1
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน **สัปดาห์ที่** 1 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{2^2-2^1}+\frac{1}{2^3-2^2}+\frac{1}{2^4-2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-2^n}=1-\frac{1}{2^n} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์ . สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$\frac{1}{2^2-2^1}+\frac{1}{2^3-2^2}+\frac{1}{2^4-2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

จะเห็นว่า $\frac{1}{2^2-2^1}=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{2^2-2^1}+\frac{1}{2^3-2^2}+\frac{1}{2^4-2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2^2-2^1}+\frac{1}{2^3-2^2}+\frac{1}{2^4-2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+2}-2^{k+1}} &= 1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+2}-2^{k+1}}\\ &= 1-\frac{2}{2\cdot 2^k}+\frac{1}{2\cdot 2^{k+1}-1\cdot 2^{k+1}}\\ &= 1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\\ &= 1-\frac{1}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{2^2-2^1}+\frac{1}{2^3-2^2}+\frac{1}{2^4-2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-2^n}=1-\frac{1}{2^n} \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

$\square$

2. จงหาจำนวนเต็ม d, x, y ที่ทำให้

$$d = 71x + 50y \qquad \text{เมื่อ } d = \gcd(71, 50)$$

วิธีทำ พิจารณาการดำเนินการบนแถวดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{rclcl|rrrl}
71 & = & 71(1) & + & 50(0) & 71 & 1 & 0 & R_1 \\
50 & = & 71(0) & + & 50(1) & 50 & 0 & 1 & R_2 \\
21 & = & 71(1) & + & 50(-1) & 21 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\
8 & = & 71(-2) & + & 50(3) & 8 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\
5 & = & 71(5) & + & 50(-7) & 5 & 5 & -7 & R_5 = R_3 - 3R_4 \\
3 & = & 71(-7) & + & 50(10) & 3 & -7 & 10 & R_6 = R_4 - R_5 \\
2 & = & 71(12) & + & 50(-17) & 2 & 12 & -17 & R_7 = R_5 - R_6 \\
1 & = & 71(-19) & + & 50(27) & 1 & -19 & 27 & R_8 = R_6 - R_7
\end{array}$$

ดังนั้น $1 = 71(-19) + 50(27)$ สรุปได้ว่า $d = 1$, $x = -19$ และ $y = 27$ #

3. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า} \quad a \mid c \quad \text{และ} \quad b \mid c \quad \text{โดยที่} \quad \gcd(a, b) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad (ab) \mid c$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $\gcd(a, b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k, t, x, y ซึ่ง

$$c = ak \quad \text{และ} \quad c = bt \quad \text{และ} \quad 1 = ax + by$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1(c) = (ax + by)c &= acx + bcy \\
c &= a(bt)x + b(ak)y \\
c &= ab(tx + ky)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(ab) \mid c$ $\square$

4. จงเขียนรูปแบบบัญญัติและหาจำนวนตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดของ $20!$
วิธีทำ รูปแบบบัญญัติของ $20!$ คือ

$$\begin{aligned}
20! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \\
&= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times \\
&\quad 2^4 \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) \\
&= 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \quad \#
\end{aligned}$$

จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ $20!$ เท่ากับ

$$(18 + 1)(8 + 1)(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 41040 \quad \#$$

5. จงหาค่าของ $\phi[(6^{2564}+4^{2564})^2-(6^{2564}-4^{2564})^2]$ (ตอบในรูปเลขยกกำลัง)
วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}(6^{2564}+4^{2564})^2 &= (6^{2564})^2+2\cdot 6^{2564}\cdot 4^{2564}+(4^{2564})^2\\ (6^{2564}-4^{2564})^2 &= (6^{2564})^2-2\cdot 6^{2564}\cdot 4^{2564}+(4^{2564})^2\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(6^{2564}+4^{2564})^2-(6^{2564}-4^{2564})^2 &= 4\cdot 6^{2564}\cdot 4^{2564}\\ &= 2^2\cdot(2\cdot 3)^{2564}\cdot(2^2)^{2564}\\ &= 2^2\cdot 2^{2564}\cdot 3^{2564}\cdot 2^{5128}\\ &= 2^{7694}\cdot 3^{2564}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi[(6^{2564}+4^{2564})^2-(6^{2564}-4^{2564})^2] &= \phi(2^{7694}\cdot 3^{2564})\\ &= (2^{7694}-2^{7693})(3^{2564}-3^{2563})\\ &= 2^{7693}(2-1)\cdot 3^{2563}(3-1)\\ &= 2^{7694}\cdot 3^{2563} \quad \#\end{aligned}$$

6. ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ และ

$$a\,R\,b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 2\mid(a+b)$$

จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทพิสูจน์. จะแสดงว่า R มีสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. **สมบัติสะท้อน**
สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ จะได้ว่า $x+x=2x$ ดังนั้น $2\mid(x+x)$ สรุปได้ว่า $x\,R\,x$
2. **สมบัติสมมาตร**
ให้ $x,y\in\mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,R\,y$ นั่นคือ $2\mid(x+y)$ แล้ว $2\mid(y+x)$ สรุปได้ว่า $y\,R\,x$
3. **สมบัติถ่ายทอด**
ให้ $x,y,z\in\mathbb{Z}$ สมมติว่า $x\,R\,y$ และ $y\,R\,z$ จะได้ว่า $2\mid(x+y)$ และ $2\mid(y+z)$ นั่นคือมีจำนวนเต็ม k,t ซึ่ง $x+y=2k$ และ $y+z=2t$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}(x+y)+(y+z) &= 2k+2t\\ x+2y+z &= 2k+2t\\ x+z &= 2(k+t-y)\end{aligned}$$

ดังนั้น $2\mid(x+z)$ สรุปได้ว่า $x\,R\,z$

ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$ $\square$

พิจารณาชั้นสมมูลต่อไปนี้

$$\begin{aligned}[0] &= \{a:2\mid(a+0)\}=\{0,\pm2,\pm4,...\}\\ [1] &= \{a:2\mid(a+1)\}=\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}\\ [2] &= \{a:2\mid(a+2)\}=\{0,\pm2,\pm4,...\}\\ [3] &= \{a:2\mid(a+3)\}=\{\pm1,\pm3,\pm5,...\}\end{aligned}$$

ดังนั้นชั้นสมมูลมี 2 แบบคือเซตของจำนวนคู่และเซตของจำนวนคี่ ดังนั้น $\mathbb{Z}/R=\{[0],[1]\}$

7. ให้ f, g, h เป็นฟังก์ชันใน A เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ โดยที่

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
คุณคิดว่าโดยทั่วคอมโพสิทมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มหรือไม่ จงให้เหตุผลประกอบ
วิธีทำ

$$\begin{aligned}
(f \circ g) \circ h &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
f \circ (g \circ h) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

บทพิสูจน์ . ให้ $x, y \in A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (f \circ g) \circ h \quad &\longleftrightarrow \quad \exists z \in A,\ (x, z) \in h \wedge (z, y) \in f \circ g \\
&\longleftrightarrow \quad \exists z \in A,\ (x, z) \in h \wedge \exists t \in A,\ (z, t) \in g \wedge (t, y) \in f \\
&\longleftrightarrow \quad \exists t \in A\, \exists z \in A,\ (x, z) \in h \wedge (z, t) \in g \wedge (t, y) \in f \\
&\longleftrightarrow \quad \exists t \in A\ (x, t) \in g \circ h \wedge (t, y) \in f \\
&\longleftrightarrow \quad (x, y) \in f \circ (g \circ h)
\end{aligned}$$

ดังนั้นคอมโพสิทมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม □

8. ให้ σ เป็นฟังก์ชันใน A เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ โดยที่

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

นิยาม $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma$ (n ตัว) จงหา $n \in \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่ทำให้ $\sigma^n = \sigma$
วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma^3 &= \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
\sigma^4 &= \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
\sigma^5 &= \sigma^4 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \sigma \\
\sigma^6 &= \sigma^5 \circ \sigma = \sigma \circ \sigma = \sigma^2 \\
\sigma^7 &= \sigma^5 \circ \sigma^2 = \sigma \circ \sigma^2 = \sigma^3 \\
\sigma^8 &= \sigma^5 \circ \sigma^3 = \sigma \circ \sigma^3 = \sigma^4 \\
\sigma^9 &= \sigma^5 \circ \sigma^4 = \sigma \circ \sigma^4 = \sigma^5 = \sigma
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sigma = \sigma^5 = \sigma^9 = \cdots$ สรุปได้ว่า n ที่เป็นไปได้คือ $1, 5, 9, 13, ...$ #