คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 2
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ การดำเนินการทวิภาค และนิยามกรุป **สัปดาห์ที่** 2 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $G = \{-1, 0, 1\}$ (ตรวจสอบการบวกและการคูณแยกกัน)
วิธีทำ พิจารณาตารางเคเลย์การบวกและการคูณ ใน $G = \{-1, 0, 1\}$

$+$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$\times$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

1.1 การบวกไม่เป็นการดำเนินการบนบน G เนื่องจาก $+$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $G \times G$ ไป G
การคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน G เนื่องจาก $\times$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $G \times G$ ไป G

1.2 G มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ แต่ไม่มีสมบัติปิดภายใต้การบวก

2. ให้ a, b, c เป็นค่าคงที่ กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินทวิภาคบน $\mathbb{R}$ นิยามโดย

$$x * y = ax + by + cxy \qquad \text{เมื่อ } x, y \in \mathbb{R}$$

ถ้า $1 * 2 = 1,\ 2 * 3 = 6$ และมีจำนวนจริง $d \neq 0$ โดยที่ $x * d = x$ ทุก ๆ จำนวนจริง x

2.1 จงหา a, b, c, d ที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว

2.2 ค่า d ที่ได้จาก 2.1 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ

2.1 จาก $x * d = x$ ทุก ๆ จำนวนจริง x เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$0 = 0 * d = a(0) + bd + c(0)d = bd$$

เนื่องจาก $d \neq 0$ จะได้ว่า $b = 0$ ดังนั้น $x * y = ax + cxy$ พิจารณา

$$1 = 1 * 2 = a + 2c$$
$$6 = 2 * 3 = 2a + 6c$$

แล้ว $a = -3$ และ $c = 2$ จาก $1 \cdot d = 1$ นั่นคือ

$$-3(1) + 2(1)d = 1$$

จะได้ว่า $d = 2$ สรุปได้ว่า $x * y = -3x + 2xy$

2.2 จาก $d = 2$ จะเห็นว่า

$$x * 2 = -3x + 2(x)(2) = x$$
$$2 * x = -3(2) + 2(2)(x) \neq x$$

ดังนั้น $d = 2$ ไม่เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

3. จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \odot)$ เป็น กึ่งกรุป โมนอยด์ หรือกรุป เมื่อกำหนดให้

$$a \odot b = a + b + ab \quad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{R}$$

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= (a + b + ab) \odot c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}, \odot)$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
จะเห็นว่า

$$0 \odot a = 0 + a + 0(a) = a = 0 + a + a(0) = a \odot 0$$

นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์ของ $\odot$
สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ จะได้ว่า

$$-1 \odot a = -1 + a + (-1)a = -1 \neq 0$$

ดังนั้น -1 ไม่มีตัวผกผันภายใต้ $\odot$ สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, \odot)$ เป็นโมนอยด์

4. จงพิสูจน์ว่า $(\mathbb{Z}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เมื่อกำหนดให้

$$a * b = a + b - 5 \qquad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{Z}$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - 5) \\ &= a + (b + c - 5) - 5 \\ &= (a + b - 5) + c - 5 \\ &= (a * b) + c - 5 \\ &= (a * b) * c \\ a * b &= a + b - 5 = b + a - 5 = b * a \end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่ จะเห็นได้ว่า

$$a * 5 = a + 5 - 5 = a = 5 + a - 5 = 5 * a$$

นั้นคือ 5 เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{Z}$ และสำหรับ $a \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$a * (10 - a) = a + (10 - a) - 5 = 5 = (10 - a) + a - 5 = (10 - a) * a$$

ฉะนั้น $10 - a$ เป็นตัวผกผันของ a
สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน $\square$

5. จงพิสูจน์ว่า $(\mathbb{Q}^+, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เมื่อกำหนดให้

$$a * b = \frac{ab}{5} \qquad \text{เมื่อ } a, b \in \mathbb{Q}^+$$

บทพิสูจน์ . ให้ $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ จะได้ว่า

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{5}\right) = \frac{a \cdot \frac{bc}{5}}{5} = \frac{\frac{ab}{5} \cdot c}{5} = \left(\frac{ab}{5}\right) * c = (a * b) * c$$
$$a * b = \frac{ab}{5} = \frac{ba}{5} = b * a$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่ จะเห็นได้ว่า

$$a * 5 = \frac{a5}{5} = a = \frac{5a}{5} = 5 * a$$

นั้นคือ 5 เป็นเอกลักษณ์ใน $\mathbb{Q}^+$ และสำหรับ $a \in \mathbb{Q}^+$ แล้ว

$$a * \left(\frac{25}{a}\right) = \frac{a \cdot \frac{25}{a}}{5} = 5 = \left(\frac{25}{a}\right) * a$$

ฉะนั้น $\dfrac{25}{a}$ เป็นตัวผกผันของ a
สรุปได้ว่า $(\mathbb{Q}^+, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน $\square$

