



Assignment 3  
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมบัติกรุปเบื้องต้น อันดับของสมาชิก และผลคูณตรงของกรุป สัปดาห์ที่ 3 คะแนนเต็ม 10 คะแนน  
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญชัช จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. ให้  $n \in \mathbb{N}$  โดยที่  $n > 1$  จงแสดงว่า  $\mathbb{Z}_n^\times$  มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

2. ให้  $G$  เป็นกรุป โดยที่  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เมื่อ  $n \in \mathbb{N}$  จงพิสูจน์ว่า

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1} \quad (\text{โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์})$$

3. จงหาอันดับของทุกสมาชิกใน  $\mathbb{Z}_{11}^*$

4. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$  เป็นสมาชิกใน  $GL_2(\mathbb{R})$

4.1 มีจำนวนจริง  $a, b$  ที่ทำให้  $A$  มีอันดับเท่ากับ 2 หรือไม่เพราะเหตุใด

4.2 มีจำนวนจริง  $a, b$  ที่ทำให้  $A$  มีอันดับเท่ากับ 3 หรือไม่เพราะเหตุใด

5. จงตรวจสอบว่าอันดับของสมาชิกต่อไปนี้ ใน  $\mathbb{C}^*$  เท่ากันหรือไม่เพราะเหตุใด

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{และ} \quad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

6. ให้  $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$  และนิยามการดำเนินการทวิภาคบน  $G$  ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 2, 2bd)$$

จงตรวจสอบว่า  $(G, *)$  เป็นกรุปหรือไม่

7. ให้  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  และนิยามการดำเนินการทวิภาคบน  $G$  ดังนี้

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

จงแสดงว่า  $(G, *)$  เป็นกรุป

8. จงหาอันดับของ  $(5, \overline{11})$  และ  $(\overline{17}, \overline{17})$  ใน  $\mathbb{Z}_{19}^* \times \mathbb{Z}_{20}^\times$