6. จงพิสูจน์ว่า $(\mathbb{Z}_7^*, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน เมื่อกำหนดให้

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{5ab} \qquad \text{เมื่อ } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_7^*$$

บทพิสูจน์ . ให้ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_7^*$ จะได้ว่า

$$(\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c} = (\overline{5ab}) * \bar{c} = \overline{5(5ab)c} = \overline{5a(5bc)} = \bar{a} * \overline{5bc} = \bar{a} * (\bar{b} * \bar{c})$$
$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{5ab} = \overline{5ba} = \bar{b} * \bar{a}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และสมบัติสลับที่
เนื่องจาก $\overline{15} = \bar{1}$ จะได้ว่า

$$\bar{a} * \bar{3} = \overline{5a(3)} = \overline{15a} = \bar{a} = \overline{15a} = \overline{5(3)a} = \bar{3} * \bar{a}$$

ดังนั้น $\bar{3}$ เป็นเอกลักษณ์ของ $\mathbb{Z}_7^*$

เซตและสมาชิก	ตัวผกผัน	เหตุผล
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1} * \bar{2} = \overline{10} = \bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2} * \bar{1} = \overline{10} = \bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3} * \bar{3} = \overline{45} = \bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4} * \bar{4} = \overline{80} = \bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{5} * \bar{6} = \overline{150} = \bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{6} * \bar{5} = \overline{150} = \bar{3}$

จะเห็นว่าสมาชิกทุกตัว $\mathbb{Z}_7^*$ มีตัวผกผัน
สรุปได้ว่า $(\mathbb{Z}_7^*, *)$ เป็นกรุปอาบีเลียน $\square$

7. กำหนดให้ $G = (-1, 1)$ และ

$$a * b = \frac{a+b}{ab+1} \quad \text{เมื่อ } a, b \in G$$

จงตรวจสอบว่า $(G,*)$ เป็นกรุปหรือไม่
วิธีทำ ให้ $a,b,c \in G$

$$
\begin{aligned}
a*(b*c) &= a*\left(\frac{b+c}{bc+1}\right) \\
&= \frac{a+\left(\frac{b+c}{bc+1}\right)}{a\left(\frac{b+c}{bc+1}\right)+1} \\
&= \frac{abc+a+b+c}{ab+ac+bc+1} \\
&= \frac{(a+b)+(ab+1)c}{(a+b)c+(ab+1)} \\
&= \frac{\left(\frac{a+b}{ab+1}\right)+c}{\left(\frac{a+b}{ab+1}\right)c+1} \\
&= \left(\frac{a+b}{ab+1}\right)*c \\
&= (a*b)*c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต G เนื่องจาก

$$a*0 = \frac{a+0}{a0+1} = a = \frac{0+a}{0a+1} = 0*a$$

จะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์ใน G ให้ $a \in G$ แล้ว

$$a*(-a) = \frac{a+(-a)}{a(-a)+1} = 0 = \frac{-a+a}{-a(a)+1} = (-a)*a$$

นั่นคือ $-a$ เป็นตัวผกผันของ a สรุปได้ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป

8. จงหาตัวผกผันการคูณของ

8.1 $\overline{17}$ ใน $\mathbb{Z}_{97}^{*}$

8.2 $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{100}^{\times}$

วิธีทำ

8.1 พิจารณาเมทริกซ์ในการหา $\gcd(17,97)=1$

$$\begin{array}{rrrl} 97 & 1 & 0 & R_1 \\ 17 & 0 & 1 & R_2 \\ 12 & 1 & -5 & R_3 = R_1 - 5R_2 \\ 5 & -1 & 6 & R_4 = R_2 - R_3 \\ 2 & 3 & -17 & R_5 = R_3 - 2R_4 \\ 1 & -7 & 40 & R_6 = R_4 - 2R_5 \end{array}$$

ดังนั้น $1 = 97(-7) + 17(40)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{97(-7)+17(40)} = \overline{17}\cdot\overline{40}$$

ดังนั้น $\overline{40}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{17}$ ใน $\mathbb{Z}_{97}^{*}$

8.2 พิจารณาเมทริกซ์ในการหา $\gcd(71,100)=1$

$$\begin{array}{rrrl} 100 & 1 & 0 & R_1 \\ 71 & 0 & 1 & R_2 \\ 29 & 1 & -1 & R_3 = R_1 - R_2 \\ 13 & -2 & 3 & R_4 = R_2 - 2R_3 \\ 3 & 5 & -7 & R_5 = R_3 - 2R_4 \\ 1 & -22 & 31 & R_6 = R_4 - 4R_5 \end{array}$$

ดังนั้น $1 = 100(-22) + 71(31)$ จะได้ว่า

$$\bar{1} = \overline{100(-22)+71(31)} = \overline{71}\cdot\overline{31}$$

ดังนั้น $\overline{31}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ $\overline{71}$ ใน $\mathbb{Z}_{100}^{*}$